

**CONGRESO NACIONAL DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA,  
BUENOS AIRES 3 Y 4 DE OCTUBRE DE 2002**

**Área Temática:**

**Informatización de la Ingeniería**

**Título del trabajo:**

**“Modelado y mecanizado de superficies de Bézier definidas por  
mallas poligonales”**

**Nombre completo de los autores:**

**Ing. Martín Alejo PUCHETA**

**Ing. David Alejandro NOVILLO**

# HOJA DE VIDA

## Martín Alejo PUCHETA Ingeniero Mecánico (UTN-FRC)

Edad: **26 años** DNI: **25.023.511**

Fecha de nacimiento: **23 de mayo de 1976**

Nacionalidad: **Argentino** Estado civil: **Soltero**

Domicilio: **Galíndez 1459, B° San Vicente, Córdoba**

Teléfono: **(0351) 455-9136** Celular: **(0351) 155083641**

E-mail: **mpucheta@scdt.frc.utn.edu.ar**

### **Trabajo Actual**

-Pasante en el Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería, CIMEC-INTEC, Universidad Nacional del Litoral – CONICET, Santa Fe, desde Julio de 2002.

### **Antecedentes Laborales**

- Becario investigador del Centro Universitario de Desarrollo en Automación y Robótica (C.U.D.A.R.), de la Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Córdoba, desde noviembre de 1997 a Junio de 2002.

- Docente titular de la materia Automatismos y Robótica en el tercer año del Ciclo de Especialización del Instituto Industrial "Cristo Obrero" de la ciudad de Villa Carlos Paz, con 3 hs-cátedra semanales, desde marzo de 2001 a Junio de 2002.

- Docente de Taller de Aplicaciones en el Instituto Industrial "Cristo Obrero" de la ciudad de Villa Carlos Paz, dictando en 4hs-cátedra semanales, nuevos bloques temáticos de CNC en fresadora y CAD/CAM con el software ALPHACAM2000, desde marzo de 2000 a Junio de 2002.

- Docente titular del curso cuatrimestral de Computación en la Escuela de Capacitación Laboral "San Juan Bosco", con certificación Oficial del Ministerio de la Producción de la Provincia de Córdoba, desde agosto de 2001 a Junio de 2002.

- Trabajó ad honorem en la Escuela de Capacitación Laboral "San Juan Bosco" situada en la calle Galíndez 1250 de la ciudad de Córdoba, colaborando en la adecuación y mantenimiento de aulas, y asesoramiento técnico. Este emprendimiento social-educativo lo lleva a cabo la Asociación Cooperadores Salesianos - Centro Felipe Rinaldi, del cual forma parte desde agosto de 1999.

- Evaluador durante la XXXIII Feria Provincial de Ciencias y Tecnología Córdoba 2001, que tuvo lugar del 12 al 14 de Septiembre de 2001 en la ciudad de Córdoba.

- Dictó clases de Simulación de fresa CNC con el código ISO en los cursos de "Operador y programador de Control Numérico Computadorizado" en convenio con la SEU UTN FRC, desde 1998 a 2001.

- Presentó -como autor principal- el trabajo "Modelado y mecanizado de superficies de Bézier definidas por mallas poligonales", aceptado por la comisión evaluadora, para publicar en la revista Ciencia y Tecnología de la UTN Facultad Córdoba, 2001.

- Expositor en la Reunión RIBAMEC 99 (Red Iberoamericana de Automatización de los Procesos de Mecanizado) que se llevó a cabo en Florianópolis, Brasil, del 11 al 15 de Octubre de 1999.

- Dictó clases de Introducción al AutoCAD14 en la cátedra Sistemas de Representación, en colaboración con el Ing. Luis Oro.(Octubre 1998)

- Dictó clases teórico-prácticas en el curso "Operador polivalente en CNC" de la Cámara de Industriales Metalúrgicos, en el módulo Geometrías no Tradicionales con prácticas en Excel y AutoCAD, en colaboración con el Ing. David Novillo.(Noviembre 1998)

- Como becario, del área mecánica del centro CUDAR ha estado realizando, desde su ingreso por concurso en 1997, tareas de investigación en computación gráfica, diseño mecánico y ha realizado diversas actividades de taller, principalmente mecanizados en la fresadora a CNC con control DYNAPATH DELTA 20M, programando manualmente o con el software de CAD/CAM ProCAM de TekSoft.

