

## ANÁLISIS VIBRATORIO DE VIGAS FISURADAS: TEORÍA DE TIMOSHENKO CON TRUNCAMIENTO

Anna María De Rosa<sup>1</sup>, María Lippiello<sup>2</sup> Carla Ceraldi<sup>2</sup>, Héctor Martín<sup>3</sup>, Antonella Onorato<sup>1</sup>  
y Marcelo Piovan<sup>4</sup>

<sup>1</sup> School of Engineering, University of Basilicata, Potenza Italy - [maria.derosa@unibas.it](mailto:maria.derosa@unibas.it)

<sup>2</sup> DiST, University of Naples "Federico II", Naples Italy

<sup>3</sup> Grupo de Diseño Mecánica, UTN FRRQ, Calle N° 44, 1000 Parque Industrial Reconquista, Reconquista, Argentina, [hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar](mailto:hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar)

<sup>4</sup> Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada – UTN FR. Bahía Blanca  
11 de abril 461, Bahía Blanca, Argentina [mpiovan@frbb.utn.edu.ar](mailto:mpiovan@frbb.utn.edu.ar)

### RESUMEN

En este artículo se propone una nueva teoría para el análisis dinámico en el contexto del modelo de viga Timoshenko bajo la hipótesis de condiciones de borde de apoyo simple y con una fisura. A su vez se supone que la viga tiene sus extremos restringidos con resortes elásticos tanto transversales como rotacionales. El principal objetivo de este artículo es investigar el comportamiento de las vibraciones libres según la teoría truncada de vigas Timoshenko.

A partir de la teoría truncada de viga Timoshenko, los autores del presente artículo han desarrollado la concepción para la teoría de vigas Timoshenko con fisuras, empleado métodos geométricos y variacionales.

La novedad del enfoque que se propone en el artículo reside en que se muestra la perfecta analogía entre métodos variacionales y métodos de directos en el caso del análisis dinámico para vigas. El objetivo de las formulaciones propuestas reside en hallar las ecuaciones del modelo truncado de Timoshenko con sus correspondientes condiciones de borde y establecer su similitud matemática con los otros dos enfoques.

Se muestra que las ecuaciones diferenciales con sus correspondientes condiciones de borde, usadas para resolver el problema dinámico de las vigas truncadas Timoshenko a través de formulaciones variacionales, tienen la misma forma que las obtenidas a través del método directo.

Finalmente, se efectúan algunos cálculos numéricos para evaluar los efectos de una fisura, de la deformación por corte e inercia rotacional. Los resultados obtenidos se validan por comparación con los disponibles en la literatura técnica internacional.

**Palabras Clave:** Fisuras; Teoría Truncada de Timoshenko; vibraciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

La presencia de grietas o fisuras en las paredes de un componente estructural (de un puente metálico o de montajes de maquinaria) puede ser una señal de alerta temprana de su integridad estructural. Las fisuras pueden producirse como consecuencia del asentamiento de la construcción (e.g. en puentes) por los esfuerzos a los que están sometidos los materiales, o indicar problemas mucho más graves que no deben pasarse por alto, ya que pueden provocar fallos estructurales y en ocasiones incluso colapsos. Las causas que subyacen a este fenómeno pueden ser diversas, algunas directamente atribuibles a la acción humana, otras a factores externos como terremotos u otros eventos naturales.

Las grietas y fisuras pueden originarse por razones estructurales o no estructurales. Las primeras se deben a la mala calidad de los materiales de construcción o a la deformación estructural del terreno sobre el que se montó la estructura (e.g. recipientes de almacenaje de gases a la intemperie). Estos fenómenos son los potencialmente más peligrosos, pudiendo dar lugar a fisuras importantes sobre las que es necesario intervenir con prontitud. Las fisuras no estructurales como los fenómenos normales de dilatación o retracción de los materiales también se deben a la acción de los agentes atmosféricos como la lluvia, la humedad y la nieve.

