

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

Responsable: Dr. Ing. Pablo Gamazo (Centro Universitario Regional Litoral Norte, Universidad de la República. Uruguay)

Asistente: Ing. Lucas Bessone (Universidad Tecnológica Nacional, Regional Concordia)

4 El proceso de discretización

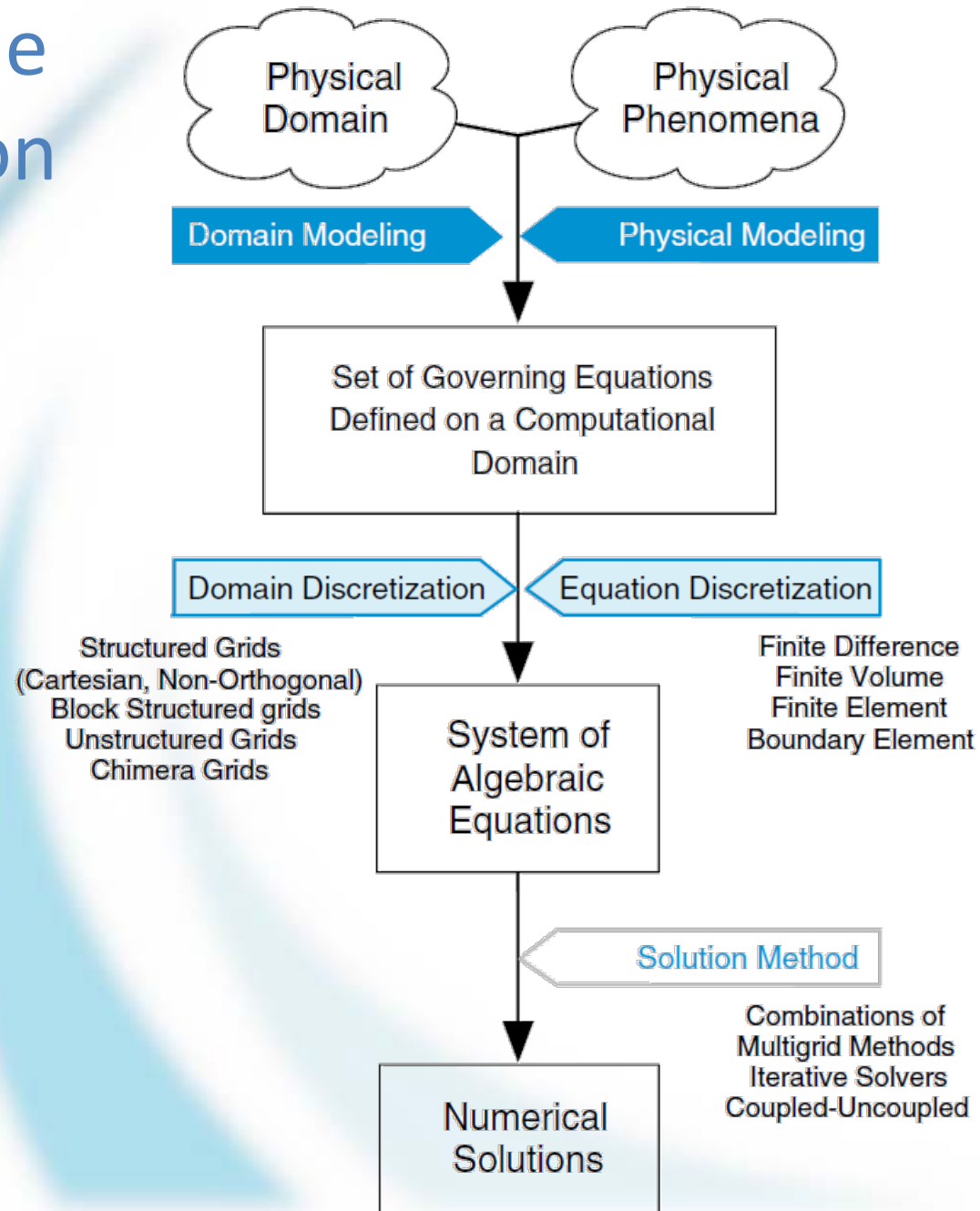
El proceso de discretización

El proceso de discretización consiste en encontrar los valores de la variable dependiente ϕ en una serie de puntos del dominio, ϕ_{dis} .

Estos puntos se denominan elementos o nodos de una malla y son el resultado de la discretización de la geometría original en un conjunto de elementos discretos no superpuestos.

La ecuación diferencial que controla el fenómeno se escribe en función de la variable discretizada, ϕ_{dis} , lo que da lugar a un conjunto sistema de ecuaciones algebraicas que debe ser resuelto.

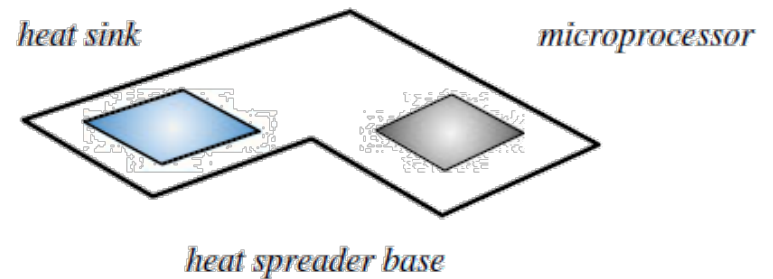
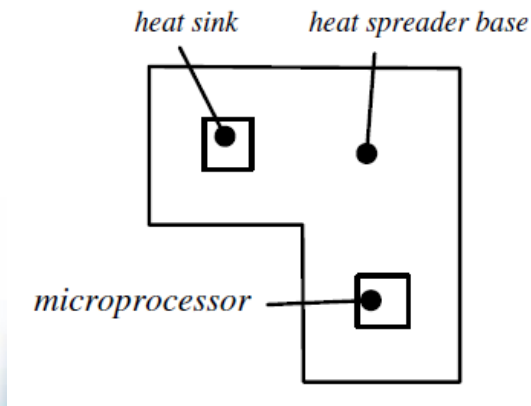
El proceso de discretización



