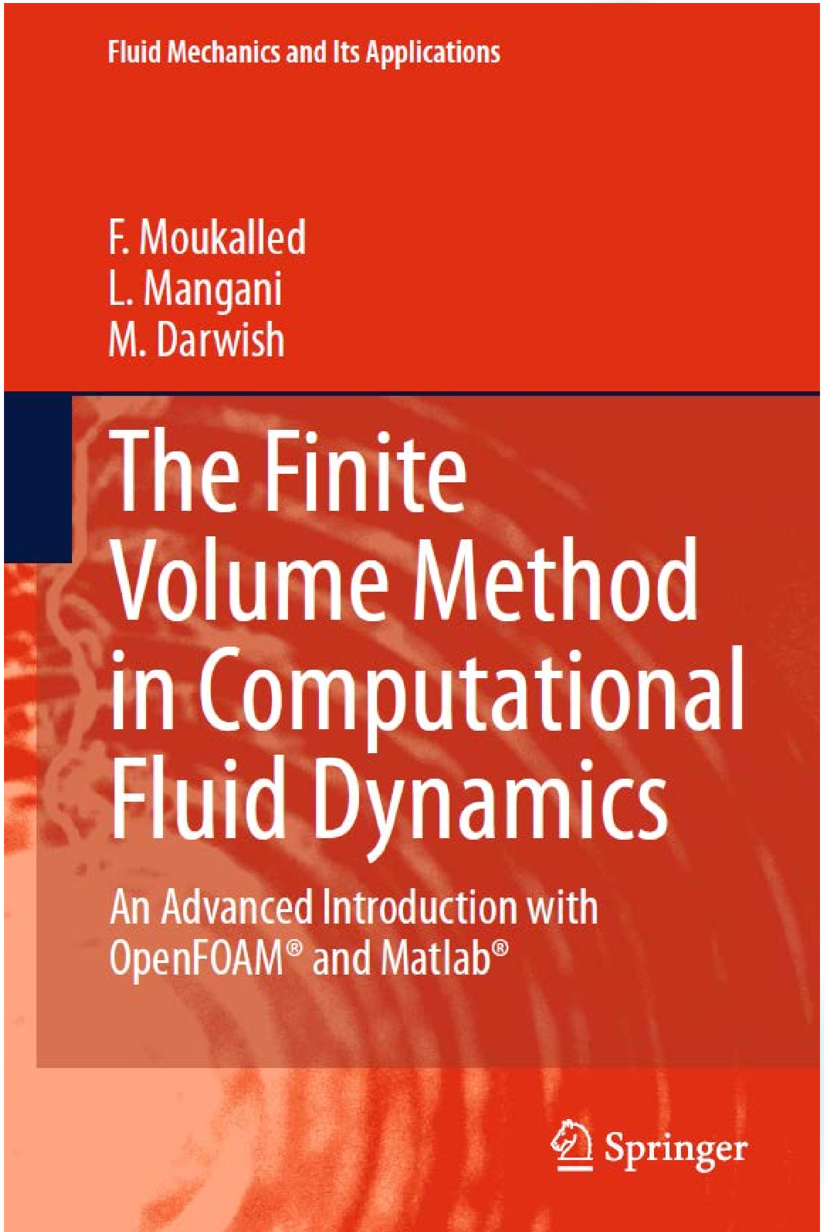
INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

Responsable: Dr. Ing. Pablo Gamazo (Centro Universitario Regional Litoral Norte, Universidad de la República. Uruguay)
Asistente: Ing. Lucas Bessone (Universidad Tecnológica Nacional, Regional Concordia)

Contenido del curso

Componente teórico

- Introducción a los Modelos
- Volúmenes Finitos
- El proceso de discretización



- Libro para el curso

1. Modelos, introducción

¿Qué es un modelo?

Modelos conceptuales, físicos y matemáticos

Lenguaje matemático

Modelos

La palabra “modelo” proviene del latín “modellus” diminutivo de “modus” (medir)

¿Que es un modelo?

- Un modelo es una representación abstracta de un objeto o sistema real

- Un modelo es creado para reproducir ciertos aspectos del sistema al que representa

Definición:

- *Un modelo es una versión simplificada de un sistema real y de los fenómenos que ocurren en el mismo, tal que simula de manera aproximada cierta relación estímulo-respuesta del sistema original.*

Bear, J. & Cheng, A. H.-D.
Modeling Groundwater Flow
and Contaminant Transport .

Modelos

Ejemplo sistema real:

- Canal

Fenómenos:

- Flujo de agua
- Transporte de solutos

Estímulo:

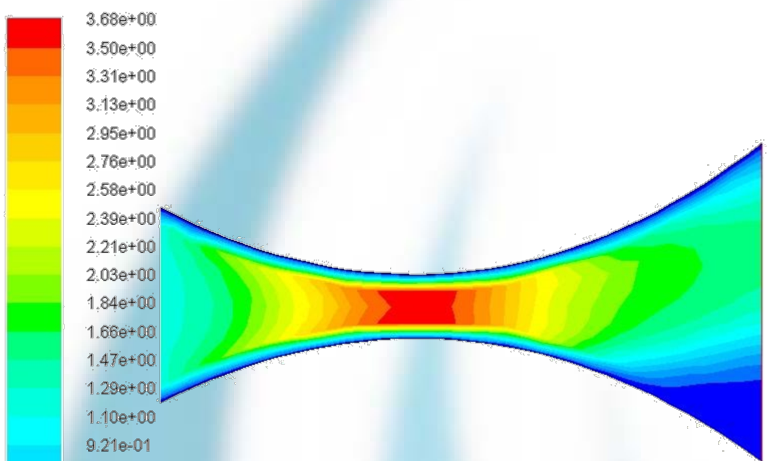
- Abertura o cierre de compuertas
- Bombeo o descarga