La naturaleza de estas grietas no es motivo de especial preocupación, aunque sí su presencia, por lo tanto la detección de grietas es un tema muy importante a la luz de los posibles desarrollos en el control de la integridad estructural. En consecuencia, se han llevado a cabo numerosos estudios para comprender la respuesta dinámica y la estabilidad de las vigas fisuradas, como elemento básico de análisis. En las últimas dos décadas, en particular, varios investigadores han dado gran importancia al análisis de vibraciones, considerándolo uno de los procedimientos más eficientes en la detección de grietas. Se han propuesto numerosos métodos para el análisis modal, basados en la teoría clásica de Euler-Bernoulli [1-6], aunque posteriormente considerados inadecuados, por la ausencia en el tratamiento del problema de las contribuciones de las deformaciones debidas al cortante y la inercia rotacional. Los factores correctores de la teoría de Euler-Bernoulli han sido introducidos por Timoshenko [7] y las vibraciones libres de vigas fisuradas, basadas en la teoría de Timoshenko, han sido estudiadas por numerosos autores [8-13] y algunas soluciones particulares del problema de detección de grietas se obtuvieron usando métodos convencionales.

En este artículo se propone un modelo matemático nuevo para el análisis dinámico de estructuras fisuradas, dentro del marco de teorías tipo Timoshenko o con deformación por corte de primer orden. El modelo contempla la estructura como una viga flexible por corte e inercia rotatoria con sus extremos soportados en apoyos elásticos tanto a desplazamiento como a

rotación flexional y que posee una fisura en su dominio. El principal objetivo de este artículo es investigar el comportamiento de las vibraciones libres mediante la teoría truncada de Timoshenko. Recientemente, los autores también han propuesto este enfoque para el análisis dinámico de vigas, placas y nanotubos [14-16]. En efecto, a partir de la teoría truncada de Timoshenko, los autores del presente artículo han desarrollado la concepción para la teoría de vigas por corte con la presencia de fisuras, empleando métodos geométricos y variacionales.

La novedad del enfoque que se propone en este artículo reside en que se muestra la perfecta analogía entre los métodos variacionales y los métodos directos en el caso del análisis dinámico para vigas. Se propone una solución analítica para el estudio de la variabilidad de los patrones dinámicos asociados a la presencia de una fisura y finalmente se efectúan algunos cálculos numéricos para evaluar los efectos que los diversos parámetros del modelo tienen en los patrones de frecuencia de la estructura. Los resultados obtenidos se contrastan con los disponibles en la literatura técnica internacional.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considérese una viga tipo Timoshenko, en presencia de una fisura, como la que se muestra en la Figura 1, que tiene longitud  $L$ , sección de área  $A$ , momento de inercia  $I$ , módulo de Young  $E$ , módulo de cizallamiento  $G$ , factor de corte  $\chi$ , densidad de masa  $\rho$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ . La viga se supone restringida en los extremos por resortes elásticos, con rigidez transversal y rigidez rotacional a flexión. Considérese el origen en el extremo izquierdo con abscisa  $z$  y ordenada  $y$ , además se  $t$  la variable temporal.