# MODELADO Y MECANIZADO DE SUPERFICIES DE BÉZIER DEFINIDAS POR MALLAS POLIGONALES

Ing. Martín Alejo Pucheta.\*

Ing. David Novillo.\*\*

E-mail: mpucheta@scdt.frc.utn.edu.ar - dnovillo@scdt.frc.utn.edu.ar

\* UTN-FRC. Becario del Centro CUDAR.

\*\* UTN-FRC Responsable del Área Mecánica del CUDAR.

Centro Universitario de Desarrollo en Automación y Robótica, Área Mecánica. UTN-Facultad Regional Córdoba. M. M. López esq. Cruz Roja Arg.- Ciudad Universitaria (5016) Córdoba. Tel: 0351-4680296.

## **Resumen**

El trabajo presenta una alternativa para modelar superficies de Bézier sin utilizar un software de CAD/CAM. Se describen las ecuaciones matemáticas y un método para su visualización y análisis mediante métodos numéricos como las derivadas parciales de superficies biparamétricas. Se emplea este método para la generación de trayectorias de mecanizado de una herramienta de punta esférica, para fresadora CNC de 2 ½ ejes. Finalmente se le da un formato a la trayectoria obtenida para ser reproducida en una fresadora American CNC con control Dinapath Delta 20. Se observa su eficiencia en el empalme de dos superficies de prueba en la aplicación de modelado de piezas complejas.

## **Palabras claves**

Superficies complejas, trayectorias de corte, mecanizado en CNC, CAD/CAM.

## **1. Introducción**

Los actuales sistemas de CAD/CAM (sistema integrado de Diseño Asistido por Computadora y Manufactura Asistida por Computadora) ofrecen al usuario una interfaz bastante amigable para el diseño y programación del maquinado de piezas complejas, pero sus comandos están inundados de terminologías matemáticas y geométricas, que muchas veces los manuales de usuario no explican y refieren a bibliografía especializada.

El campo de la computación gráfica evolucionó impulsado por la industria aeronáutica y automotriz (HAWKES B., 1989; CINCUNEGUI D., 1996), para dar soluciones a la obtención gráfica y la construcción de piezas de formas complejas. Empresas de estos rubros, han destinado gran parte de sus recursos humanos al estudio de una enorme variedad de métodos numéricos y estructuras de datos de marcada complejidad.

Entre los métodos de representación gráfica CAD hay dos campos muy difundidos, la representación sólida y la representación alámbrica o de superficies. La tendencia actual (CINCUNEGUI D. 1996), es el empleo híbrido de ambos sistemas con el agregado de la parametrización de entidades, o sea, permitir el cambio de dimensiones en una pieza terminada ajustando alguna variable perteneciente a la misma, como la longitud de un lado, un diámetro, etc.

La potencialidad de estos sistemas viene dada también por la asociatividad con otros, tales como análisis por el método de elementos finitos de la resistencia de las piezas, generación semiautomática de matrices y moldes, simulación del corte, embutido o estampado de chapa, simulación del flujo de fluidos en moldes de inyección de plástico o aluminio, simulación térmica, cinemática y dinámica de mecanismos, maquinado asistido por computadora (fresado, corte con láser, plasma ó chorro de agua, electroerosión, etc.).

Como salida de un sistema CAD/CAM aplicado al fresado de superficies, se tiene un programa con formato interpretable por el control de una máquina herramienta a CNC (Control Numérico Computarizado) determinada.

En este trabajo tendremos un estudio desde el diseño (descripción matemática, visualización y consideraciones de uso) hasta la manufactura (generación de trayectoria de corte y procesado para su mecanizado) de un tipo de superficie muy utilizado en los sistemas antes descriptos, como lo son las superficies de Bézier.