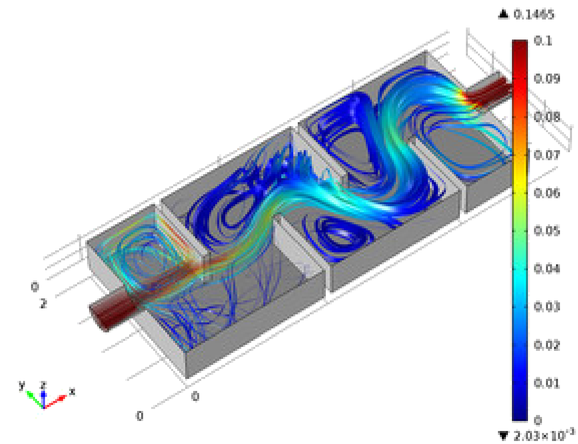
Respuesta:

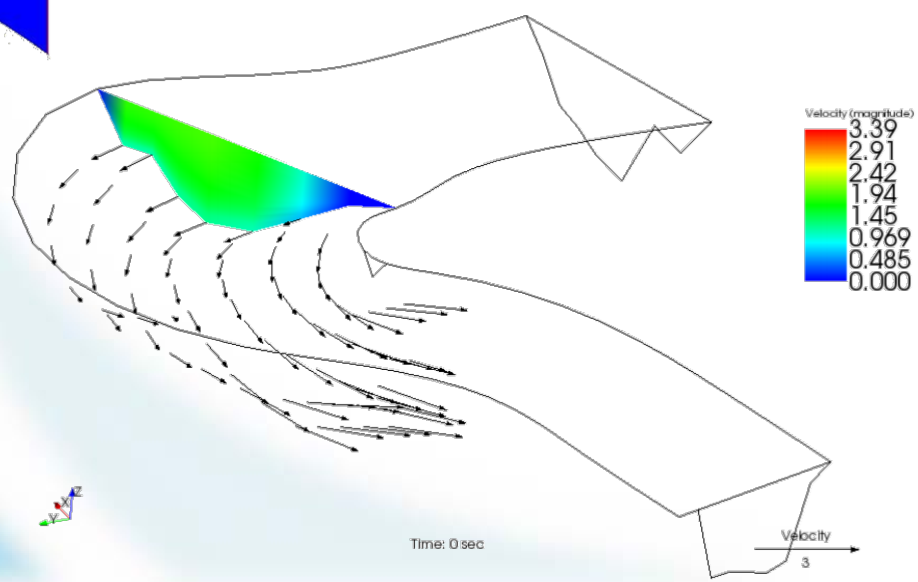
- Variación niveles y velocidades
- Cambio concentraciones

Modelos

¿Que modelar y para qué?







Modelos

Tipo de descripción buscada

- Cualitativa
- Cuantitativa

Tipo de modelo

- Conceptual
- Físico
- Matemático

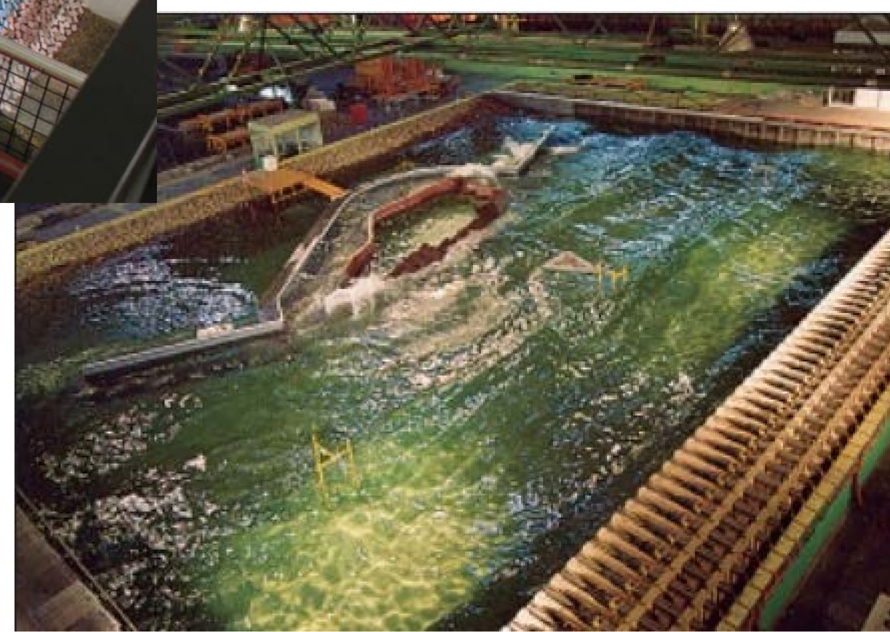
Modelo conceptual:

- Es una descripción del dominio del problema, su dinámica interna y su interacción con el exterior
- Flujo en tramo de canal
  - ¿3D, 2D, 1D??
  - ¿Hasta donde extendemos el dominio?
  - ¿Que condiciones de contorno fijamos?
- Transporte
  - ¿Conservativo, reactivo?
  - ¿Afecta el flujo (cambia la densidad)?
  - ¿1 o más fases?