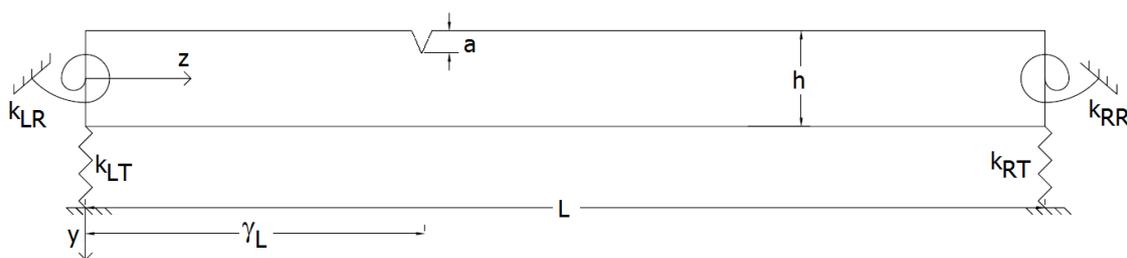


Figura 1: Esquema del nanotubo con la micro masa en el extremo derecho

Empleando el principio de Hamilton como en la referencia [14] se obtienen dos sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para una viga Timoshenko, para el caso truncado, en presencia de una fisura a una distancia  $\gamma_L$  del origen y cuyas expresiones vienen dadas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\rho A \frac{\partial^2 v_i(z,t)}{\partial t^2} + GA\chi \left( \frac{\partial^2 v_i(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi_i(z,t)}{\partial z} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^3 v_i(z,t)}{\partial t^2 \partial z} + EI \frac{\partial^2 \phi_i(z,t)}{\partial z^2} - GA\chi \left( \frac{\partial v_i(z,t)}{\partial z} + \phi_i(z,t) \right) = 0 \end{cases} \quad i = 1,2 \quad (1)$$

Correspondiendo  $i=1$  al subdominio  $z \in [0, \gamma_L]$ , mientras que  $i=2$  corresponde a  $z \in [\gamma_L, L]$ .

Además  $v_i(z, t)$  y  $\phi_i(z, t)$  son respectivamente, el desplazamiento transversal y la rotación total dada por:

$$\phi(z, t) = \phi_b(z, t) + \psi(z, t) = -\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + \psi(z, t) \quad (2)$$

En tanto que  $\phi_b(z, t)$  es la rotación flexional (o pendiente de la curva de desplazamiento) y  $\psi(z, t)$  es la rotación por cortante.

La solución de cada sistema  $i$ -ésimo de la Ecuación (1) se propone con la siguiente forma de separación de variables:

$$v(z, t) = v(z)e^{i\omega t}, \phi(z, t) = \phi(z)e^{i\omega t} \quad (3)$$

con lo cual el sistema de ecuaciones queda como:

$$\rho A \omega^2 v_i + GA\kappa \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} - \rho I \omega^2 \frac{\partial v_i}{\partial z} - GA\kappa \left( \frac{\partial v_i}{\partial z} + \phi_i \right) = 0 \quad (5)$$

Definiendo las siguientes entidades adimensionales:

$$\zeta = \frac{z}{L}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI}, \quad e = \frac{E}{G\kappa}, \quad r = \frac{I}{AL^2}, \quad s = er, \quad \gamma = \frac{\gamma_L}{L} \quad (6)$$

Con los cuales el sistema de ecuaciones diferenciales descrito en las Ecuaciones (4-5) queda:

$$\Omega e r v_i + \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad i = 1,2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial \zeta^2} - \Omega r \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} - \frac{1}{er} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} + \bar{\phi}_i \right) = 0, \quad i = 1,2 \quad (8)$$

Siendo  $\bar{\phi}_i = \phi_i L$ . Despejando  $\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \zeta}$  de la Ecuación (7) y substituyendolo en la Ecuación (8) y luego derivando se tiene:

$$\frac{\partial^4 v_i}{\partial \zeta^4} + \Omega(s+r) \frac{\partial^2 v_i}{\partial \zeta^2} - \Omega v_i = 0, \quad i = 1,2 \quad (9)$$

Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales para  $i=1$  e  $i=2$  son dadas por:

$$v_1(\zeta) = A_1 \cos(a\zeta) + A_2 \sin(a\zeta) + A_3 \cosh(b\zeta) + A_4 \sinh(b\zeta), \quad \forall 0 < \zeta < \gamma \quad (10)$$

$$v_2(\zeta) = A_5 \cos(a\zeta) + A_6 \sin(a\zeta) + A_7 \cosh(b\zeta) + A_8 \sinh(b\zeta), \quad \forall \gamma < \zeta < 1 \quad (11)$$

con:



$$a = \sqrt{\frac{1}{2p}(q + \sqrt{q^2 + 4pg})}; b = \sqrt{\frac{1}{2p}(-q + \sqrt{q^2 + 4pg})} \quad (12)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} p &= 1 \\ q &= \Omega(s + r) \\ g &= \Omega \end{aligned} \quad (13)$$