Los modelos analíticos fueron implementados mediante métodos matriciales, y se agregan gráficas ilustrativas de toda la teoría involucrada y de las consideraciones prácticas. Además, se incorporan fotografías de los mecanizados realizados verificando la teoría.

En el **Anexo I** se realiza un estudio analítico-gráfico de la obtención de un punto de la superficie, y en el **Anexo II** las derivadas parciales de las ecuaciones empleadas en el ejemplo de generación de trayectorias de corte.

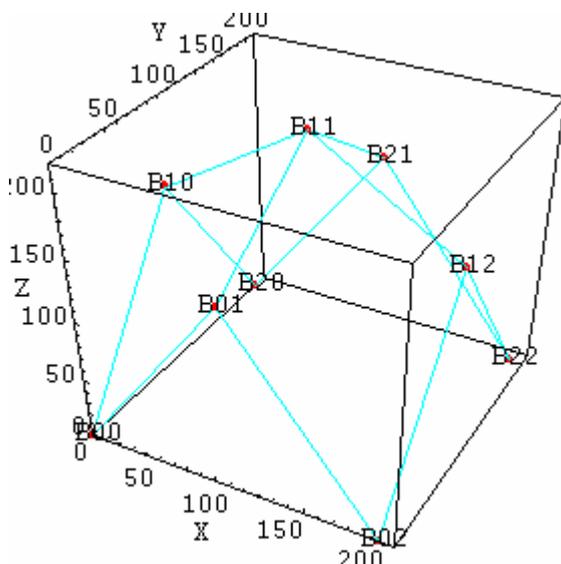
## 2. Descripción matemática de la superficie de Bézier

Una superficie biparamétrica se representa por una ecuación vectorial de dos parámetros.

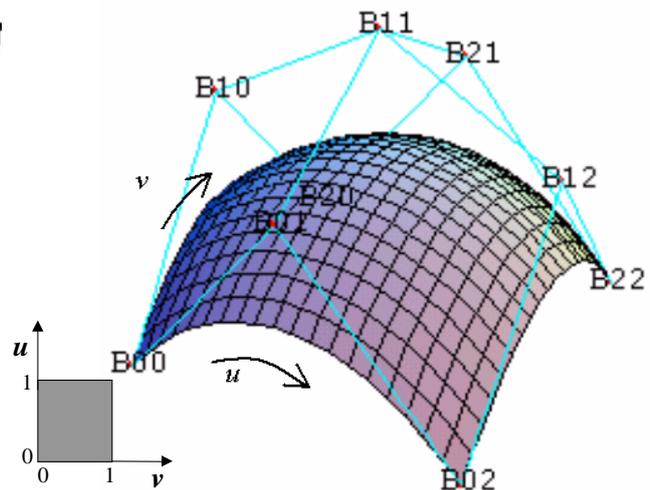
$$Q(u,v) = [X(u,v) \ Y(u,v) \ Z(u,v)] \quad [1]$$

Los puntos de la superficie pertenecen al espacio tridimensional, pero son función de un dominio bidimensional  $0 \leq u \leq 1$  y  $0 \leq v \leq 1$ , sobre el cual se valúa, según una ley matemática [2], la malla poligonal que la define.

El dominio es muy simple, su variación hace que la superficie sea de cálculo sencillo respecto a otras superficies donde los parámetros tienen variaciones más complejas.



**Figura 1. Malla de definición de la matriz B y puntos de control etiquetados**



**Figura 2. Superficie obtenida al valuar la malla en el dominio  $u \ v$**

La ecuación general (ROGERS D. F., 1990) es:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(v) \quad [2]$$

Donde:

$n$ : es el grado del segmento polinómico y el orden de la función de Bernstein,  $n+1$  es el número de vértices de la malla de definición en la dirección  $u$ .

$m$ : es el grado del segmento polinómico y el orden de la función de Bernstein,  $m+1$  es el número de vértices de la malla de definición en la dirección  $v$ .

$B_{i,j}$ : coordenadas [ x y z ] de los puntos de control del polígono o malla de definición.