Modelos

Modelo físico:

Reproducir a escala de laboratorio el fenómeno a estudiar



Modelo matemático:

- Se utiliza un **lenguaje matemático** para describir un sistema

Hay varios tipos:

- analíticos
- análogos
- numéricos

Modelo matemático:

¿Por qué utilizar un **lenguaje matemático** para describir un sistema?

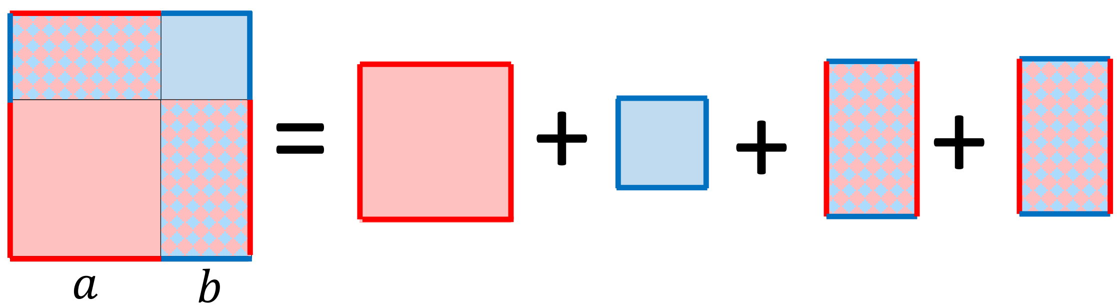
- Es un lenguaje que no permite ambigüedad ni interpretaciones diversas

Símbolos en lenguaje matemático:

- Las matemáticas se ligan a "símbolos raros" que, paradójicamente, son necesarios para expresarlas de forma concisa y sencilla

Modelos

- Euclides (300 a.C.): Si un segmento rectilíneo se corta por un punto arbitrario, el cuadrado del total es igual a los cuadrados de cada uno de los segmentos y el doble del rectángulo cuyos lados son los segmentos.



Con símbolos:

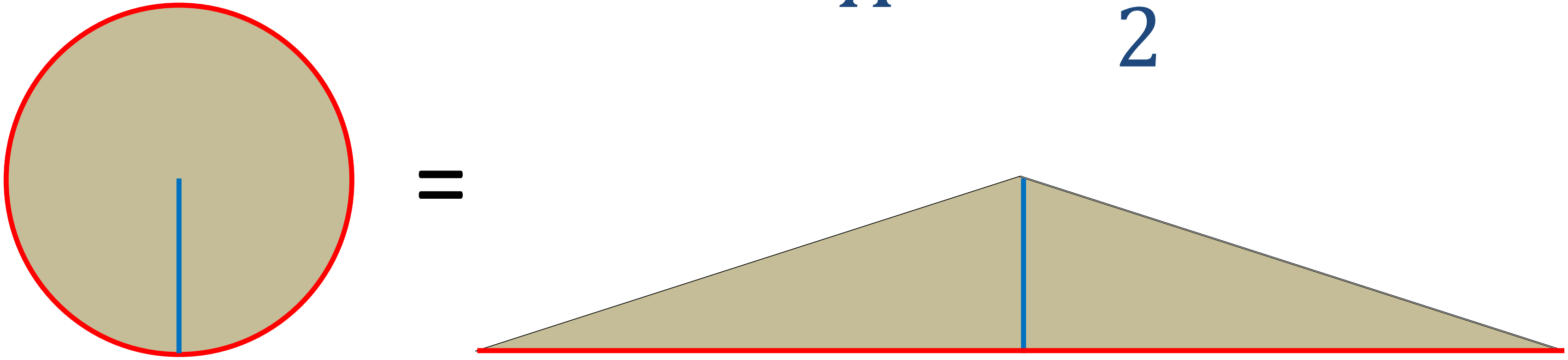
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Modelos

- Arquímedes (225 a.C.): El área de un círculo es igual a la del triangulo cuya base es el perímetro de su circunferencia y la altura es igual al radio

Con símbolos:

$$A = \frac{\pi 2r \cdot r}{2}$$



Modelos

Símbolos en lenguaje matemático:

- Cervantes (1600 d.C.):No hay razonamiento que, aunque sea bueno, siendo largo lo parezca

Repaso Matematicas

Campos

Derivada

Gradiente

Divergencia

Ecuación de balance general

Repaso Matemáticas

Campo:

Función definidas sobre el Espacio Geométrico (EG)

