Introducción a la mecánica de fluidos computacional

Flujos incompresibles
Ecuaciones de Navier-Stokes

L. Bessone, P. Gamazo

UTN Concordia
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Concordia
CENUR Litoral Norte
DEPARTAMENTO DEL AGUA
PROGRAMA IBEROAMERICANO
CYTED
CIENCIA Y TECNOLOGÍA PARA EL DESARROLLO
CADING
RED CYTED 516RT0512
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Introducción
Repaso – Teorema del transporte

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{A(t)} \phi\,(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\, dA$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{w}\phi)\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi\, dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{w}\phi)\right] dV$$

Introducción
Repaso – Ecuación general de balance, propiedad intensiva: cantidad de movimiento

$$\rho \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = (u, v, w)$$

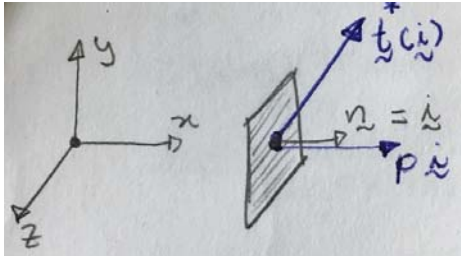
$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\,\boldsymbol{v}\,dV + \int_{V(t)} \rho\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}\,dA = -\int_{A(t)} \boldsymbol{\Gamma}_S\cdot\boldsymbol{n}\,dA + \int_{V(t)} \boldsymbol{\Gamma}_V\,dV$$

Se sabe que el análisis debe cerrar en que la variación de la cantidad de movimiento se balancea con las fuerzas, luego:

$\boldsymbol{\Gamma}_S, \boldsymbol{\Gamma}_V$ deben ser descriptores de las fuerzas que intervienen, además $\boldsymbol{\Gamma}_S$ debe ser un tensor de segundo orden, es decir $\boldsymbol{\Gamma}_S\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ es un vector, en particular $\boldsymbol{\Gamma}_S$ va a ser el tensor de tensiones y $\boldsymbol{\Gamma}_V$ va a representar las fuerzas de volumen

El lado derecho es: el intercambio neto no convectivo superficial y volumétrico respectivamente

Tensor de tensiones



$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = p(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$$

Por ejemplo $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{i}) = p\boldsymbol{i} + \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{i})$

Físicamente, la tensión se descompone en 2 partes, la "presión" y la "tensión extra".

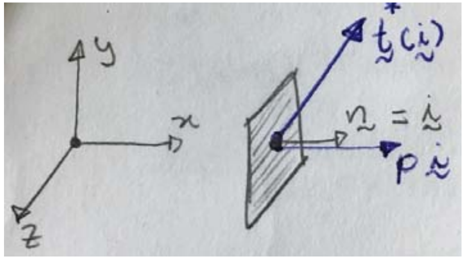
En hidrodinámica cuando hay un flujo, el fluido fricciona sobre la superficie, se produce fricción normal o tangencial que hay que contabilizar, esto es lo que llamamos "tensión extra".

Si proyectamos el vector tensión extra en las 3 direcciones:

$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{i}) = \tau_{xx}\boldsymbol{i} + \tau_{xy}\boldsymbol{j} + \tau_{xz}\boldsymbol{k}$$

Donde la 1er *x* indica que es el plano *x*, se tiene algo análogo para los planos *y, z*

Tensor de tensiones



$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{i}) = \tau_{xx}\boldsymbol{i} + \tau_{xy}\boldsymbol{j} + \tau_{xz}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{j}) = \tau_{yx}\boldsymbol{i} + \tau_{yy}\boldsymbol{j} + \tau_{yz}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{k}) = \tau_{zx}\boldsymbol{i} + \tau_{zy}\boldsymbol{j} + \tau_{zz}\boldsymbol{k}$$

Son tres vectores diferentes que dependen de la dirección de la superficie, y a cada uno hay que sumarle respectivamente: $p\boldsymbol{i},\ p\boldsymbol{j},\ p\boldsymbol{k}$

Premultiplicamos cada ecuación respectivamente por: $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\ , \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{i}) = \tau_{xx}(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + \tau_{xy}(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{j} + \tau_{xz}(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{k} \quad = \boldsymbol{i}\cdot(\tau_{xx}\boldsymbol{ii} + \tau_{xy}\boldsymbol{ij} + \tau_{xz}\boldsymbol{ik})$$
$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{j}) = \tau_{yx}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{i} + \tau_{yy}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + \tau_{yz}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{k} \quad = \boldsymbol{j}\cdot(\tau_{yx}\boldsymbol{ji} + \tau_{yy}\boldsymbol{jj} + \tau_{yz}\boldsymbol{jk})$$
$$\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{k}) = \tau_{zx}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{i} + \tau_{zy}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{j} + \tau_{zz}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \quad = \boldsymbol{k}\cdot(\tau_{zx}\boldsymbol{ki} + \tau_{zy}\boldsymbol{kj} + \tau_{zz}\boldsymbol{kk})$$

Tensor de tensiones

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Entonces para obtener $\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{i})$, se hace $\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{\tau}$

O en general $\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$

La representación va a ser $\boldsymbol{t} = p\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}$, donde $\boldsymbol{T}$ representa el tensor de tensiones totales: $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}$

Se puede probar $\boldsymbol{t}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ y además que $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico (teorema de Cauchy)