$J_{n,i}(u)$ : función base de Bernstein ó de Bézier en la dirección  $u$ .

$K_{m,j}(v)$ : función base de Bernstein ó de Bézier en la dirección  $v$ .

La malla que manipula el diseñador (**Figura 1**) sigue un arreglo de  $(n+1) \times (m+1)$  puntos de control o vértices, pertenecientes también, al espacio tridimensional o de diseño. Los puntos de control son los

de diseño y poseen distinta influencia sobre la forma de la superficie que definen. Se numeran según un arreglo de índices enteros que van de 0 (cero) a  $n$  y de 0 a  $m$ . Por ejemplo para  $n=2$  y  $m=2$ ,

$$[B_{i,j}] = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \quad [3]$$

La función de Bernstein se define por:

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i} \quad [4]$$

Para la combinatoria:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad [5]$$

Cabe recordar que  $(0)^0 \equiv 1$  y  $0! \equiv 1$ .

Existe la particularidad de que la suma de las funciones es igual a 1, además, cada función valuada en el intervalo  $0 \leq u \leq 1$  es un segmento polinómico. Entonces, estas funciones pueden calcularse tanto para  $u$  como para  $v$  como los términos del desarrollo del siguiente binomio (BAGHINI J.C., 1988):

$$((1-u)+u)^n \quad [6]$$

El desarrollo tendrá  $n+1$  términos, en coincidencia con el número de vértices en la dirección correspondiente. Para  $K_{m,j}(v)$ , la definición tiene la misma forma, pero cambia el índice  $n$  por  $m$  y el parámetro  $u$  por el  $v$ .

En el **Anexo I** se realiza un ejemplo analítico, del empleo de estas ecuaciones para una malla de  $3 \times 3$  puntos de control.

### 3. Implementación de la visualización de la superficie y consideraciones para su uso

El modelo computacional para la ecuación puede realizarse de muchas maneras. Los datos de entrada son los órdenes  $n$  y  $m$  en ambas direcciones y una matriz de puntos de control de tres coordenadas cada uno, ordenados según un arreglo matricial de  $(n+1) \times (m+1)$ .

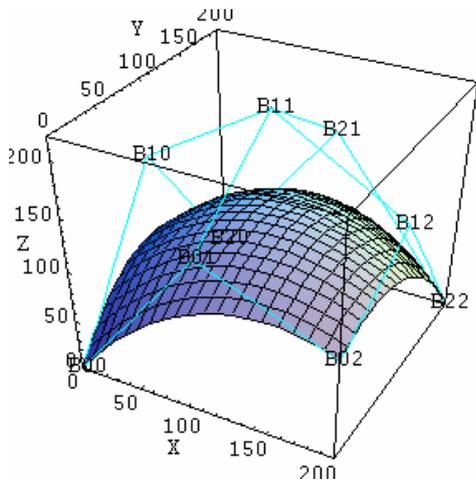
No es necesario calcular los infinitos puntos de la superficie, sino que se varían los parámetros con un incremento discreto para obtener determinada cantidad  $t$  y  $h$  de isoparamétricas, y permitir visualizar una malla lo más representativa posible. En nuestro trabajo, almacenamos los puntos calculados en tres matrices de coordenadas rectangulares  $X(i,j)$ ,  $Y(i,j)$ , y  $Z(i,j)$ , haciendo corresponder los subíndices  $i$  y  $j$  (números enteros), con la variación de  $u$  y  $v$  entre 0 y 1.