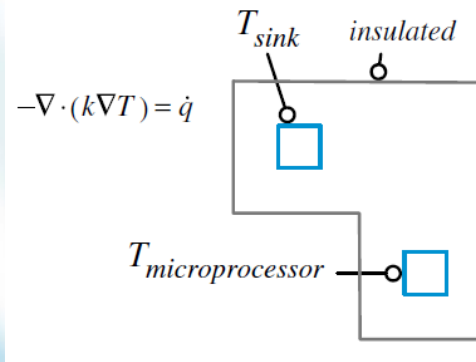
Ejemplo de proceso de discretización

Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un dissipador

Dominio del problema

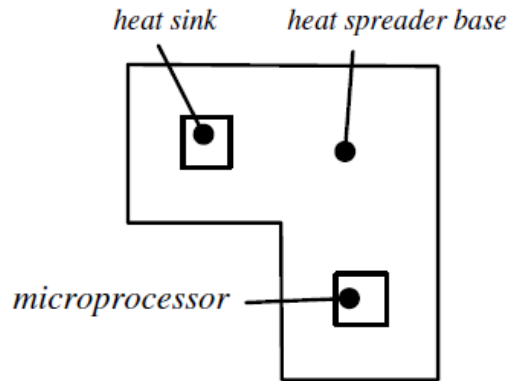


Modelo matemático del problema

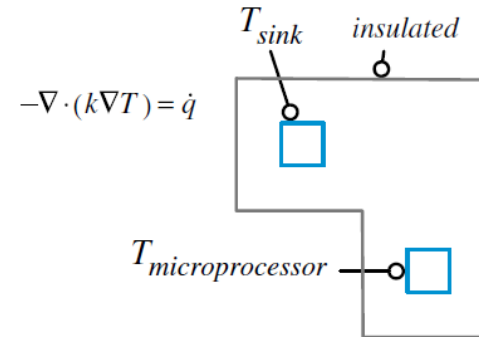


Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un dissipador

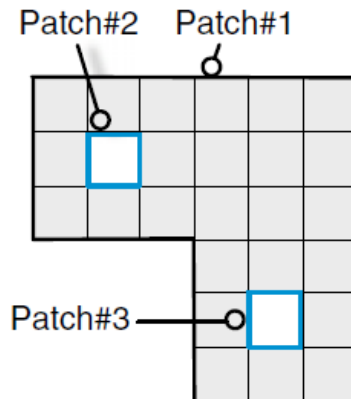
Dominio del problema



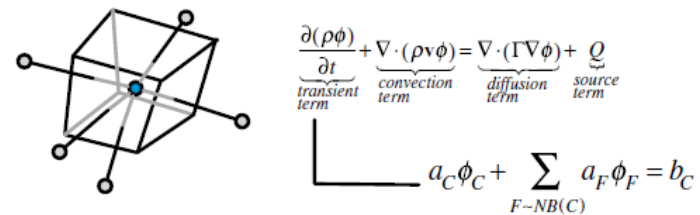
Modelo matemático del problema



Discretización del dominio

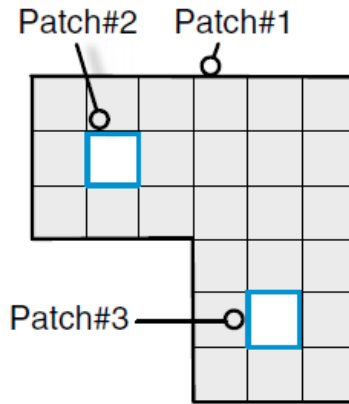


Discretización del modelo matemático

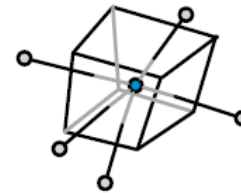


Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Discretización del dominio



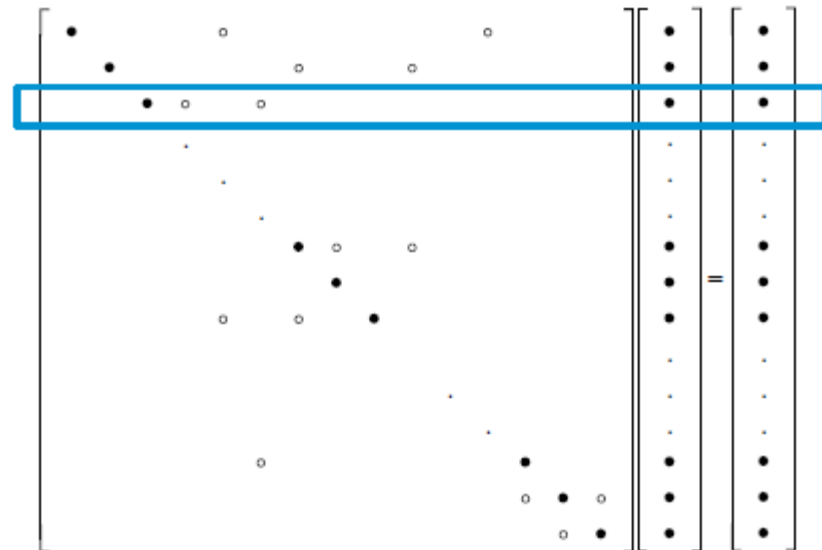
Discretización del modelo matemático



$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{transient term}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi)}_{\text{convection term}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)}_{\text{diffusion term}} + \underbrace{Q}_{\text{source term}}$$

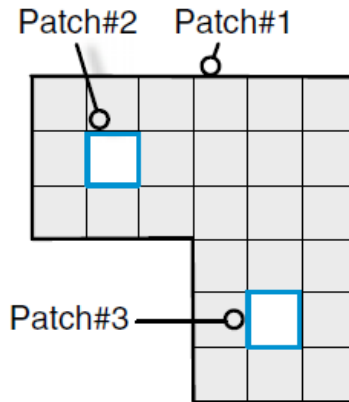
$$a_C\phi_C + \sum_{F \in \text{NB}(C)} a_F\phi_F = b_C$$