Retomamos la ecuación de cantidad de movimiento…

Conservación de la cantidad de movimiento

Considerando un volumen material, esto es: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, el flujo incompresible $\rho \approx const$, y el teorema del transporte:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\, \boldsymbol{v}\, dV + \int_{A(t)} \rho\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot \boldsymbol{n}\, dA = -\int_{A(t)} \boldsymbol{\Gamma}_S \cdot \boldsymbol{n}\, dA + \int_{V(t)} \boldsymbol{\Gamma}_V\, dV$$

$$\int_{V(t)} \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, dV + \int_{A(t)} \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\, dA = -\int_{A(t)} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\, dA + \int_{V(t)} \rho \boldsymbol{g}\, dV$$

aplicando el T.D. en las integrales de superficie:

$$\int_{A(t)} \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\, dA = \int_{A(t)} \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, dA = \int_{V(t)} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\, dV$$

Notar que :$\boldsymbol{\nabla v} = (\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v, \boldsymbol{\nabla} w)^{\mathrm{T}}$

Conservación de la cantidad de movimiento

El 1er término del lado derecho:

$$-\int_{A(t)} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\,dA = -\int_{A(t)} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = -\int_{V(t)} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}\,dV = -\int_{V(t)} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{p} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dV$$

Usando la derivada total $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$ (es una expresión vectorial, no escalar!) y agrupando todas las integrales de volumen en una sola:

$$\int_{V(t)} \left(\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} - \rho\boldsymbol{g}\right) dV = 0$$

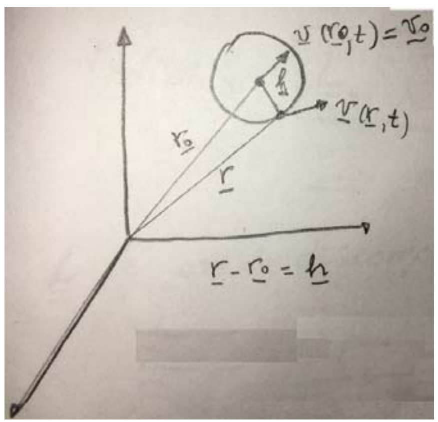
Como el volumen *V(t)* es un volumen arbitrario, el balance se debe cumplir en cualquier volumen elegido recuperamos la forma diferencial:

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}p - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{g}$$

Tensor gradiente de velocidad $\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{g}$

La ecuación de continuidad en forma local en un flujo incompresible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$



Si se aproxima la componente “x” de la velocidad con un desarrollo de Taylor:

$$v_x(\boldsymbol{r},t) = v_x(\boldsymbol{r}_0,t) + \nabla v_x(\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) + O(|h|^2)$$

Análogamente:

$$v_y(\boldsymbol{r},t) = v_y(\boldsymbol{r}_0,t) + \nabla v_y(\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) + O(|h|^2)$$

$$v_z(\boldsymbol{r},t) = v_z(\boldsymbol{r}_0,t) + \nabla v_z(\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) + O(|h|^2)$$

Donde $\nabla v_x(\boldsymbol{r}_0)$ es el gradiente usual de campos escalares

$$\nabla v_x(\boldsymbol{r}_0) = \left.\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right|_{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})=(\boldsymbol{r}_0,t)}$$

Tensor gradiente de velocidad $\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{g}$

Se define el tensor gradiente de velocidad y su traspuesto (considerando *(u,v,w)* como:

$$\nabla \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La expresión “vectorial” de la velocidad con desarrollo de Taylor:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t) + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_0) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) + O(|h|^2)$$

Tensor velocidad de deformación

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{g}$$

El tensor gradiente de velocidad se puede descomponer en uno simétrico y uno antisimétrico:

$$\boldsymbol{L} = (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\gamma}})$$

Tensor vorticidad y tensor velocidad de deformación:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} - (\nabla \boldsymbol{v}) \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} + (\nabla \boldsymbol{v})$$

Recordando que el tensor de tensiones viscosas es simétrico $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}$, se puede probar que debe depender de un tensor simétrico y no de un antisimétrico, es decir no puede depender de $\boldsymbol{\Omega}$ pues no cumpliría con la condición de simetría. $\boldsymbol{\tau}$ será función de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ para fluidos newtonianos incompresibles: $\boldsymbol{\tau} = -\mu\, \dot{\boldsymbol{\gamma}}$

El gradiente del tensor de tensiones para el caso de viscosidad constante:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\mu\, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = -\mu \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right)$$

Además si se considera la incompresibilidad se puede probar que:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mu \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right) = -\mu \nabla^2 \boldsymbol{v}$$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right) = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{g}$$

Ecuaciones de Navier Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{g}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho|\boldsymbol{g}|$$

Solución numérica. Intro: caso 1D

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho \mathbf{v}] + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \left\{\mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right]\right\} + \mathbf{f}_b$$

Consideramos el caso 1D en estado estacionario:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Solución numérica.
Intro: caso 1D
Ecuación de cantidad de movimiento:

Aplicamos FVM:

$$\int_{V_C} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dV = \int_{V_C} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) dV - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

Teorema de Gauss:

$$\int_{\partial V_C} (\rho u u) dy = \int_{\partial V_C} \mu \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

T. V. Medio:

$$\underbrace{(\rho u \Delta y)_e}_{\dot{m}_e} u_e + \underbrace{-(\rho u \Delta y)_w}_{\dot{m}_w} u_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_e - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_w - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

Solución numérica.
Intro: caso 1D
Ecuación de cantidad de movimiento:

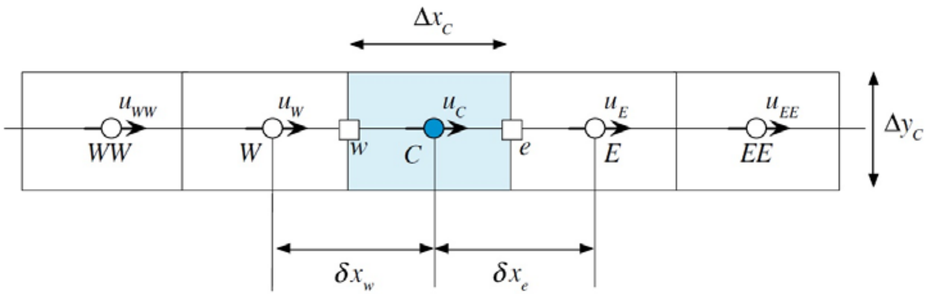
$$\int_{V_C} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dV = \int_{V_C} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) dV - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$\int_{\partial V_C} (\rho u u) dy = \int_{\partial V_C} \mu \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$\underbrace{(\rho u \Delta y)_e}_{\dot{m}_e} u_e + \underbrace{-(\rho u \Delta y)_w}_{\dot{m}_w} u_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_e - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_w - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$\boxed{\underbrace{\dot{m}_e u_e + \dot{m}_w u_w}_{Convection} - \underbrace{\left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_e - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_w\right]}_{Diffusion} = - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV}$$

Solución numérica.
Intro: caso 1D
Ecuación de cantidad de movimiento:



$$\underbrace{\dot{m}_e u_e + \dot{m}_w u_w}_{\text{Convection}} - \underbrace{\left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_e - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right)_w\right]}_{\text{Diffusion}} = -\int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

En forma mas compacta: $$a_C^u u_C + \sum_{F \sim NB(C)} \left(a_F^u u_F\right) = b_C^u - \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

Solución numérica.
Intro: caso 1D
Ecuación de continuidad:

Aplicamos FVM: $$\int_{V_C} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dV = 0$$

T. V. Medio: $$\sum_{f\sim nb(C)} (\rho u \Delta y)_f = (\rho u \Delta y)_e - (\rho u \Delta y)_w = 0$$

$$\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}_f = \dot{m}_e + \dot{m}_w = 0$$

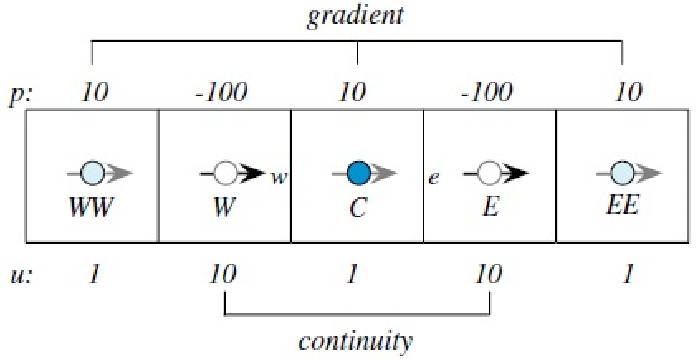
Término de presión en Ec. de momentum

$$\int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_C V_C \quad \Rightarrow \quad \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \frac{p_E - p_W}{2\Delta x} V_C = (p_e - p_w)\frac{V_C}{\Delta x} \qquad (15.20)$$

$$\int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \int_{\partial V_C} p\, dy \quad \Rightarrow \quad \int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left[\frac{1}{2}(p_E + p_C) - \frac{1}{2}(p_C + p_W)\right] \frac{V_C}{\Delta x} = \frac{p_E - p_W}{2\Delta x} V_C$$

Problemas de checkerboard

Observemos que para ecuación de continuidad, la conservación se fuerza para celdas alternadas, esto permite oscilaciones no físicas en la solución, lo mismo ocurre con el cálculo de los gradientes de presión:



$$\int_{V_W} \frac{\partial u}{\partial x} dV = (u_C - u_{WW})\frac{V_W}{2\Delta x_W} = (1-1)\frac{V_W}{2\Delta x_W} = 0$$

$$\int_{V_C} \frac{\partial u}{\partial x} dV = (u_E - u_W)\frac{V_C}{2\Delta x_C} = (10-10)\frac{V_C}{2\Delta x_C} = 0$$

$$\int_{V_E} \frac{\partial u}{\partial x} dV = (u_{EE} - u_C)\frac{V_E}{2\Delta x_E} = (1-1)\frac{V_E}{2\Delta x_E} = 0$$

$$\int_{V_W} \frac{\partial p}{\partial x} dV = (p_C - p_{WW})\frac{V_W}{2\Delta x_W} = (10-10)\frac{V_W}{2\Delta x_W} = 0$$

$$\int_{V_C} \frac{\partial p}{\partial x} dV = (p_E - p_W)\frac{V_C}{2\Delta x_C} = (-100+100)\frac{V_C}{2\Delta x_C} = 0$$