Además es posible obtener  $\bar{\phi}_i(\zeta)$  desde la Ecuación (8) sustituyendo  $\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \zeta}$  extraída de la Ecuación (7) y oportunamente derivada, de tal forma que se llega a:

$$\bar{\phi}_i = -s \frac{\partial^3 v_i}{\partial \zeta^3} - (1 + s\Omega r + \Omega s^2) \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} \quad (14)$$

Las condiciones de borde presentes en una viga fisurada como la que se indica en la Figura 1 son 8 y definidas en las siguientes Ecuaciones:

$$EI \frac{\partial \phi_1(0)}{\partial z} - k_{LR} \phi_1(0) = 0 \quad (15)$$

$$GA\chi \left( \phi_1(0) + \frac{\partial v_1(0)}{\partial z} \right) - k_{LT} v_1(0) = 0 \quad (16)$$

$$v_2(\gamma L) = v_1(\gamma L) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi_1(\gamma L)}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2(\gamma L)}{\partial z} \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial v_2(\gamma L)}{\partial z} - \frac{\partial v_1(\gamma L)}{\partial z} \right) = c_m EI \frac{\partial \phi_2(\gamma L)}{\partial z} \quad (19)$$

$$\phi_1(\gamma L) + \frac{\partial v_1(\gamma L)}{\partial z} = \phi_2(\gamma L) + \frac{\partial v_2(\gamma L)}{\partial z} \quad (20)$$

$$EI \frac{\partial \phi_2(L)}{\partial z} + k_{RR} \phi_2(L) = 0 \quad (21)$$

$$GA\chi \left( \phi_2(L) + \frac{\partial v_2(L)}{\partial z} \right) + k_{RT} v_2(L) = 0 \quad (22)$$

Las cuales al ser puestas en forma adimensional se transforman en:

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1(0)}{\partial \zeta} - K_{LR} \bar{\phi}_1(0) = 0 \quad (23)$$

$$\left( \bar{\phi}_1(0) + \frac{\partial v_1(0)}{\partial \zeta} \right) - s K_{LT} v_1(0) \quad (24)$$

$$v_2(\gamma) = v_1(\gamma) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1(\gamma)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \bar{\phi}_2(\gamma)}{\partial \zeta} \quad (26)$$

$$\bar{\phi}_2(\gamma) - \bar{\phi}_1(\gamma) = -\theta \frac{\partial \bar{\phi}_2(\gamma)}{\partial \zeta} \quad (27)$$

$$\bar{\phi}_1(\gamma) + \frac{\partial v_1(\gamma)}{\partial \zeta} = \bar{\phi}_2(\gamma) + \frac{\partial v_2(\gamma)}{\partial \zeta} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_2(1)}{\partial \zeta} + K_{RR} \bar{\phi}_2(1) = 0 \quad (29)$$

$$\left( \bar{\phi}_2(1) + \frac{\partial v_2(1)}{\partial \zeta} \right) + s K_{RT} v_2(1) = 0 \quad (30)$$

Habiéndose definido las rigideces adimensionalizadas como:

$$K_{LR} = \frac{k_{LR}L}{EI}, K_{RR} = \frac{k_{RR}L}{EI}, K_{LT} = \frac{k_{LT}L^3}{EI}, K_{RT} = \frac{k_{RT}L^3}{EI}, \theta = \frac{c_m EI}{L} \quad (31)$$

En la Ecuación (27),  $\theta$  es la flexibilidad seccional de la fisura descrita en forma adimensional y depende de la extensión de la fisura según como se define y explica en la referencia [10].

Generalmente, los coeficientes de flexibilidad se expresan como un resorte a rotación o resortes de traslación y rotación, tal como en el caso del estudio de Loya et al. [9] y De Rosa y Lippiello [13]. En la literatura se han utilizado varios métodos para modelar una fisura en una viga. Entre los enfoques más comunes, el método basado en el resorte rotacional, con rigidez determinada a partir de la mecánica de fractura, parece ser muy atractivo para un componente tipo viga. Para los casos en los que la viga de Timoshenko, la grieta de borde abierto está representada por un solo resorte de rotación. La flexibilidad extensional fue despreciada por casi todos los autores ya que la misma es muy pequeña en comparación con la flexibilidad rotacional. En el presente análisis, se desprecia la influencia de la flexibilidad traslacional.