Sistema de ecuaciones algebraicas a resolver

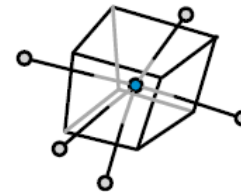


Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un dissipador

Discretización del dominio



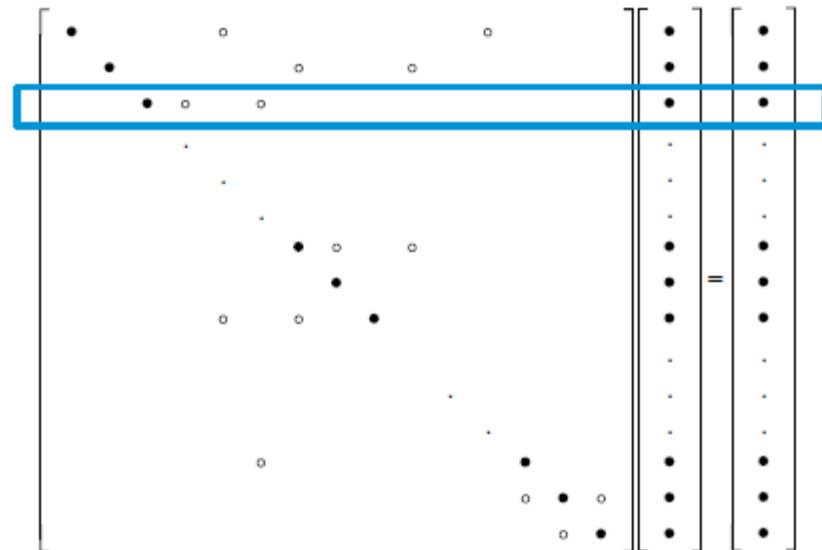
Discretización del modelo matemático



$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{transient term}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi)}_{\text{convection term}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)}_{\text{diffusion term}} + \underbrace{Q}_{\text{source term}}$$

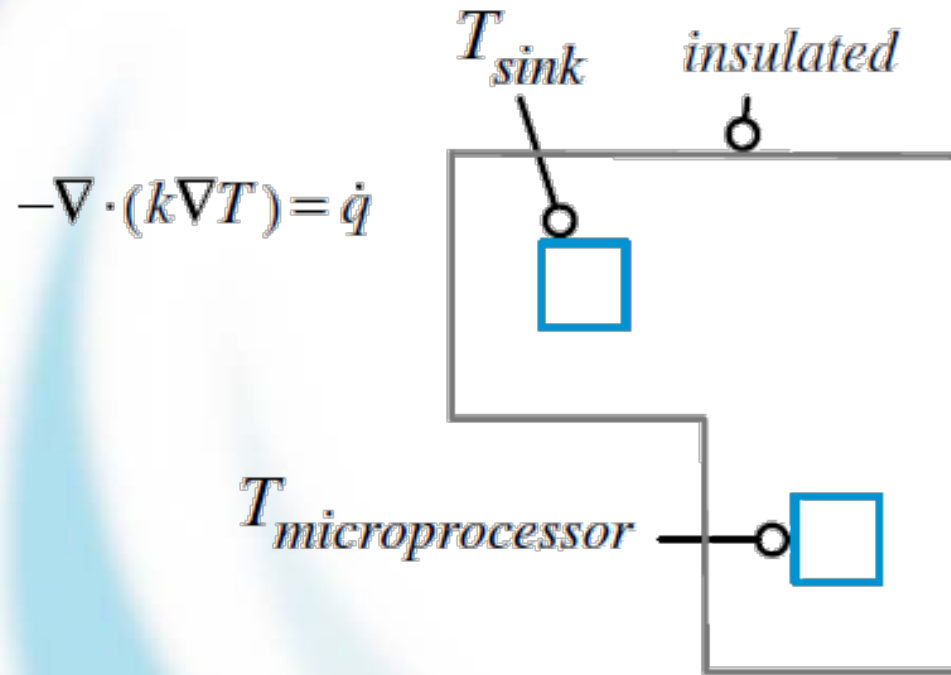
$$a_C\phi_C + \sum_{F \in \text{NB}(C)} a_F\phi_F = b_C$$

Sistema de ecuaciones algebraicas a resolver



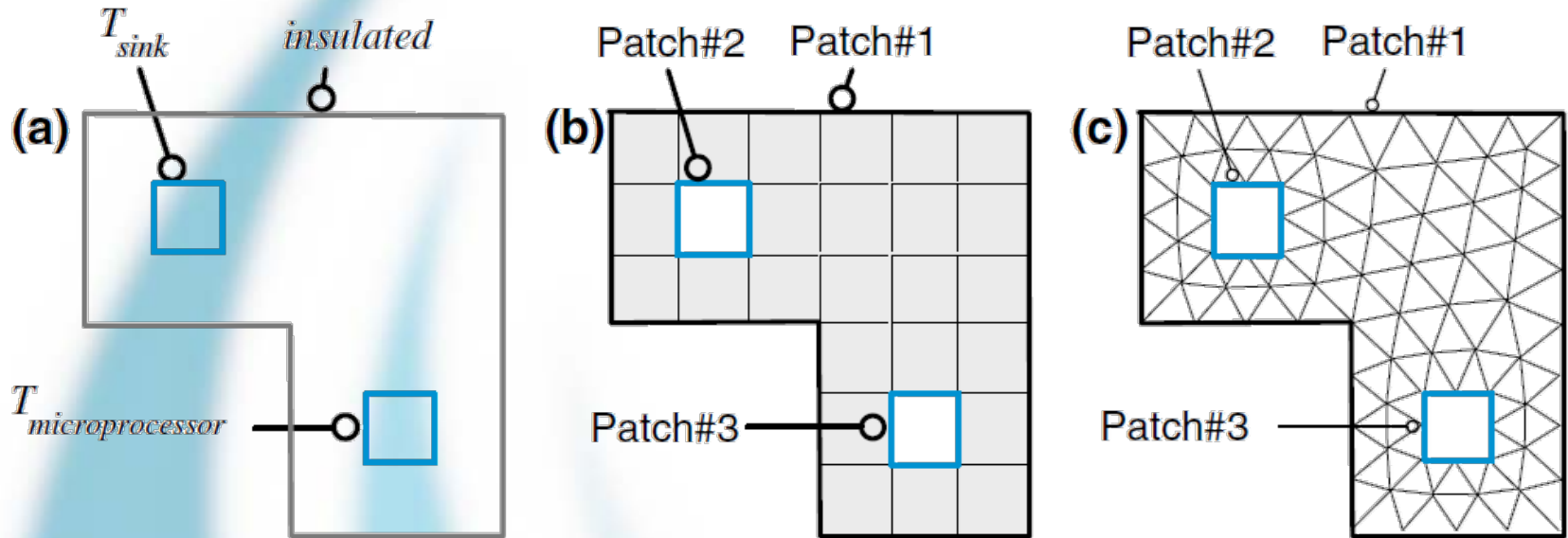
Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Paso 1: Geometría y discretización del dominio



Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Paso 2: Discretización del dominio



Elementos
cuadriláteros

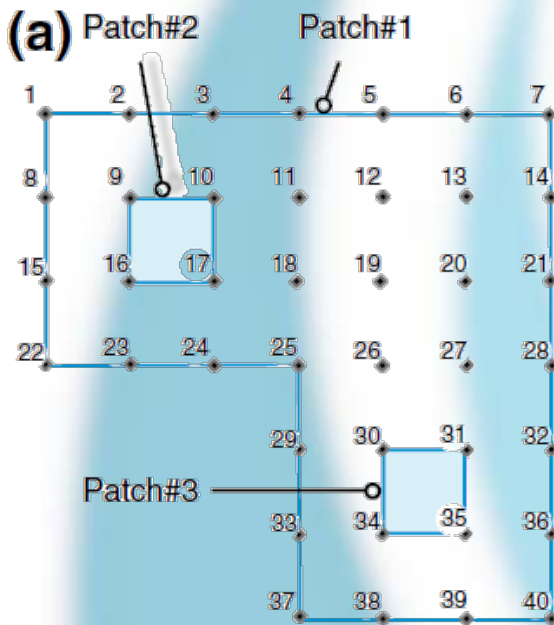
Elementos
triangulares

Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

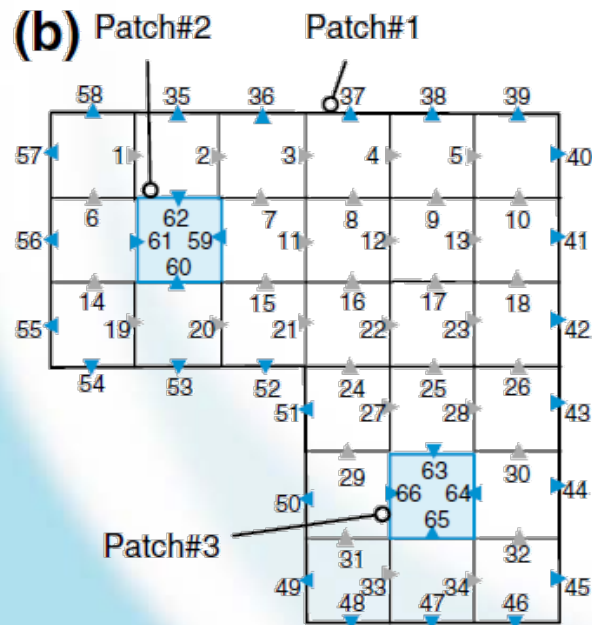
Paso 2: Discretización del dominio

Componentes de la Malla

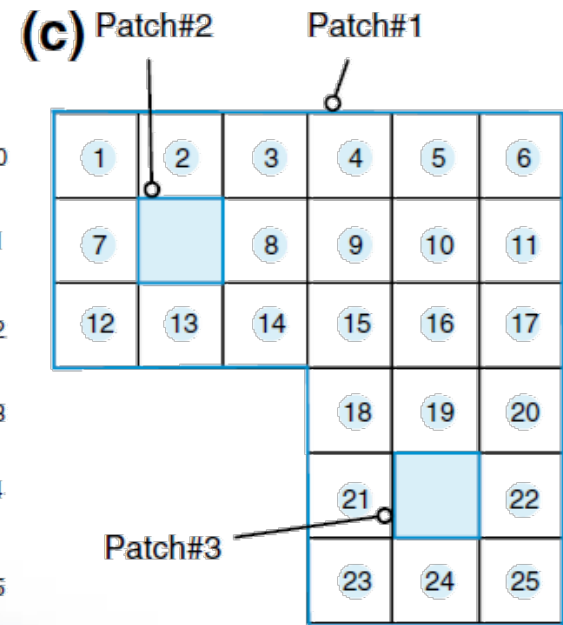
NODOS



LADOS



ELEMENTOS



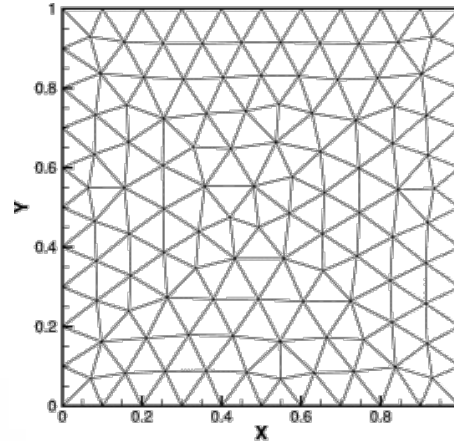
Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Paso 2: Discretización del dominio

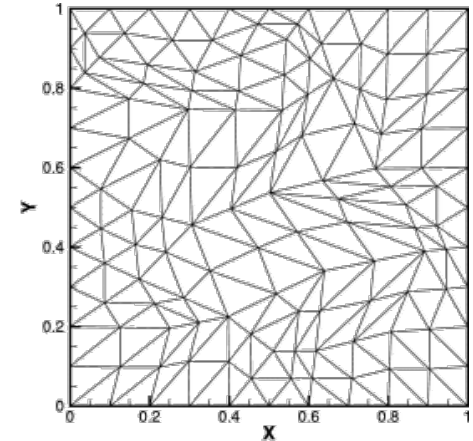
Topología de la malla

En el proceso de generación del sistema de ecuaciones algebraicas, se realiza el balance por elementos y por lo tanto es necesario conocer información local del elemento (nodos, caras, lados, vértices, elementos vecinos)

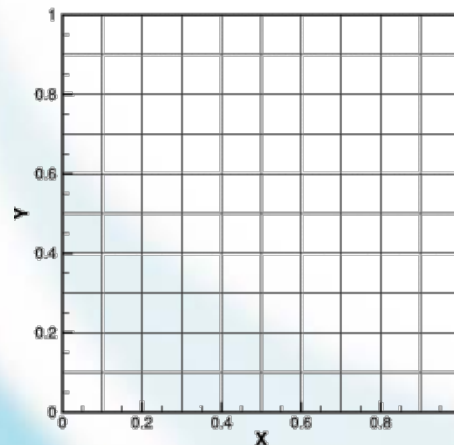
Para mallas cuadriláteras regulares (y algunas irregulares) es posible calcular esta información y no tenerla en una lista