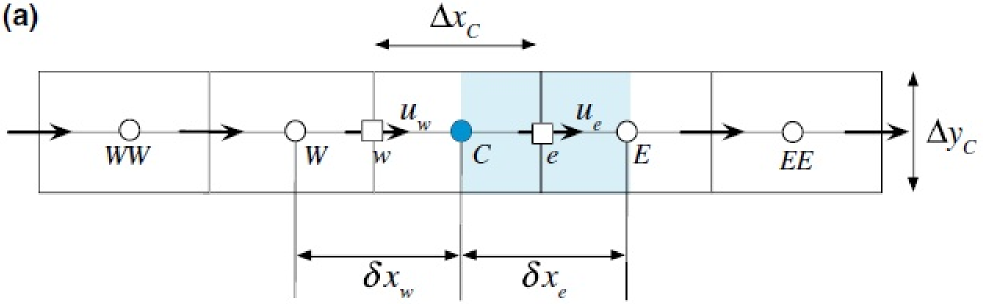
$$\int_{V_E} \frac{\partial p}{\partial x} dV = (p_{EE} - p_C)\frac{V_E}{2\Delta x_E} = (10-10)\frac{V_E}{2\Delta x_E} = 0$$

Solución:
uso de grillas staggered (desparramadas)

$$a_e^u u_e + \sum_{f\sim NB(e)} a_f^u u_f = b_e^u - V_e(\nabla p)_e = b_e^u - V_e \frac{p_E - p_C}{\delta x_e}$$

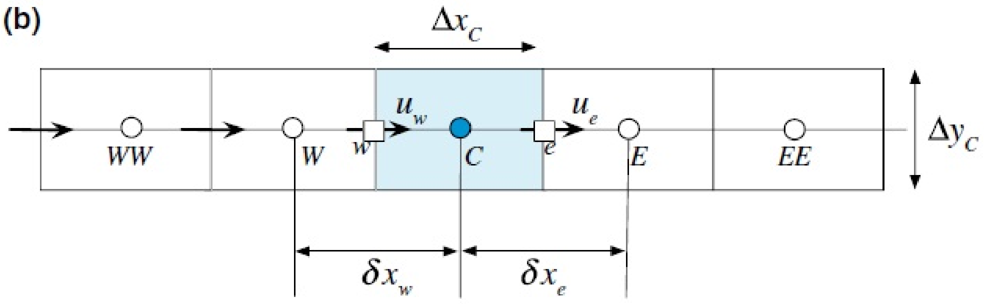
Cant. Movimiento centrada en centros de caras:

(a)



Continuidad centrada en centros de celda:

(b)



$$\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}_f = \dot{m}_e + \dot{m}_w = 0 \quad \text{or} \quad u_e - u_w = 0$$

Algoritmo SIMPLE
Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation
En mallas desparramadas

$$\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}_f = 0$$

El método parte en abordar la no linealidad de forma iterativa:

$$a_e^u u_e + \sum_{f\sim NB(e)} a_f^u u_f = b_e^u - V_e \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e$$

$$\boxed{a_e^u u_e^* + \sum_{f\sim NB(e)} a_f^u u_f^* = b_e^u - V_e \left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x}\right)_e}$$

Luego se expresa la solución como el valor de la iteración mas una corrección:

$$u = u^* + u'$$
$$p = p^* + p'$$

$$\dot{m}_f = \dot{m}_f^* + \rho u' S_f^x$$
$$= \dot{m}_f^* + m_f'$$

Algoritmo SIMPLE
Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation
En mallas desparramadas

Reescribimos la ecuación de otra manera mas compacta:

$$u_e + H_e(u) = B_e^u - D_e^u \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e$$

$$H_e(u) = \sum_{f \sim NB(e)} \frac{a_f^u}{a_e^u} u_f \quad B_e^u = \frac{b_e^u}{a_e^u} \quad \text{and} \quad D_e^u = \frac{V_e}{a_e^u}$$

Solución en iteración actual: $$u_e^* + H_e(u^*) = B_e^u - D_e^u \left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x}\right)_e$$

El paso clave es plantear ahora la corrección de velocidad y reemplazarla en la ecuación de continuidad:

$$u_e' + \underline{H_e(u')} = -D_e^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_e \qquad u_w' + \underline{H_w(u')} = -D_w^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_w$$

$$\rho_e u_e' \Delta y_e + (-\rho_w u_w' \Delta y_w) = -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*)$$

$$\rho_e \left[-H_e(u') - D_e^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_e\right] \Delta y_e - \rho_w \left[-H_w(u') - D_w^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_w\right] \Delta y_w = -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*)$$

Algoritmo SIMPLE
Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation
En mallas desparramadas

Notemos que al converger el método *u', p'* y *mf'* (las correcciones) deben tender a 0:

$$u = u^* + u' \qquad \dot{m}_f = \dot{m}_f^* + \rho u' S_f^x$$

$$p = p^* + p' \qquad \quad = \dot{m}_f^* + m_f'$$

Esto nos permite despreciar algunos términos:

$$u_e' + \cancel{H_e(u')} = -D_e^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_e \qquad u_w' + \cancel{H_w(u')} = -D_w^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_w$$

$$\rho_e u_e' \Delta y_e + (-\rho_w u_w' \Delta y_w) = -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*)$$

$$\rho_e \left[-\cancel{H_e(u')} - D_e^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_e\right] \Delta y_e - \rho_w \left[-\cancel{H_w(u')} - D_w^u \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_w\right] \Delta y_w = -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*)$$

Nos queda una ecuación para calcular la corrección que debe hacerse a la presión!!