En Física se emplean para definir el estado de un sistema (p. ej., temperatura, presión, tensiones, deformaciones, etc.) o sus propiedades (p. ej., densidad, porosidad o similares)

$$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$$

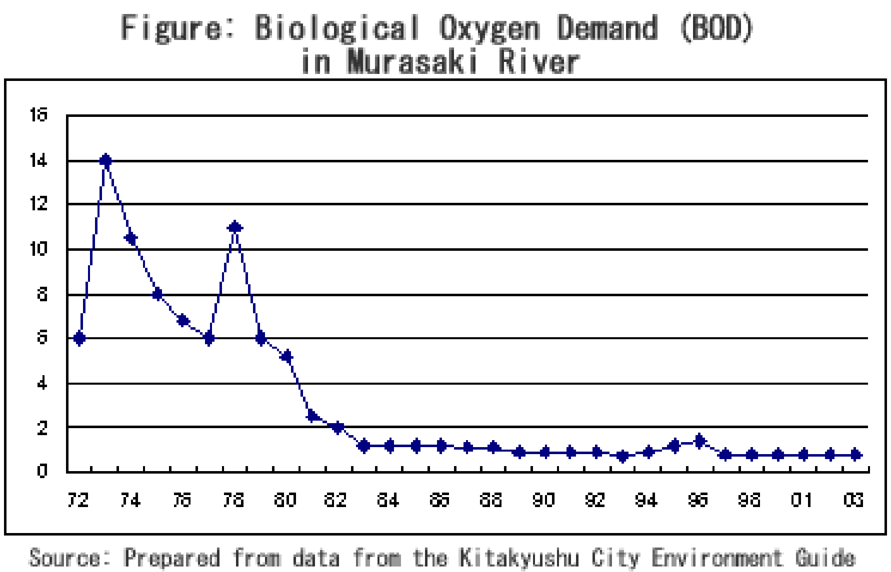
$$d = 1, 2, 3$$

Repaso Matemáticas

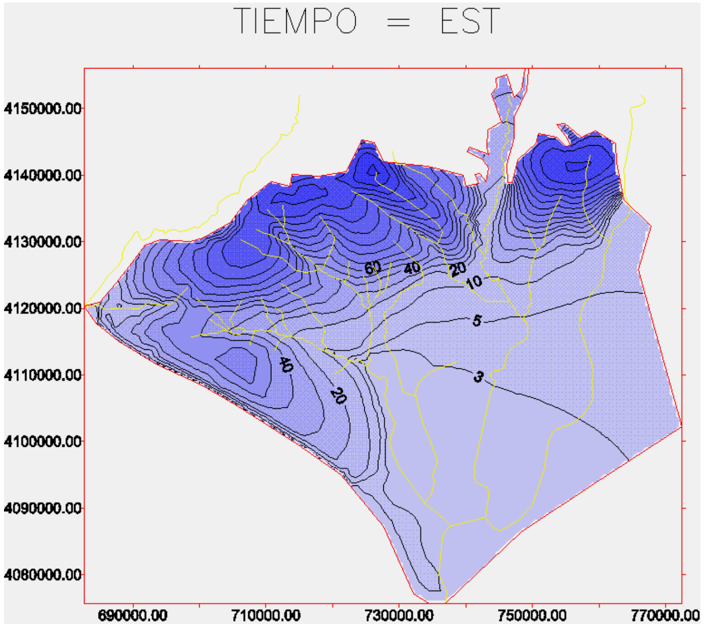
- Campo escalar:

Un campo escalar es una función escalar definida sobre el EG. Por ejemplo, son campos escalares los de temperatura, presiones, viscosidad, etc.

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

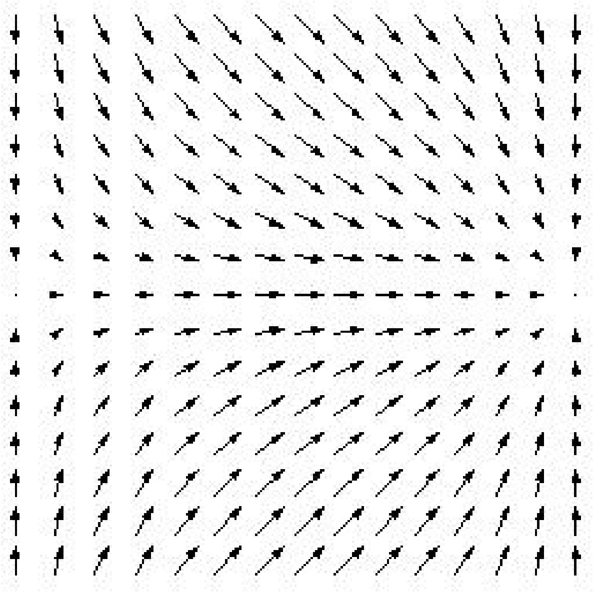
Repaso Matemáticas

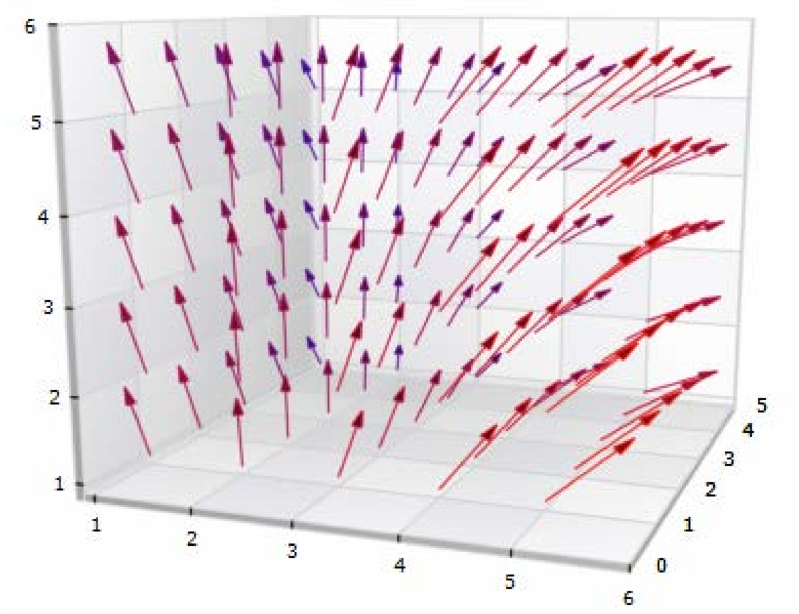
- Campo vectorial:

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Un campo vectorial es una función de igual dimensión que el EG sobre el que está definido

Por ejemplo, son campos vectoriales los flujos de agua, masa o energía, la velocidad de un fluido, el gradiente de un campo escalar, etc.





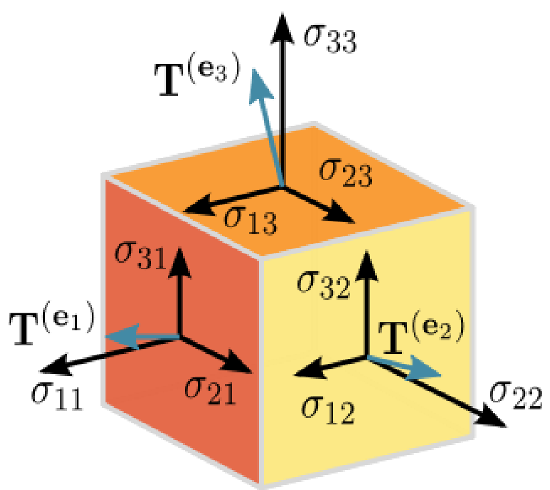
Repaso Matemáticas

- Campo Tensorial:

$$f : \mathbb{R}^{d} \rightarrow \mathbb{R}^{dxd}$$

Un campo tensorial es una función tensorial definida sobre el EG.

Ejemplos de campo tensorial son los de conductividad hidráulica, dispersión, tensiones o deformaciones.



$$\sigma = \left[\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

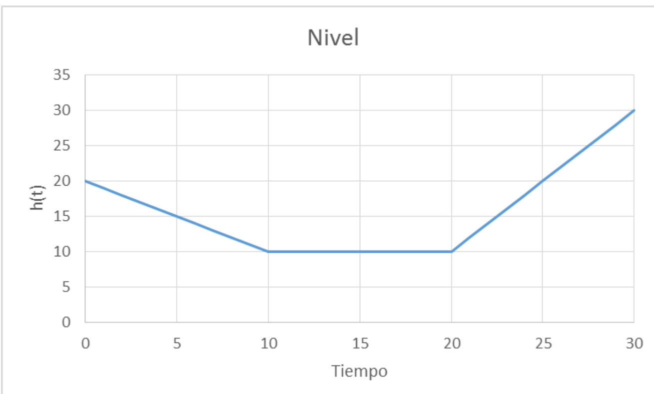
Repaso Matemáticas

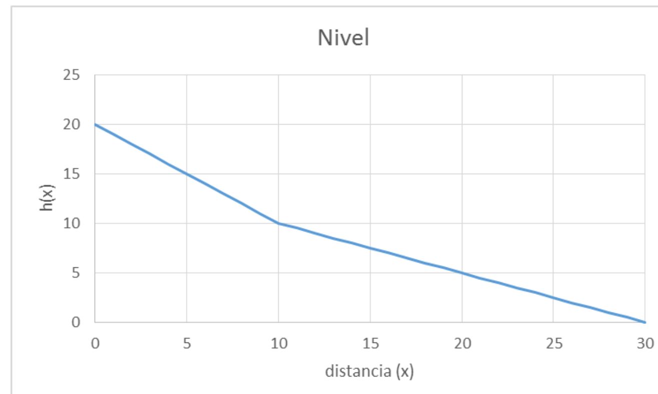
- Derivada

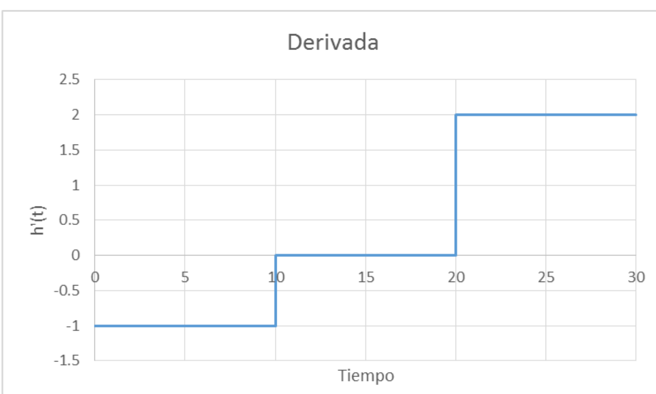
$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$