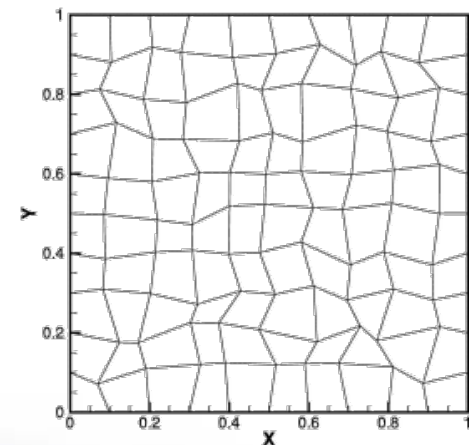
(a) regular triangular mesh



(b) irregular triangular mesh



(c) regular quadrilateral mesh

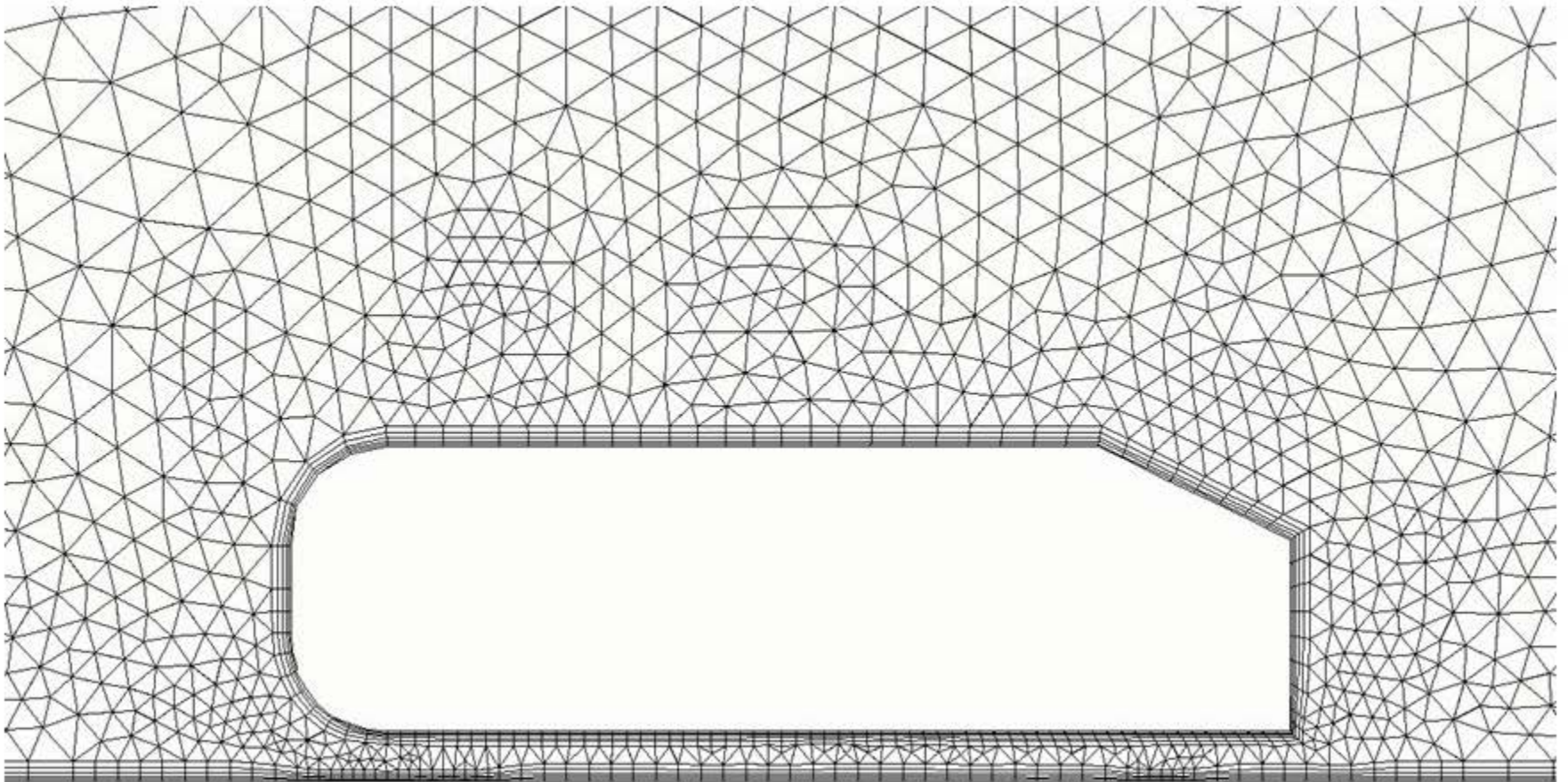


(d) irregular quadrilateral mesh

Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Paso 2: Discretización del dominio

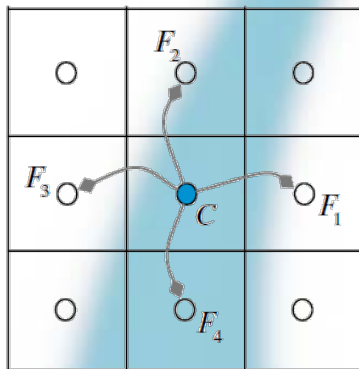
Topología de la malla



Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

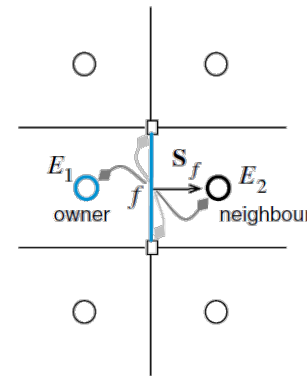
Paso 2: Discretización del dominio

Topología de la malla



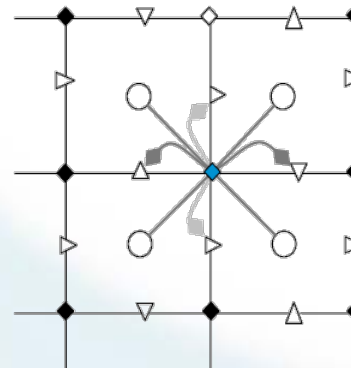
Element 9 Connectivity

Neighbours [10 4 8 15]
Faces [12 8 11 16]
Vertices [19 11 12 18]