Algoritmo SIMPLE
Ecuación de corrección para la presión

$$\rho_e\left[\cancel{-H_e(u')} - D_e^u\left(\frac{p'_E - p'_C}{\Delta x}\right)_e\right]\Delta y_e + \rho_w\left[\cancel{-H_w(u')} - D_w^u\left(\frac{p'_C - p'_W}{\Delta x}\right)_w\right](-\Delta y_w) = -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*)$$

$$\Rightarrow \quad -\rho_e D_e^u\left(\frac{\Delta y_w}{\Delta x_w}\right)(p'_E - p'_C) - \rho_w D_w^u\left(-\frac{\Delta y_w}{\Delta x_w}\right)(p'_C - p'_W)$$
$$= -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*) + (\cancel{\rho_e H_e(u')\Delta y_e} + \cancel{\rho_w H_w(u')(-\Delta y_w)})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_C^{p'} p'_C + a_E^{p'} p'_E + a_W^{p'} p'_W = b_C^{p'}}$$

Algoritmo SIMPLE
Ecuación de corrección para la presión

El algoritmo SIMPLE consiste en despreciar esos términos. A partir de aquí surgen diferentes variantes (SIMPLEC, PRIME, PISO, etc), los cuales consisten en aproximar el término que se está despreciando (*H(u')*).

$$a_C^{p'} p'_C + a_E^{p'} p'_E + a_W^{p'} p'_W = b_C^{p'}$$

$$\left[\begin{aligned} a_E^{p'} &= -\frac{\rho_e D_e^u \Delta y_e}{\delta x_e} \\ a_W^{p'} &= -\frac{\rho_w D_w^u \Delta y_w}{\delta x_w} \\ a_C^{p'} &= -\left(a_E^{p'} + a_W^{p'}\right) \\ b_C^{p'} &= -\left(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^*\right) + \cancel{\underline{\left[\rho_e \Delta y_e H_e(u') - \rho_w \Delta y_w H_w(u')\right]}} \end{aligned}\right.$$

Uso de mallas colocadas
Interpolación de Rhie-Chow

Si usamos grillas “colocadas” (centradas en celdas, ambos: velocidad y presión), para evitar el problema checkerboard se usa la interpolación de **Rhie-Chow** para las velocidades en caras

$$u_f = \underbrace{\overline{u_f}}_{\substack{\text{average}\\ \text{velocity}}} - \underbrace{\overline{D_f^u}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_f - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_f}\right)}_{\text{correction term}}$$

$$v_f = \overline{v_f} - \overline{D_f^v}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_f - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_f}\right)$$

$$w_f = \overline{w_f} - \overline{D_f^w}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_f - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_f}\right)$$

$$\mathbf{v}_f = \overline{\mathbf{v}_f} - \overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}\left(\nabla p_f - \overline{\nabla p_f}\right) \qquad \overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \overline{D_f^u} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{D_f^v} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D_f^w} \end{bmatrix}$$

Algoritmo SIMPLE Mallas colocadas

Trabajando en malla colocada en ambas ecuaciones:

$$\int_{V_C} \nabla p \, dV = (\nabla p)_C V_C \quad \text{ó} \quad \int_{V_C} \nabla p \, dV = \int_{\partial V_C} p \, d\mathbf{S} = \sum_{f \sim nb(C)} p_f \mathbf{S}_f$$

$$\int_{V_C} \mathbf{f}_b dV = (\mathbf{f}_b)_C V_C$$

La ecuación de momentum usando upwind y diferencias centradas (advección y difusión respectivamente)

$$\boxed{a_C^{\mathrm{v}} \mathbf{v}_C + \sum_{F \sim NB(C)} a_F^{\mathrm{v}} \mathbf{v}_F = \mathbf{b}_C^{\mathrm{v}}}$$

$$a_C^{\mathrm{v}} = FluxC_C + \sum_{f \sim nb(C)} (FluxC_f)$$

$$a_F^{\mathrm{v}} = FluxF_f$$

$$\mathbf{b}_C^{\mathrm{v}} = -FluxV_C - (\nabla p)_C V_C$$

$$FluxC_C = \frac{\rho_C V_C}{\Delta t}$$

$$FluxV_C = \underbrace{-\frac{\rho_C^{\circ} V_C}{\Delta t} \mathbf{v}_C^{\circ}}_{\substack{\text{transient} \\ \text{contribution}}} - \underbrace{(\mathbf{f}_b)_C V_C}_{\substack{\text{source term} \\ \text{contribution}}}$$

$$FluxC_f = \underbrace{\|\dot{m}_f, 0\|}_{\substack{\text{convection} \\ \text{contribution}}} + \underbrace{\mu_f \frac{E_f}{d_{CF}}}_{\substack{\text{diffusion} \\ \text{contribution}}}$$

$$FluxF_f = \underbrace{-\|-\dot{m}_f, 0\|}_{\substack{\text{convection} \\ \text{contribution}}} - \underbrace{\mu_f \frac{E_f}{d_{CF}}}_{\substack{\text{diffusion} \\ \text{contribution}}}$$

Algoritmo SIMPLE
Mallas colocadas
Factores de relajación

El proceso iterativo puede divergir debido a la no linealidad de la ecuación, entonces se debe utilizar un factor de relajación en la ecuación de momentum

$$\frac{a_C^{\mathbf{v}}}{\lambda^{\mathbf{v}}}\mathbf{v}_C + \sum_{F\sim NB(C)} a_F^{\mathbf{v}}\mathbf{v}_F = \mathbf{b}_C^{\mathbf{v}} + \frac{1-\lambda^{\mathbf{v}}}{\lambda^{\mathbf{v}}} a_C^{\mathbf{v}}\mathbf{v}_C^{(n)}$$

$$a_C^{\mathbf{v}} \leftarrow \frac{a_C^{\mathbf{v}}}{\lambda^{\mathbf{v}}}$$

$$\mathbf{b}_C^{\mathbf{v}} \leftarrow \mathbf{b}_C^{\mathbf{v}} + \frac{1-\lambda^{\mathbf{v}}}{\lambda^{\mathbf{v}}} a_C^{\mathbf{v}}\mathbf{v}_C^{(n)}$$

$$\boxed{a_C^{\mathbf{v}}\mathbf{v}_C + \sum_{F\sim NB(C)} a_F^{\mathbf{v}}\mathbf{v}_F = \mathbf{b}_C^{\mathbf{v}}}$$