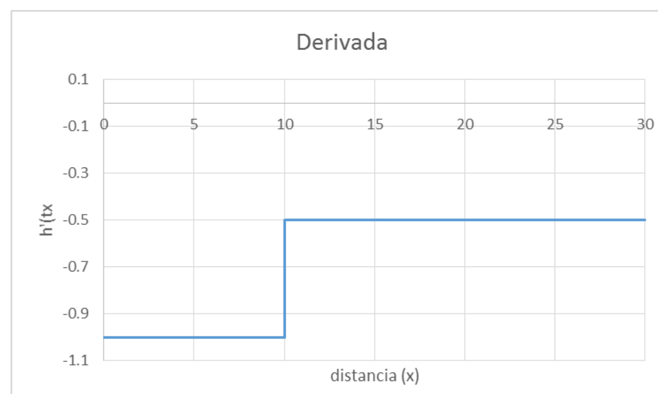
Es un campo escalar

$$f'(t)=\frac{\partial f}{\partial t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$





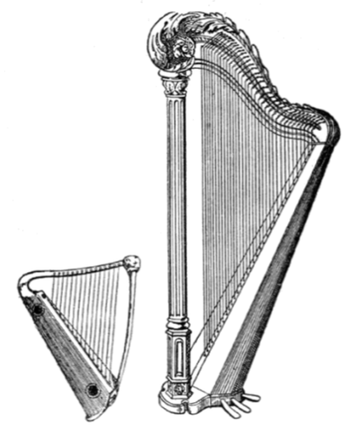




Repaso Matemáticas

- Operador Nabla o diferencial:

$$\nabla$$



(Nabla tiene origen fenicio y significa arpa)

Es un operador vectorial genérico y depende del tipo de campo sobre el que actúa (escalar o vectorial, diferenciable y con continuidad) y la manera en que lo hace.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial / \partial x_1 \\ \partial / \partial x_2 \\ \partial / \partial x_3 \end{pmatrix}$$

Repaso Matemáticas

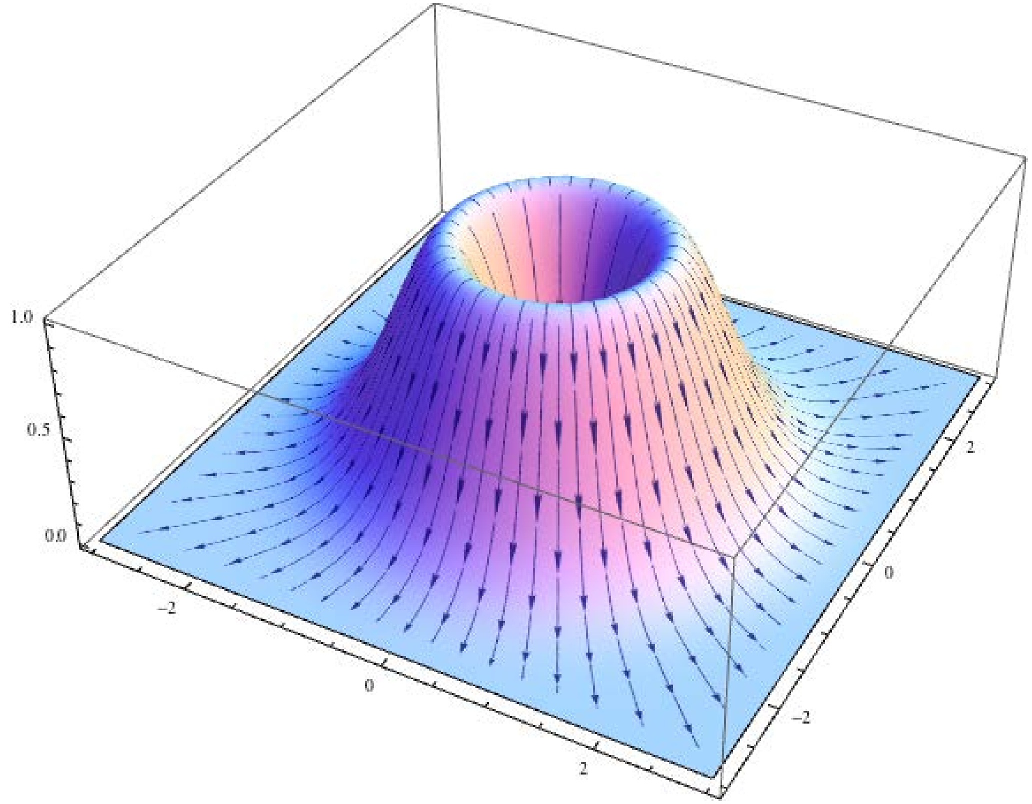
- Gradiente:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$$

Es un operador vectorial que actúa sobre un campo escalar. Por operador vectorial debe entenderse que su resultado es un campo vectorial.

$$\mathbf{grad}\, h = \nabla h = \begin{pmatrix} \partial / \partial x_1 \\ \partial / \partial x_2 \\ \partial / \partial x_3 \end{pmatrix} h$$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \partial h / \partial x_1 \\ \partial h / \partial x_2 \\ \partial h / \partial x_3 \end{pmatrix}$$



Repaso Matemáticas

- Divergencia:

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

La divergencia es un operador escalar definido sobre un campo vectorial **f**.