Si se considera una viga Timoshenko como en la Figura 1, con una fisura de profundidad  $a$  localizada en una abscisa adimensional  $\gamma$ , entonces la función de flexibilidad no dimensional para la sección donde se ubica la fisura se define como:

$$\theta = 6\pi \xi^2 f_j(\xi)(h/L) \quad (32)$$

En la cual  $\xi$  es la profundidad adimensional de la fisura definida como  $\xi=a/h$ , siendo  $h$  la altura de la sección transversal y la función:

$$f_j(\xi) = 0.6384 - 1.035\xi + 3.72\xi^2 - 5.1773\xi^3 + 7.553\xi^4 - 7.332\xi^5 + 2.4909\xi^6 \quad (33)$$

Es la función de flexibilidad para una grieta de borde abierto desde una superficie y expuesta a un momento de flexión. Vale la pena mencionar que se han propuesto ecuaciones similares para una grieta abierta de dos lados. Si se sustituyen las Ecuaciones (10-11) y (14) oportunamente derivadas en las condiciones de borde (23-30), se obtendrá un sistema de ocho ecuaciones en las incógnitas  $A_i$ . Para que el sistema admita una solución distinta a la trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser igualado a cero. Luego las infinitas soluciones de la ecuación característica hallada con el determinante anulado, permitirán obtener las frecuencias de vibración para la viga fisurada.

#### 4. EJEMPLOS NUMERICOS

En esta sección se muestra una validación del método analítico propuesto para investigar la influencia del parámetro de fisura. Se han realizado algunos ejemplos numéricos y los resultados obtenidos se han comparado con los de los trabajos disponibles en la literatura. Para todos los ejemplos se usan las propiedades físicas y geométricas de la Referencia [13].

##### 4.1. Viga con una fisura: comparación de resultados

En este ejemplo numérico se comparan las primeras tres frecuencias naturales de vibración flexional calculadas con el modelo de viga truncada de Timoshenko propuesto y los resultados de la Tabla 3 del artículo [13]. Así pues en la siguiente Tabla 1 se presentan comparaciones de frecuencias naturales para varias relaciones de  $L/h$  y varias condiciones de contorno. Se consideran las relaciones  $L/h$  de 3, 5, 7 y 9. A su vez para todos los casos, la relación de profundidad de fisura adimensional se supone  $\xi=0,35$  mientras que el parámetro adimensional de ubicación de la fisura se fija en  $\gamma=0.5$ . Como se puede ver en la Tabla 1, los valores calculados de las primeras tres frecuencias naturales de la viga fisurada utilizando el modelo propuesto de viga truncada de Timoshenko tienen pequeña variación con los obtenidos de la Referencia [13], alcanzando 4% de diferencia como máximo.

Tabla 1. Comparación de los resultados del presente enfoque truncado con los homónimos de la Referencia [13], para varias relaciones  $L/h$  y condiciones de borde.

Condición de borde	$L/h$	Timoshenko analítico [13]			Presente Modelo Truncado		
		$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Simplemente Apoyada	3	6781.8	27316.2	42718.8	6751.6	26321.6	40125.5
	5	2877.3	12222.2	21006.4	2874.7	12079.3	20439.8
	7	1580.3	6803.3	12430.6	1580.0	6773.6	12278.2
	9	996.9	4293.3	8177.0	996.7	4285.1	8127.3
Apoyada Empotrada	3	10343.4	29333.0	43315.6	10265.6	28392.6	41219.1
	5	4544.2	13922.1	22439.0	4535.3	13743.7	21881.8
	7	2517.8	8010.8	13729.6	2516.14	7967.4	13621.1
	9	1590.8	5155.7	9217.4	1590.38	5142.63	9153.78
Empotrada Empotrada	3	13628.4	31009	43865.0	13482.0	30243.5	42172.0
	5	6205.3	15650.9	23599.0	6185.27	15451.0	23053.8
	7	3509.1	9335.6	14796.1	3504.9	9276.83	14601.8
	9	2243.2	6134.7	10098.1	2242.0	6114.9	10021.7
Empotrada Libre	3	3134.9	12664.4	33381.4	3131.7	12541.7	32301.4
	5	1222.9	5888.2	16504.4	1222.7	5870.16	16245.0
	7	642.9	3352.9	9683.4	642.9	3349.09	9612.9
	9	394.9	2153.2	6295.6	394.9	2151.2	6273.1