Ecuación relajada

$$\mathbf{b}_C^{\mathbf{v}} = -V_C(\nabla p)_C + \hat{\mathbf{b}}_C^{\mathbf{v}} \Rightarrow \mathbf{v}_C + \sum_{F\sim NB(C)} \frac{a_F^{\mathbf{v}}}{a_C^{\mathbf{v}}}\mathbf{v}_F = -\frac{V_C}{a_C^{\mathbf{v}}}(\nabla p)_C + \frac{\hat{\mathbf{b}}_C^{\mathbf{v}}}{a_C^{\mathbf{v}}}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}_C[\mathbf{v}] &= \sum_{f\sim NB(C)} \frac{a_F^{\mathbf{v}}}{a_C^{\mathbf{v}}}\mathbf{v}_F \\ \mathbf{B}_C^{\mathbf{v}} &= \frac{\hat{\mathbf{b}}_C^{\mathbf{v}}}{a_C^{\mathbf{v}}} \\ \mathbf{D}_C^{\mathbf{v}} &= \frac{V_C}{a_C^{\mathbf{v}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{v}_C + \mathbf{H}_C[\mathbf{v}] = -\mathbf{D}_C^{\mathbf{v}}(\nabla p)_C + \mathbf{B}_C^{\mathbf{v}},$$

Algoritmo SIMPLE
Mallas colocadas
Ecuación de corrección para la presión

Ec. de cant. mov.: $\mathbf{v}_C^* + \mathbf{H}_C[\mathbf{v}^*] = -\mathbf{D}_C^{\mathbf{v}} \left(\nabla p^{(n)}\right)_C + \mathbf{B}_C^{\mathbf{v}}$

correcciones:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'$$

$$p = p^{(n)} + p'$$

$$m = m^* + m'$$

Ecuación de continuidad:

$$\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}_f' = -\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}_f^* \quad \text{where } \dot{m}_f^* = \rho_f \mathbf{v}_f^* \cdot \mathbf{S}_f$$

Interpolación de Rhie-Chow:

$$\mathbf{v}_f^* = \overline{\mathbf{v}_f^*} - \overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}\left(\nabla p_f^{(n)} - \overline{\nabla p_f^{(n)}}\right)$$

Algoritmo SIMPLE
Mallas colocadas
Ecuación de corrección para la presión

$$\boxed{\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}'_f = -\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}^*_f}$$

$$\mathbf{v}'_C + \mathbf{H}_C[\mathbf{v}'] = -\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_C (\nabla p')_C$$

$$\mathbf{v}'_F + \mathbf{H}_F[\mathbf{v}'] = -\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_F (\nabla p')_F$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v}'_f = \overline{\mathbf{v}'_f} - \overline{\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_f}(\nabla p'_f - \overline{\nabla p'_f})$$

$$\dot{m}'_f = \rho_f \mathbf{v}'_f \cdot \mathbf{S}_f \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{\sum_{f\sim nb(C)} (\rho_f \overline{\mathbf{v}'_f} \cdot \mathbf{S}_f) + \sum_{f\sim nb(C)} \left(\rho_f \overline{\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_f} \overline{\nabla p'_f} \cdot \mathbf{S}_f\right)} - \sum_{f\sim nb(C)} \left(\rho_f \overline{\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_f} (\nabla p')_f \cdot \mathbf{S}_f\right) = -\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}^*_f$$

Ecuación de corrección para la presión:

$$\boxed{-\sum_{f\sim nb(C)} \left(\rho_f \overline{\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_f} (\nabla p')_f \cdot \mathbf{S}_f\right) = -\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}^*_f}$$

Interpolación de Rhie-Chow:

$$\mathbf{v}^*_f = \overline{\mathbf{v}^*_f} - \overline{\mathbf{D}^{\mathbf{v}}_f}\left(\nabla p^{(n)}_f - \overline{\nabla p^{(n)}_f}\right)$$

Algoritmo SIMPLE
Mallas colocadas
Ecuación de corrección para la presión

$$\left(\overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}(\nabla p')_f\right)\cdot\mathbf{S}_f = \left((\nabla p')_f\overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}^T\right)\cdot\mathbf{S}_f$$
$$= (\nabla p')_f\cdot\left(\overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}^T\cdot\mathbf{S}_f\right)$$
$$= (\nabla p')_f\cdot\mathbf{S}'_f$$

con: $$\mathbf{S}'_f = \overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}^T\cdot\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} \overline{D_f^u} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{D_f^v} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D_f^w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_f^x \\ S_f^y \\ S_f^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D_f^u}S_f^x \\ \overline{D_f^v}S_f^y \\ \overline{D_f^w}S_f^z \end{bmatrix}$$

$$(\nabla p')_f\cdot\mathbf{S}'_f = (\nabla p')_f\cdot\mathbf{E}_f + \cancel{(\nabla p')_f\cdot\mathbf{T}_f}$$

$$\boxed{(\nabla p')_f\cdot\mathbf{S}'_f = \frac{E_f}{d_{CF}}(p'_F - p'_C)} + \cancel{\underline{(\nabla p')_f\cdot\mathbf{T}_f}}$$