Implementada la visualización, se puede analizar el comportamiento de la superficie al variar la posición de los puntos de control de la malla. Como ejemplo, se utilizó una malla de  $3 \times 3$  puntos de control con 20 isoparamétricas a partir de estos datos de diseño:

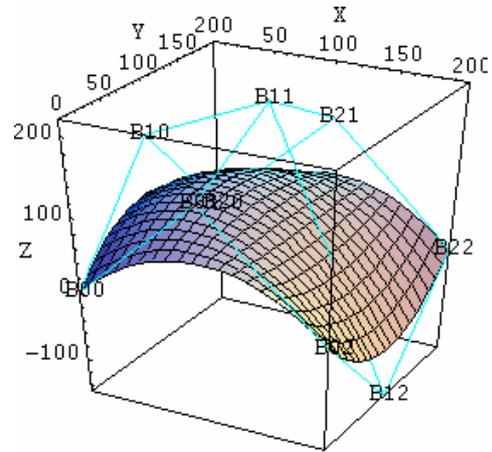
$$[B] = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 & 0 & 0] & [100 & 0 & 150] & [200 & 0 & 0] \\ [0 & 100 & 150] & [100 & 100 & 220] & [200 & 100 & 150] \\ [0 & 200 & 0] & [100 & 200 & 150] & [200 & 200 & 0] \end{bmatrix}$$

Los puntos de los vértices de la malla, en la **Figura 3** son  $B_{0,0}$ ,  $B_{0,2}$ ,  $B_{2,0}$  y  $B_{2,2}$ , tienen mucha influencia sobre la forma de la superficie ya que pertenecen a la misma, luego, los puntos adyacentes a los vértices **Figuras 4, 5 y 6**, influyen sobre la zona cercana a los vértices de la malla porque forman con los mismos, vectores tangentes a la superficie. Finalmente, los puntos de control internos de la malla **Figuras 7 y 8**, influyen posibilitando inflexiones en la superficie pero la forma que adquiere la superficie es poco intuitiva para el diseñador, quien no puede conocer la posición exacta de ningún punto interno de la misma (a menos que valúe la función con un par de parámetros  $uv$  iterativamente

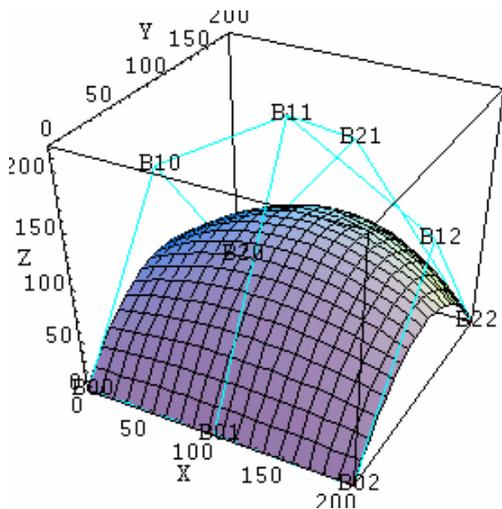
hasta aproximarse a un punto deseado). El conocimiento incierto de los puntos internos hacen que estas superficies sean artísticas y por lo tanto difíciles de utilizar.



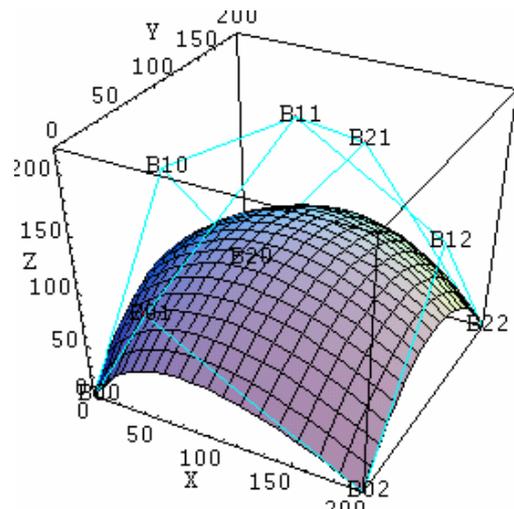
**Figura 3. Elevación de un vértice en Z.**  
 $B_{0,2}=[200\ 0\ 100]$ .