#### 4.2. Viga con una fisura: variación del parámetro de posición

En este ejemplo se analiza el caso de una viga simplemente apoyada (con  $L/h=0.3$ ) para diferentes ubicaciones de la fisura, o sea del parámetro adimensional  $\gamma$ . Así pues en la Tabla 2 se muestran las primeras tres frecuencias naturales con el parámetro  $\gamma$  variando de 0.1 a 0.5 lo cual significa que la fisura se encuentra a distancias del origen de un 10% a 50% de la longitud total de la viga, respectivamente. Como se puede apreciar en la Tabla 2, en la medida que la fisura se encuentra más cercana al centro de la viga la primera frecuencia disminuye sustancialmente en consonancia con la pérdida de rigidez estructural.

Tabla 2. Primeras tres primeras frecuencias naturales ( $f_i = \omega_i / (2\pi)$ ) para una viga Timoshenko con respecto al parámetro adimensional  $\gamma$  de posición de la fisura.

$\gamma$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0.5	6751.60	26321.60	40125.50
0.4	6878.80	25001.90	42959.40
0.3	7266.16	23029.50	44312.70
0.2	7894.47	22268.80	41018.40
0.1	8575.90	24029.50	39869.30

#### 4.3. Viga empotrada-libre con restricciones flexibles en el extremo libre

En este ejemplo se analiza el caso de una viga con empotramiento en el extremo de origen y restricciones flexibles a translación y rotación en el extremo libre (a la derecha). Primeramente se pretende analizar como varía la respuesta de las tres primeras frecuencias adimensionales de la viga en la medida que varía la rigidez rotacional adimensional ( $K_{RR}$ ) en la extremidad derecha. Para este ejemplo se ubica la fisura en la mitad del dominio, es decir  $\gamma=0.5$ , mientras que la profundidad adimensional de la fisura tiene el siguiente valor  $\xi=0.35$ . En la Figura 2 se muestra la variación de las tres primeras frecuencias adimensionales con respecto al logaritmo base 10 (por comodidad representativa), de la rigidez del soporte elástico  $K_{RR}$ . Como se puede apreciar las tres frecuencias adimensionales aumentan su valor y convergiendo a valores estables luego de  $\text{Log}_{10}[K_{RR}] = 5$ , con lo cual se llega a una viga empotrada con un bipéndulo en el extremo libre. En particular para  $\text{Log}_{10}[K_{RR}] = 5$  se tiene que  $\Omega_1 = 22.3457$ ,  $\Omega_2 = 291.9448$  y  $\Omega_3 = 1122.5413$ .

Ahora bien, en este último ejemplo se analiza la variación de las primeras tres frecuencias adimensionales para el caso de una restricción flexible a translación en el extremo libre. Nuevamente como en el párrafo anterior  $\gamma=0.5$  y  $\xi=0.35$ . Claramente cuando  $K_{RT}=0$ , el problema se reduce al de una viga en voladizo.