En una malla cartesiana no hay componente transversal, y *Sf'* es directamente *Sf*

Algoritmo SIMPLE
Mallas colocadas
Ecuación de corrección para la presión

$$a_F^{p'} = FluxF_f = -\rho_f \mathcal{D}_f$$

$$a_C^{p'} = -\sum_{f\sim nb(C)} FluxF_f = -\sum_{F\sim NB(C)} a_F^{p'}$$

$$b_C^{p'} = -\sum_{f\sim nb(C)} FluxV_f + \cancel{\sum_{f\sim nb(C)} \left(\rho_f \overline{\mathbf{H}}_f[\mathbf{v}'] \cdot \mathbf{S}_f\right)}$$

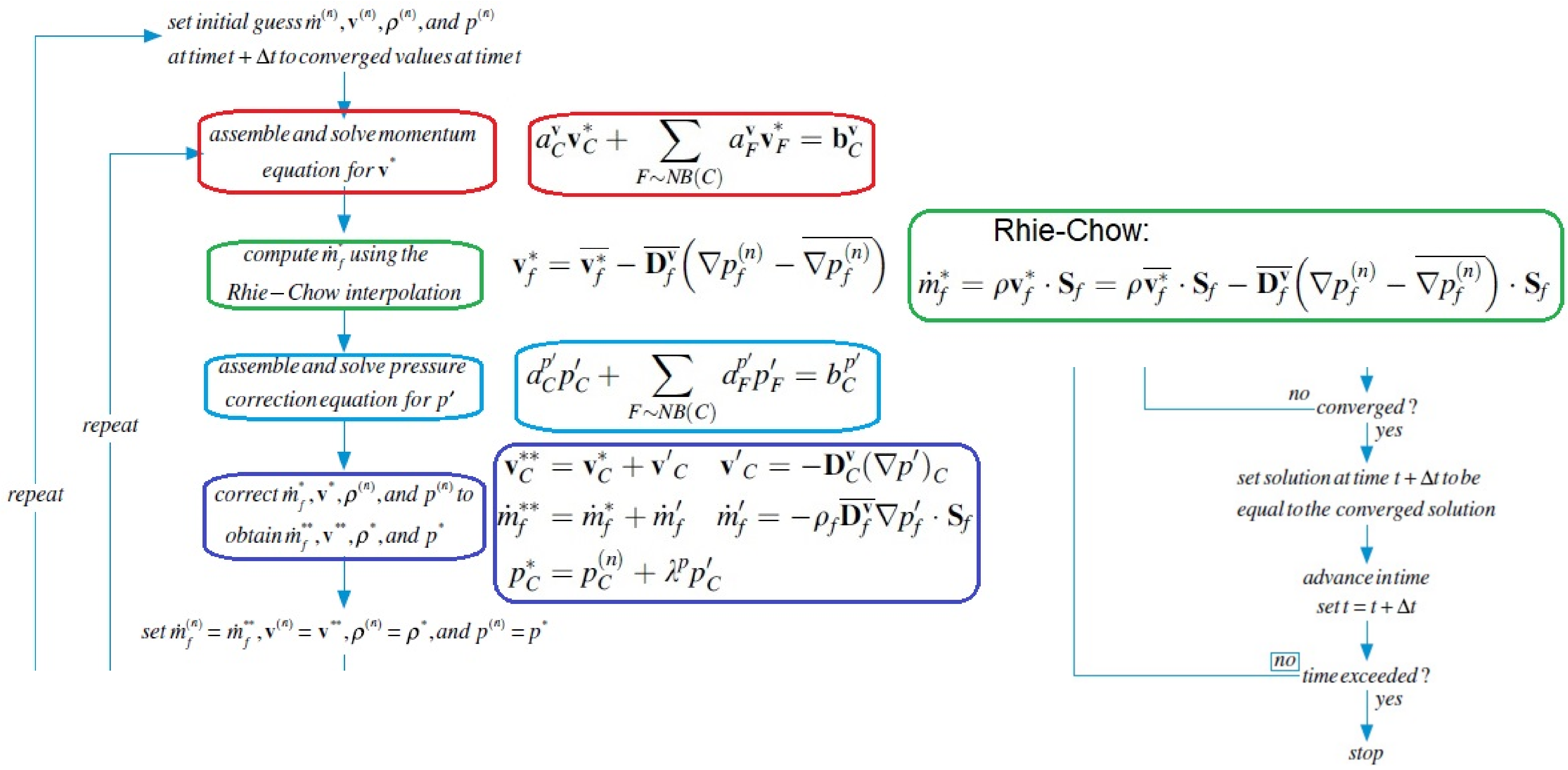
$$= -\sum_{f\sim nb(C)} \dot{m}_f^* + \cancel{\sum_{f\sim nb(C)} \left(\rho_f \overline{\mathbf{H}}_f[\mathbf{v}'] \cdot \mathbf{S}_f\right)}$$

Rhie-Chow:

$$\dot{m}_f^* = \rho \mathbf{v}_f^* \cdot \mathbf{S}_f = \rho \overline{\mathbf{v}_f^*} \cdot \mathbf{S}_f - \overline{\mathbf{D}_f^{\mathbf{v}}}\left(\nabla p_f^{(n)} - \overline{\nabla p_f^{(n)}}\right) \cdot \mathbf{S}_f$$