Face 12 Connectivity

Element1 9
Element2 10
Vertices [19 12]



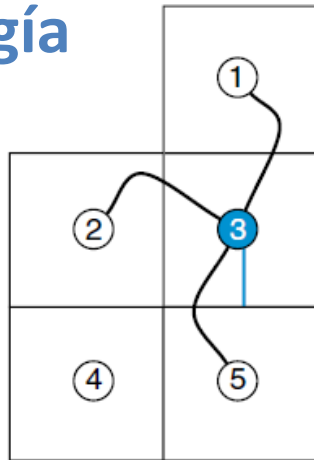
Vertex Connectivity

Elements [...]
Faces [...]

Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un dissipador

Paso 2: Discretización del dominio

Topología de la malla



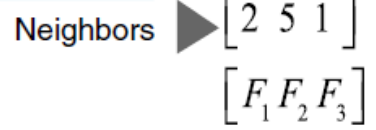
1 local element equation is assemble for element 3

$$a_C T_C + a_{F_1} T_{F_1} + a_{F_2} T_{F_2} + a_{F_3} T_{F_3} = b_C$$

element connectivity is used to transform local indices to global indices

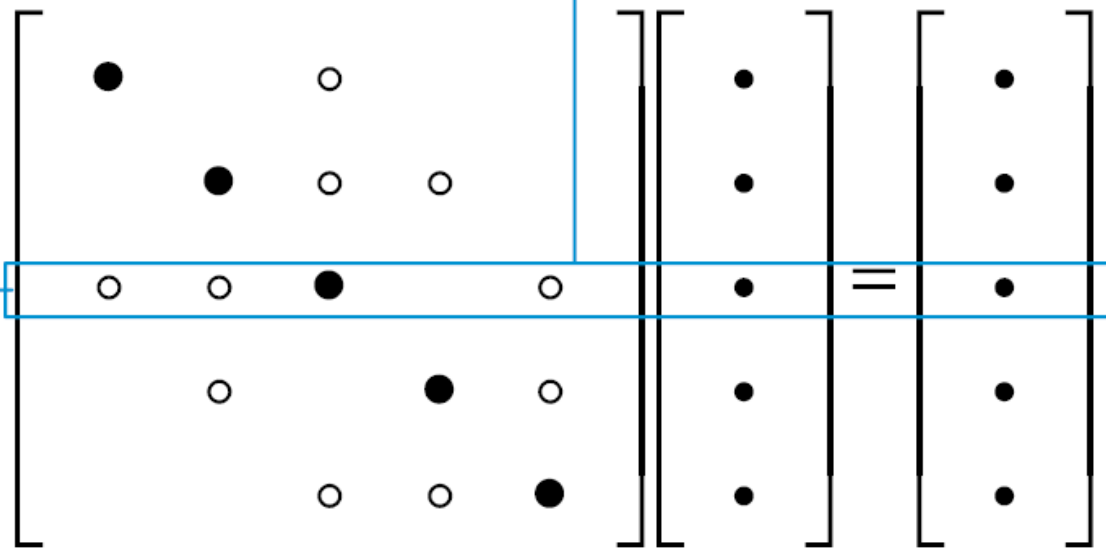
2

Element 3



$$a_{33} T_3 + a_{32} T_2 + a_{35} T_5 + a_{31} T_1 = b_3$$

a_{N_3} a_{N_1} a_C a_{N_2}



element equation is assembled into global matrix

3

Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

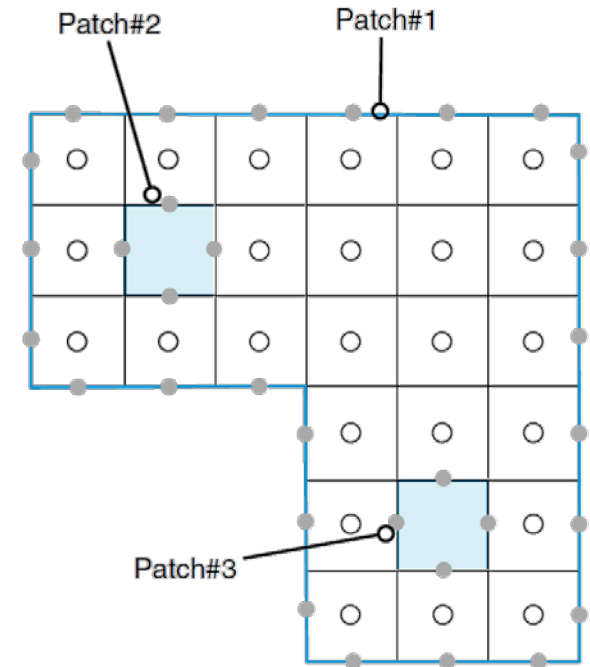
Paso 3: Discretización de la ecuación

Expresar la ecuación diferencial como un balance para todos los elementos de dominio.

Eso da lugar a un conjunto de ecuaciones algebraicas que hay que resolver

$$\mathbf{A}[T] = \mathbf{b}$$

En lugar de conocer el campo continuo de la solución, conozco el valor de la solución en los centros de los elementos.