Se define como el operador nabla operando escalarmente (es decir, como si fuese un producto escalar) sobre **f**.

$$div(\mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

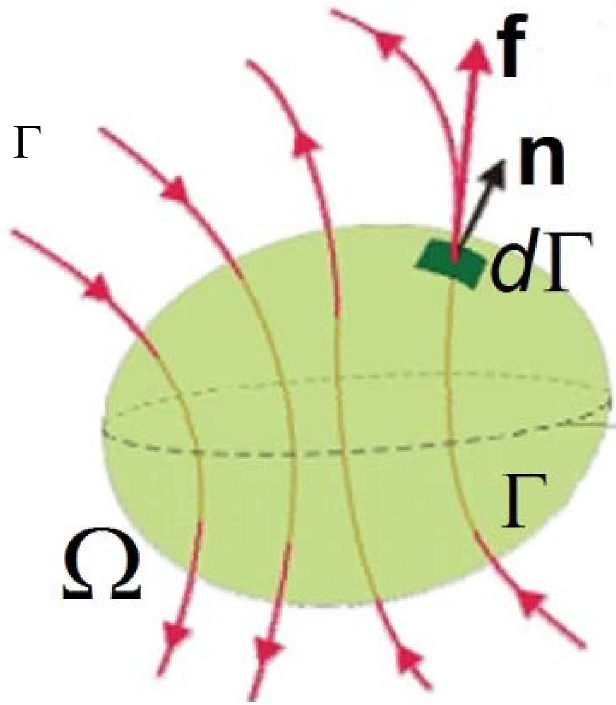
El significado físico no es inmediato, se ilustra mediante el teorema de la divergencia

Repaso Matemáticas

- Flujo por una superficie:

f cantidad por unidad de superficie

f· **n** cantidad por unidad de superficie que atraviesa Γ



Flujo de **f** a través de Γ:
Cantidad total que pasa
(entradas-salidas)

$$F = -\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

- Teorema de la Divergencia:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} \, d\Omega$$

Da sentido físico a la divergencia: “salidas – entradas” del campo **f** en un volumen infinitesimal”

Se emplea mucho para establecer balances

Modelo matemático:

- Se utiliza un **<u>lenguaje matemático</u>** para describir un sistema

Hay varios tipos:

- análogos
- analíticos
- numéricos

Los modelos matemáticos son utilizados para:

- transmisión de conocimiento
- explicar fenómenos
- comprender dinámica de sistemas
- hacer predicciones (soportar tomas de decisión)

Modelos matemáticos analíticos:

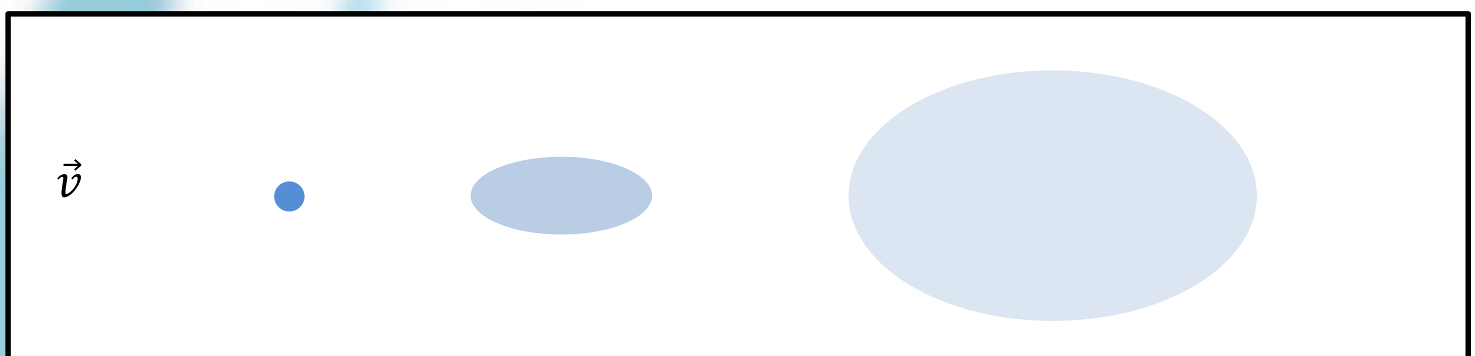
- Soluciones analíticas de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno bajo ciertas hipótesis.
- Para resolverlas se tienen que definir condiciones de contorno y condiciones iniciales si se incluye el tiempo

Modelos matemáticos analíticos

Modelos matemáticos analíticos

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla(\mathbf{D}\nabla c) - \nabla(\mathbf{v}c)$$

El transporte advectivo y difusivo de un pulso tiene solución analítica, pero para un medio infinito



$$c(\mathbf{x},t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2}\sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{(x - v_x t)^2}{4D_x t} - \frac{(y - v_y t)^2}{4D_y t} - \frac{(z - v_z t)^2}{4D_z t} \right)$$

Modelos matemáticos análogos:

Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno en el "modelo" son las mismas que gobiernan el fenómeno en la realidad.