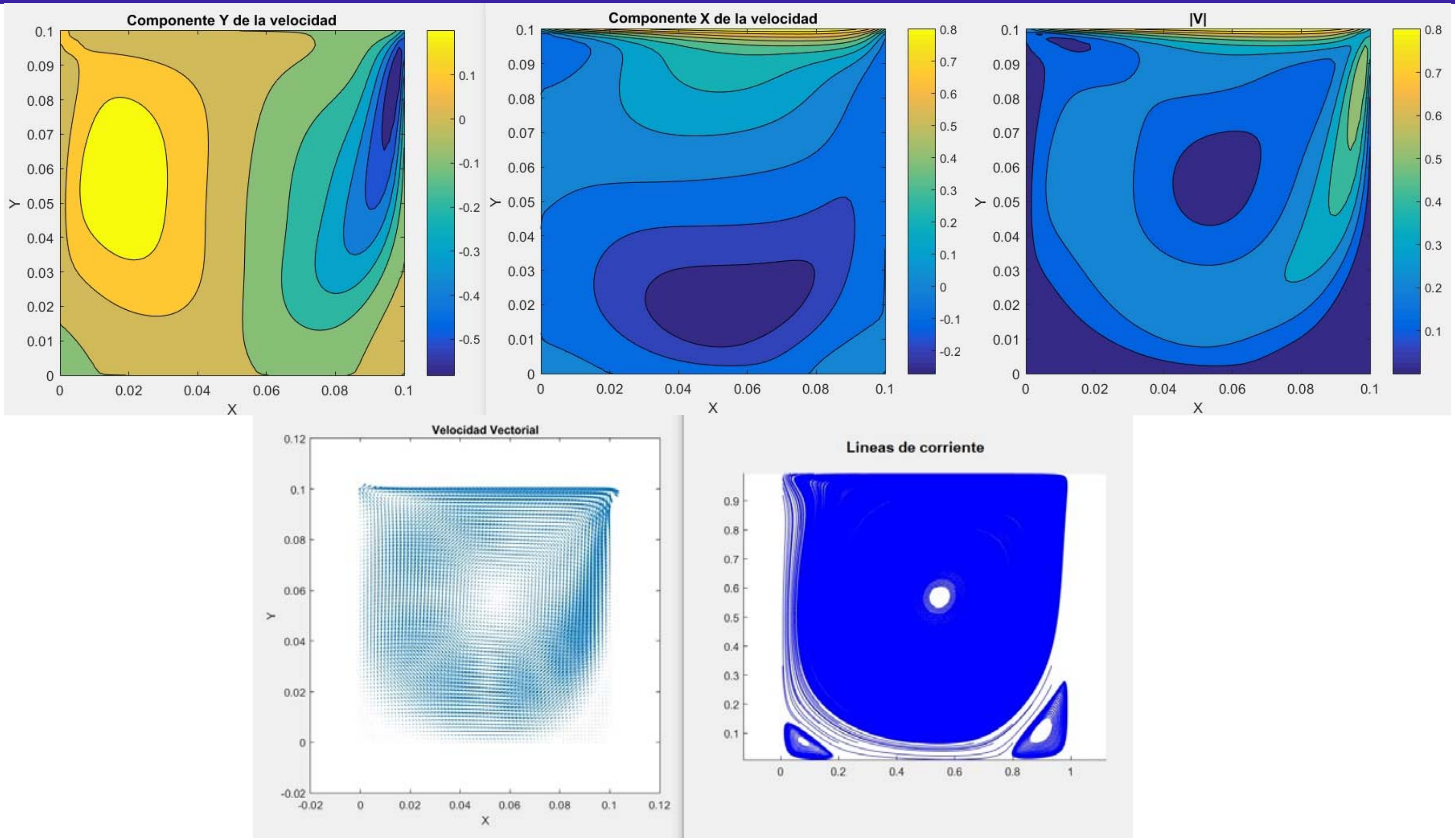
$$a_C^{p'} p'_C + \sum_{F\sim NB(C)} a_F^{p'} p'_F = b_C^{p'}$$

Algoritmo SIMPLE
Mallas colocadas



Soluciones numéricas usando algoritmo SIMPLE, en mallas colocadas, problema cavidad cuadrada a Re=1000

- Introducción
- Tensor de tensiones
- Ec. Momentum
- Tensor gradiente velocidad
- Tensor velocidad deformación
- Navier Stokes
- Solución numérica
- Cant. movimiento
- Continuidad
- Checkerboard
- Mallas staggered
- SIMPLE staggered
- Corrección de la presión
- Interpolación de Rhie-Chow
- SIMPLE colocado
- Corrección de la presión
- Algoritmo
- Ejemplo 2D
- Ejemplo 3D



Soluciones numéricas usando algoritmo SIMPLE, en mallas colocadas, problema cavidad cúbica a Re=1000

- Introducción
- Tensor de tensiones
- Ec. Momentum
- Tensor gradiente velocidad
- Tensor velocidad deformación
- Navier Stokes
- Solución numérica
- Cant. movimiento
- Continuidad
- Checkerboard
- Mallas staggered
- SIMPLE staggered
- Corrección de la presión
- Interpolación de Rhie-Chow
- SIMPLE colocado
- Corrección de la presión
- Algoritmo
- Ejemplo 2D
- Ejemplo 3D