**Figura 4. Bajar un punto por debajo de los vértices  $B_{1,2}=[200\ 100\ -150]$ .**



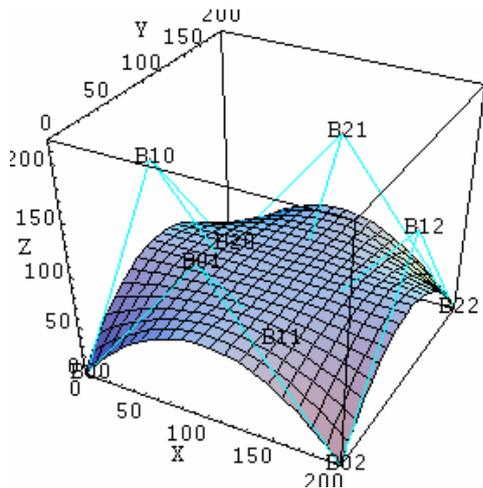
**Figura 5. Variación del punto  $B_{0,1}$  en la coordenadas X y Z  $B_{0,1}=[100\ 0\ 0]$**



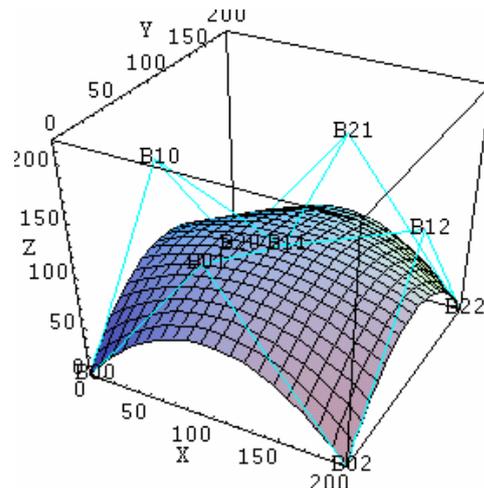
**Figura 6. Idem para  $B_{0,1}=[50\ 0\ 100]$**

Es importante no confundirlas con las superficies dadas por cuatro curvas, las de Bézier tienen la posibilidad de modificar la forma mediante todos los puntos de la malla con mayor (vértices extremos) o menor (internos) influencia, por eso se la llama vulgarmente superficie "de forma libre".

Si bien estas superficies datan de casi 30 años y sus prestaciones han sido ampliamente superadas por las superficies NURBS y otras, aún conviven por sus buenas características cuando las mallas tienen órdenes de valores bajos. Su posibilidad de disminuir el orden hizo que se prefiera a lo sumo orden 2 ó 3, donde los cálculos computacionales son rápidos y producen errores menores que en órdenes mayores. Aplicando transformaciones de traslación, rotación, o escalado a los "puntos de control" (cuyo almacenamiento ocupa poquísimo espacio de memoria), también se lo hace sobre la superficie al evaluar la malla en el dominio, de aquí su amplia difusión en softs de CAD. En estos sistemas, a cada punto de control se le agrega un cuarto elemento, además de las tres coordenadas, para trabajar con coordenadas homogéneas y permitir sus transformaciones (ROGERS D. F., 1990).



**Figura 7. Variación del punto interno B<sub>1,1</sub> en la coordenada Z B<sub>1,1</sub>=[100 100 0]**



**Figura 8. Idem para B<sub>1,1</sub>=[100 100 100]**

#### 4. Derivadas y normales de la superficie de Bézier.

Con las ecuaciones de las derivadas parciales de la superficie (ver ejemplo en **Anexo II**) valuadas en un punto de la misma, tal como  $Q(u_1, v_1)$ , se obtienen los vectores tangentes a la superficie en ese punto. Realizando el producto vectorial de los mismos, se obtiene el vector normal a la superficie en dicho punto (PIEGL L., 1997). Ver **Figuras 9 y 10**.

$$\vec{N} = \frac{\partial Q}{\partial u} \times \frac{\partial Q}{\partial v} \quad [7]$$

Dividiendo a este vector por su norma, obtenemos el vector normal con magnitud unitaria.

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}} \quad [8]$$

Los usos de las normales a la superficie son múltiples, utilizadas por ejemplo en los sistemas CAD para calcular la iluminación y renderizado de la superficie, y en los sistemas CAM para calcular las trayectorias de las herramientas de corte para el mecanizado.