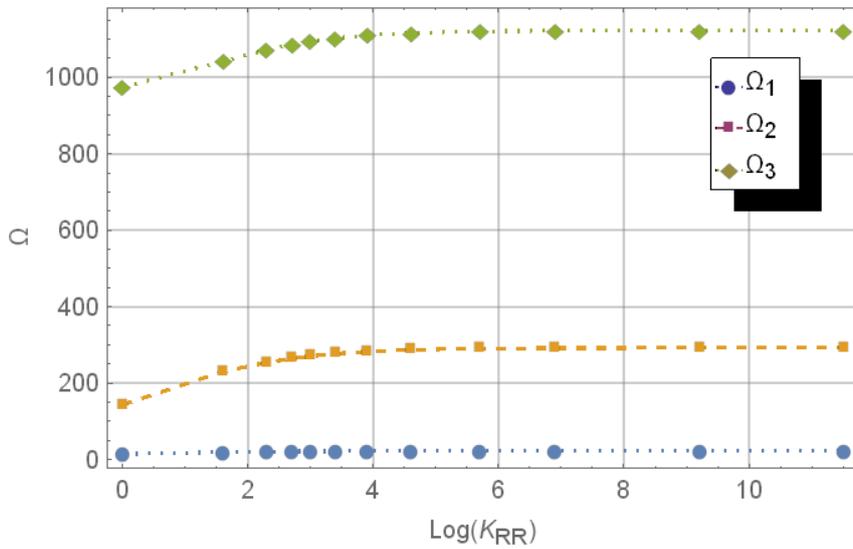


Figura 2: Primeras tres frecuencias adimensionales a medida que varía la rigidez rotacional.

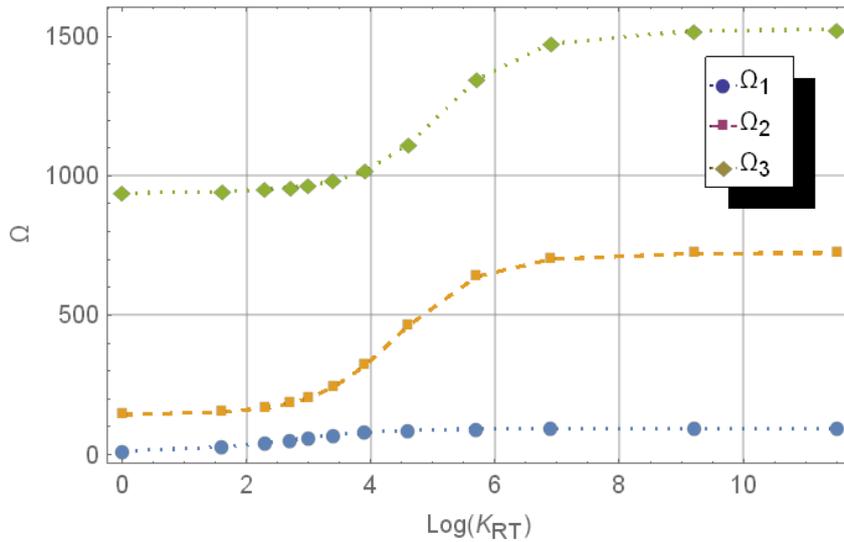


Figura 3: Primeras tres frecuencias adimensionales a medida que varía la rigidez translacional.

Así pues en la Figura 3 se muestra la variación de las tres primeras frecuencias adimensionales con respecto a la variación de la rigidez translacional, aunque nuevamente en escala logarítmica, por comodidad. Como puede apreciarse entre  $\text{Log}_{10}[K_{TR}]=4$  y  $\text{Log}_{10}[K_{TR}]=8$  se produce un cambio en la curvatura de la variación de la segunda y tercera frecuencias adimensionales, para luego estabilizarse y converger al caso de la viga empotrada apoyada cuando  $\text{Log}_{10}[K_{TR}] \rightarrow \infty$ .

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado una viga fisurada por vibración transversal. La viga, que tiene restricciones elásticas traslacionales y rotacionales en los extremos y en condiciones de contorno de soporte simple, ha sido modelada por dos teorías de vigas diferentes, que son la teoría clásica de vigas de Timoshenko y la teoría de vigas truncadas. Se ha evaluado el efecto de la ubicación de la fisura, los coeficientes de rigidez a translación y a rotación sobre las frecuencias naturales de vibración transversal. Se muestra que la existencia de grietas reduce los valores de las frecuencias naturales y las frecuencias naturales también se ven afectadas por la ubicación de la grieta.