Element Field

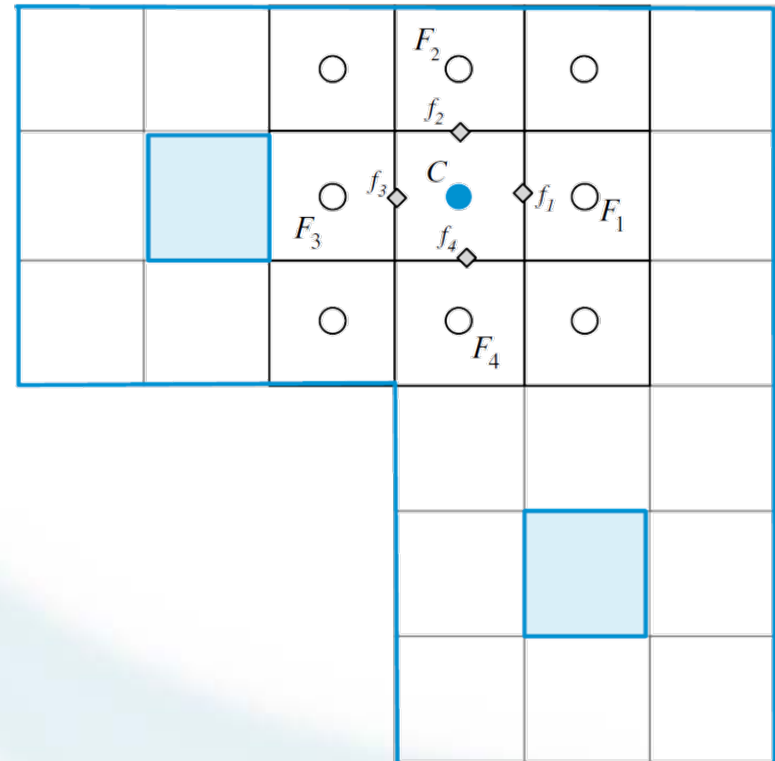
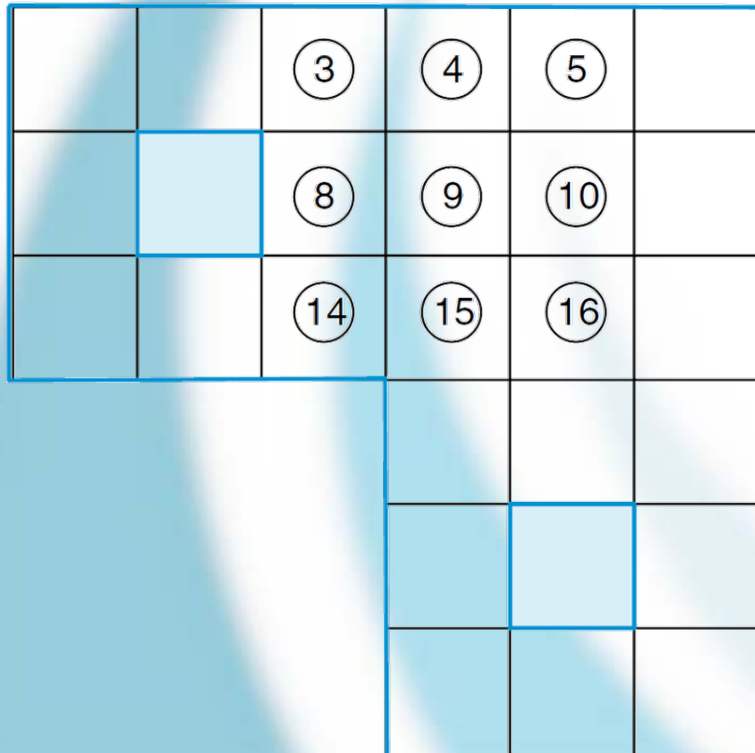
interior	1	2	3			...	25
patch#1	1	2	3	4	...		25
patch#2	1	2	3	4			
patch#3	1	2	3	4			

Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Paso 3: Discretización de la ecuación

Planteamos el balance para la celda 9

$$-\iint_{V_C} \nabla \cdot (k \nabla T) dV = \iint_{V_C} \dot{q} dV$$



Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un dissipador

Paso 3: Discretización de la ecuación

$$-\iint_{V_C} \nabla \cdot (k \nabla T) dV = \iint_{V_C} \dot{q} dV$$



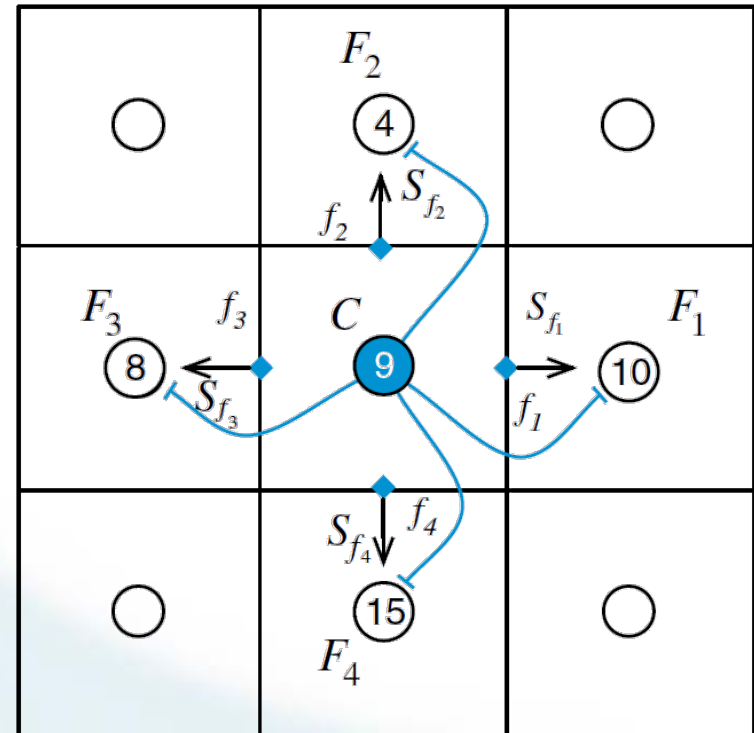
$$-\int_{S_C} (k \nabla T) \cdot d\mathbf{S} = \dot{q}_C V_C$$