#### 5. Generación de trayectorias para el mecanizado

Cabe distinguir primero, la variedad de parámetros que involucra una generación de trayectoria de corte. Sin abordar en detalles, se mencionan por ejemplo el tipo de máquina, cantidad de ejes de comando simultáneo; tipo, forma de punta y diámetro de la herramienta; geometría de la pieza a fabricar, interferencia entre superficies de la misma pieza, posición de las superficies respecto al plano horizontal (X-Y), sujeción de la pieza, interferencia con el utillaje, calidad de terminación superficial, tolerancias de forma y posición requeridas, tiempo disponible, estrategias de mecanizado, etc.

#### 6. Uso de las normales para el cálculo de la compensación tridimensional de una herramienta de punta esférica

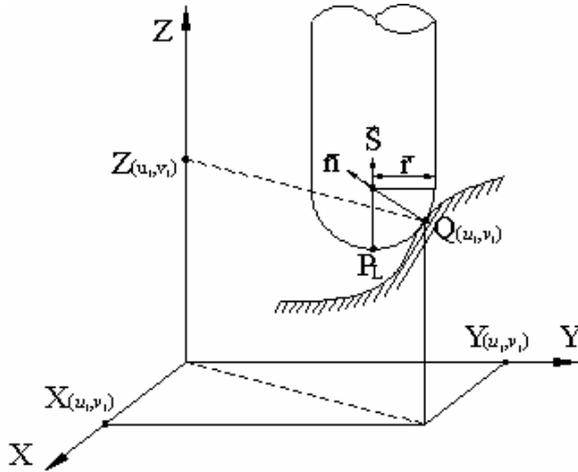
Obtenidas las normales a la superficie según [2], [7] y [8] (**Figura 10**), se utilizan para generar la trayectoria de una herramienta de punta esférica, la que debe posicionarse de manera que haga contacto en el punto deseado de la superficie (el centro de la esfera estará alineado con la normal a dicho punto). Se debe calcular el punto de localización  $P_L$  de la herramienta (CHOI B.K., 1988), según el tipo de máquina, en el caso de las fresadoras a CNC de 2 ½ ejes, es el punto inferior de la herramienta, en este caso, de la esfera. Para ello, al vector del punto a hacer contacto  $Q(u_1, v_1)$ , se le suma el vector normal multiplicado por el radio de la esfera y se le resta un vector en dirección Z positivo de módulo igual al radio. Para una mayor claridad de la **Figura 9**, sólo se grafica una curva que es traza de la superficie.

Cada  $P_L$  está dado por:

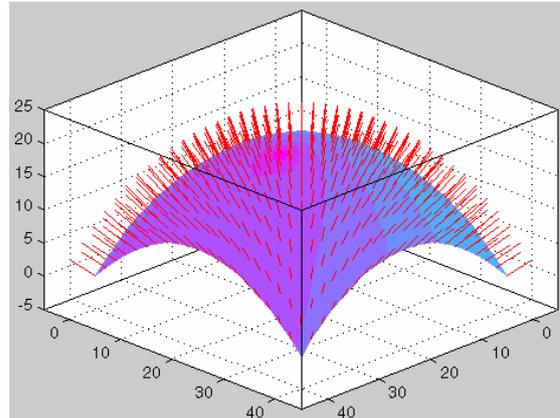
$$\vec{P}_L = \vec{Q} + \vec{n}.r - \vec{S}.r \quad [9]$$

donde:

- $Q$ : es el punto deseado sobre la superficie
- $S$ : es un versor en dirección  $Z$ ,
- $r$ : es el radio de la punta de la herramienta,
- $n$ : es el vector normal a la superficie.



**Figura 9. Esquema representativo de la compensación de radio de la herramienta**



**Figura 10. Vista de los vectores normales**

Los puntos  $P_L$ , almacenados en matrices  $PLx(i,j)$ ,  $PLy(i,j)$ , y  $PLz(i,j)$ , se reordenan<sup>1</sup> para formar un zig-zag en una “matriz de trayectoria” **Figura 11** de  $(h.t) \times 3$  elementos, donde  $h$  y  $t$  son las cantidades de valores calculados en la dirección  $u$  y  $v$  respectivamente.