Se presentan resultados típicos para demostrar las cualidades del enfoque propuesto y se comparan con algunos resultados disponibles en la literatura. Se han obtenido buenos resultados. En particular, se extraen las siguientes conclusiones:

- el cambio en las frecuencias naturales depende en gran medida de las condiciones de contorno y de las relaciones longitud/profundidad de la viga;
- la grieta juega un papel clave para el comportamiento dinámico de la viga: los valores de las frecuencias naturales aumentan cuando aumentan los parámetros de rigidez transversal y rotacional adimensional en los soportes flexibles.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo desean agradecer el auspicio de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de la Basilicata, de la Universidad de Napoli "Federico II" y de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Tecnológica Nacional por el apoyo a través del proyecto PID 8454 TC.

## REFERENCIAS

- [1] Thatoi D., Jena P., Acharya A., Mohapatra S., Nanda J. *Analysis of the dynamic response of a cracked cantilever beam*. AICTE Sponsored National Conference on Emerging Trend & its Application in Engineering (NCETAE), 2011.
- [2] Narkis Y. *Identification of crack location in vibrating simply supported beams*. Journal of Sound and Vibration 172(4), 549-558, 1994.
- [3] Chondros T., Dimarogonas A., Yao J. *A continuous cracked beam vibration theory*. Journal of Sound and Vibration 215(1), 17-34, 1998.
- [4] Khiem N., Lien T. *A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam*. Journal of Sound and Vibration 245 (4), 737-751, 2001.

- [5] Caddemi S, Calio I. *Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler- Bernoulli beam with multiple open cracks*. Journal of Sound and Vibration 327 (3), 473-489, 2009.
- [6] Khiem N., Hai T. *A closed-form solution for free vibration of beams with arbitrary number of cracks*. In Proc. of the Scientific Conference dedicated to 35th Anniversary of Vietnam Academy of Science and Technology, Vol. 1, Hanoi, Vietnam pp 30-42, 2010.
- [7] Timoshenko S. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophy Magazine 1921;41(245):744-746, 1924.
- [8] Li Q. *Vibratory characteristics of Timoshenko beams with arbitrary number of cracks*. Journal of Engineering Mechanics 129(11), 1355-1359, 2003.
- [9] Loya J., Rubio L, Fernandez-Saez J. *Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams*. Journal of Sound and Vibration 290(3), 640-653, 2006.
- [10] Khaji N, Shafiei M, Jalalpour M. *Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. Intl. Jou. Mech. Sci. 51, 667-681, 2009.
- [11] Elishakoff I, Hache F, Challamel N. *Critical contrasting of three versions of vibrating Bresse-Timoshenko beam with a crack*. Intl. Jou. Solids and Structures 109, 143-151, 2017.
- [12] Khiem N., Hung D. *A closed-form solution for free vibration of multiple cracked Timoshenko beam and application*. Vietnam Journal of Mechanics, 39(4), 315-328, 2017.
- [13] De Rosa M., Lippiello M. *Closed-form solutions for vibrations analysis of cracked Timoshenko beams on elastic medium: An analytical approach*. Eng. Struc. 236, 111946, 2021.
- [14] De Rosa M., Lippiello M., Elishakoff, I. *Variational Derivation of Truncated Timoshenko-Ehrenfest Beam Theory*. Journal Appl. Comput. Mech. 8(3), 996-1004, 2022.
- [15] De Rosa M., Lippiello M., Elishakoff, I. *Reduced Theories for Thick Shells*. ASME 2022 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Oct.30-Nov.3, 2022 Columbus, Ohio, USA, IMECE2022-96660, V005T07A003; <https://doi.org/10.1115/IMECE2022-96660>.
- [16] De Rosa, M.A., Lippiello, A. Onorato, M., Elishakoff, I. *A new theory for Timoshenko SWCNT analysis*. To appear Applied Mechanics.