$$-\sum_{f \sim nb(C)} (k \nabla T)_f \cdot \mathbf{S}_f = \dot{q}_C V_C$$

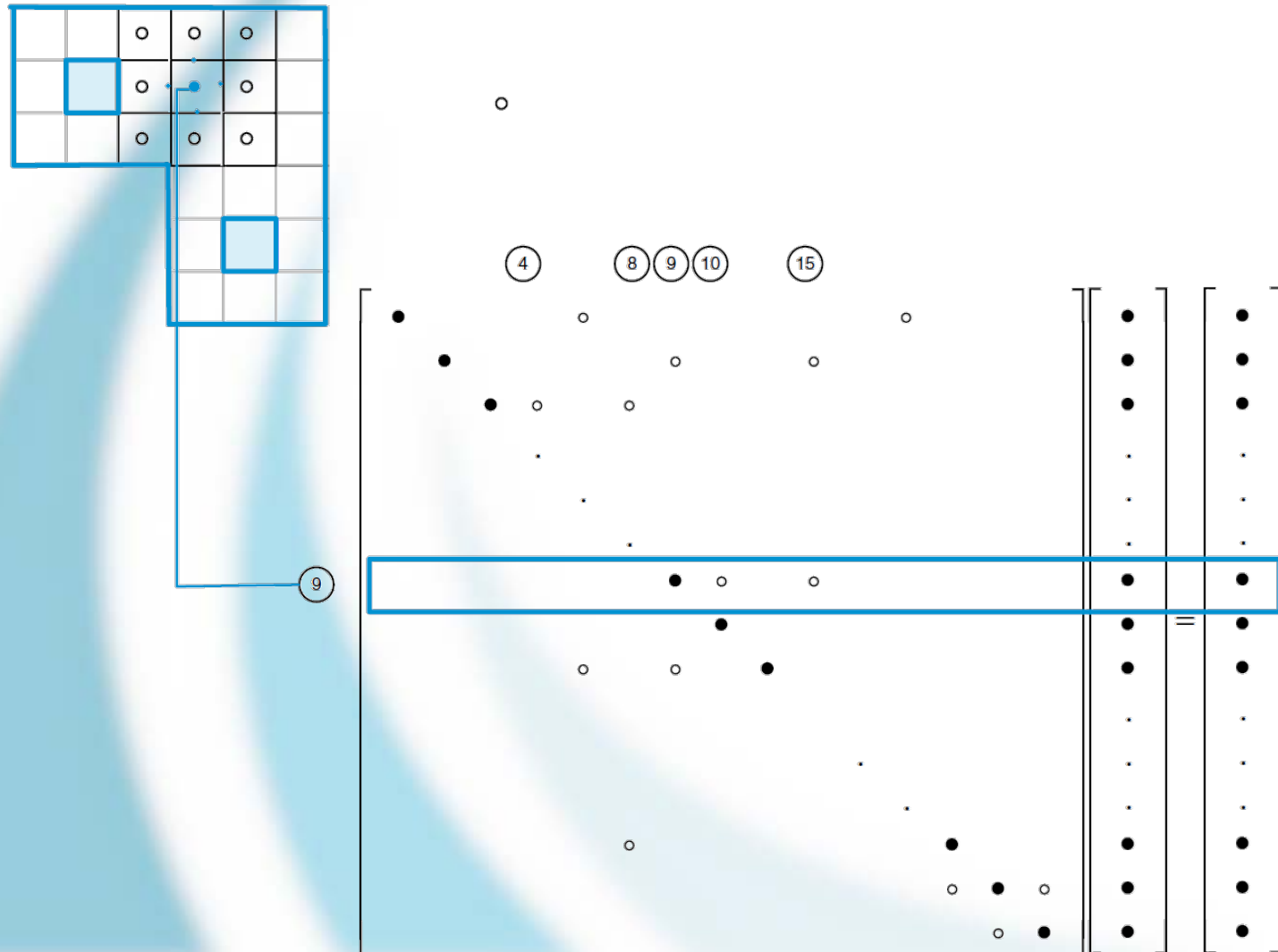


$$a_C T_C + \sum_{F \sim NB(C)} a_F T_F = b_C$$



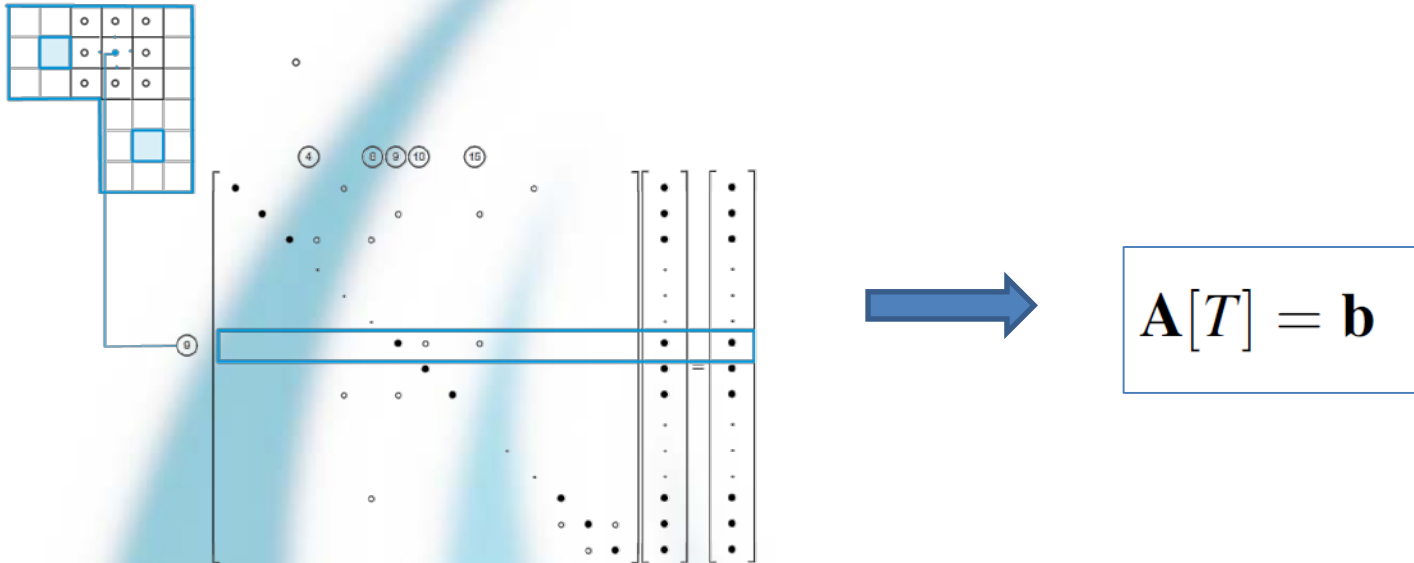
Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un dissipador

Paso 3: Discretización de la ecuación



Transferencia de calor desde un microprocesador a un sumidero de calor a través de un disipador

Paso 4: Solución de la ecuación discretizada



Resolver por método directo

$$[T] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

Es inviable para la mayoría de los casos

O se resuelve numéricamente