Analogía entre flujo estacionario y electrostática

Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla \cdot \nabla f = 0 \qquad \Delta f = 0$$

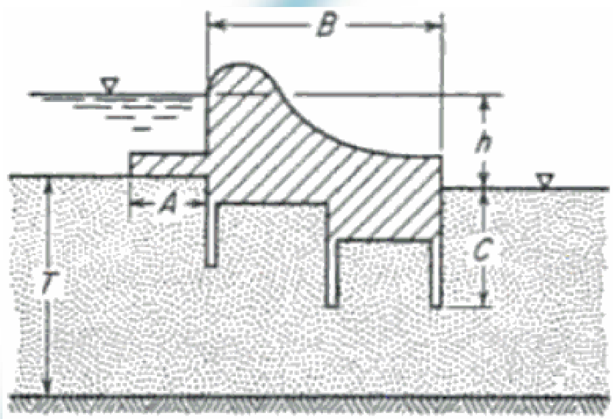
Electrostática

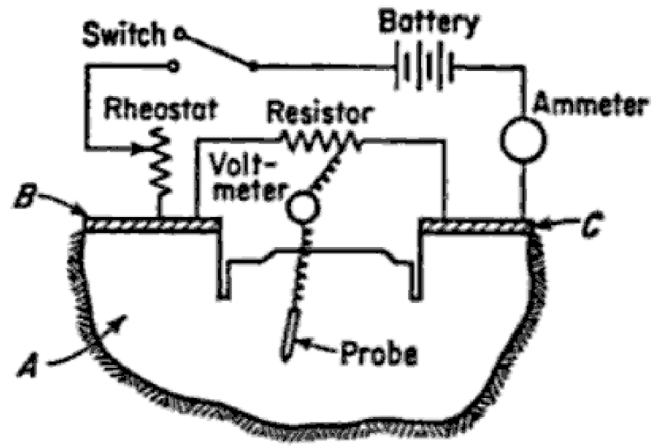
$$\nabla \cdot \nabla \vartheta = 0$$

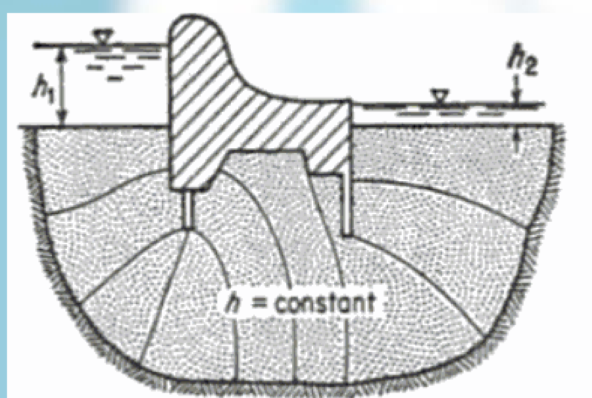
Flujo estacionario en medio poroso o flujo de calor:

$$\nabla \cdot T \nabla h = 0 \xrightarrow[\text{Suponiendo } T \text{ constante}]{} \nabla \cdot \nabla h = 0$$

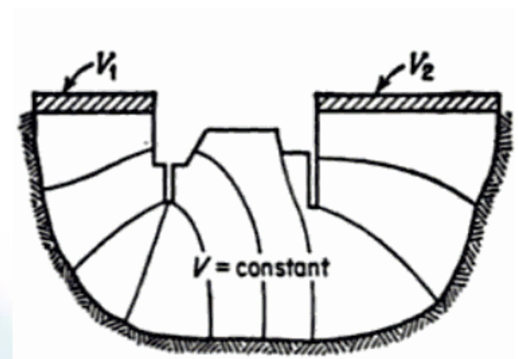
Modelos matemáticos análogos:





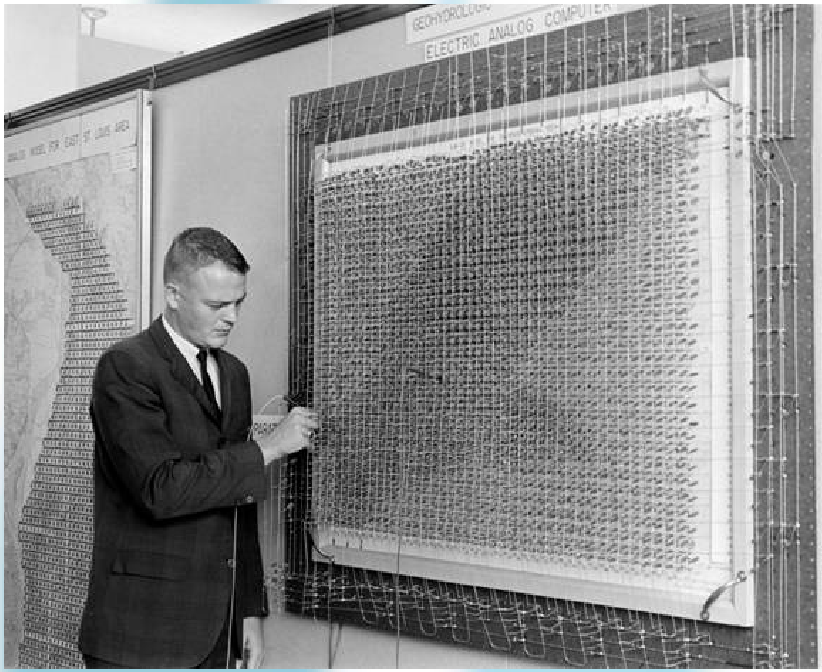


(a)



(b)

Modelos matemáticos análogos:



Modelos matemáticos numéricos:

- Se basan en la discretización de las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan el fenómeno
- Esto da lugar a un sistema lineal (o linealizable) que es resuelto por una computadora
- Dependiendo del método la solución puede ser algún promedio (en nodos, lados o celdas) o un campo