Para posibilitar el mecanizado de estos puntos, éstos deben tener un formato de texto que el control de la fresadora pueda interpretar, para ello se agregan con comandos de texto la numeración y las funciones del tipo de movimiento, en este caso, lineales punto a punto con velocidad controlada, el código para el control Delta 20 es (1) ó (E)G01 en el sistema EIA/ISO.

El texto de salida para el CNC tiene la forma:

```
N9(1)X-2.309Y-2.309Z-1.691
N10(1)X-0.935Y-2.763Z-0.9
N20(1)X0.402Y-3.076Z-0.203
N30(1)X1.695Y-3.29Z0.414
N40(1)X2.948Y-3.438Z0.954
N50(1)X4.167Y-3.54Z1.416
N60(1)X5.361Y-3.611Z1.798
N70(1)X6.536Y-3.659Z2.097
N110(1)X11.149Y-3.708Z2.442
.
.
.
```

Con un editor de texto se le agregan las condiciones de corte iniciales<sup>2</sup> en las primeras líneas del programa, luego se envía a la fresadora por conexión RS232, se sujeta la pieza en la mesa, se setea el “cero pieza”, los correctores de herramienta de la máquina y se ejecuta el maquinado.

<sup>1</sup> “Reordenamos” formando el zig-zag, a causa del algoritmo y estructura de datos matricial que elegimos. Se podría haber valuado el dominio en zig-zag y listar los  $P_L$  como un vector de trayectorias. Los sistemas CAM proponen una gran variedad de formas de configurar el recorrido de la superficie a fin de optimizar la productividad del mecanizado, el que utilizamos con este método, figura generalmente como “Mecanizado UV”.

<sup>2</sup> El programa se puede modificar, en cuanto a condiciones de corte, a pie de máquina.

### 7. Resultados obtenidos para superficie simple

Se realizó el mecanizado sobre cedro, con una herramienta de punta esférica de diámetro 8mm. La superficie cubre una proyección sobre el plano XY de 40 x 40mm.

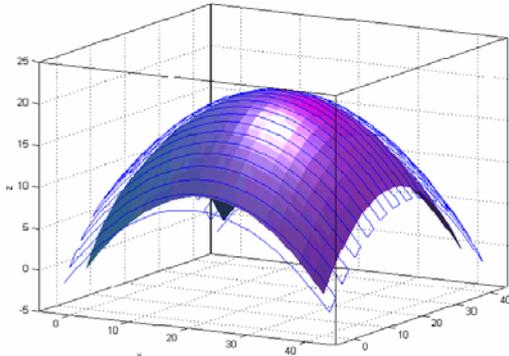


Figura 11. Simulación de las trayectorias de corte ( $P_L$  ordenados).



Figura 12. Experimentación sobre madera.

### 8. Condiciones de empalme

Hay tres condiciones necesarias para que el empalme de dos superficies sea suave. La primera, es que los polígonos de definición, en los contornos de unión sean los mismos. La segunda condición, es que los polígonos de definición en los contornos a unir tengan igual orden, o sea igual cantidad de puntos de control. La tercera condición que debe cumplirse, es que los vectores tangentes en los puntos de control común sean colineales (BEZIER P.E., 72).

Observar en la **Figura 13**, que los puntos  $B_{02}$ ,  $B_{10}$  y  $B_{20}$  de la malla de la izquierda, coinciden con los puntos  $D_{00}$ ,  $D_{10}$  y  $D_{20}$  de la malla de la derecha, esto sólo asegura la unión de las superficies asociadas a cada malla. Si se hacen colineales los puntos de cada malla inmediatamente próximos a los del polígono común, nos aseguramos, además, la suavidad del empalme.

Son colineales:

$B_{01}, B_{02}=D_{00}$  y  $D_{01}$

$B_{11}$  (oculto debajo de la superficie),  $B_{10}=D_{10}$  y  $D_{11}$

$B_{21}, B_{22}=D_{20}$  y  $D_{22}$  (oculto detrás de la superficie). Válido también para las **Figuras 14 y 15**

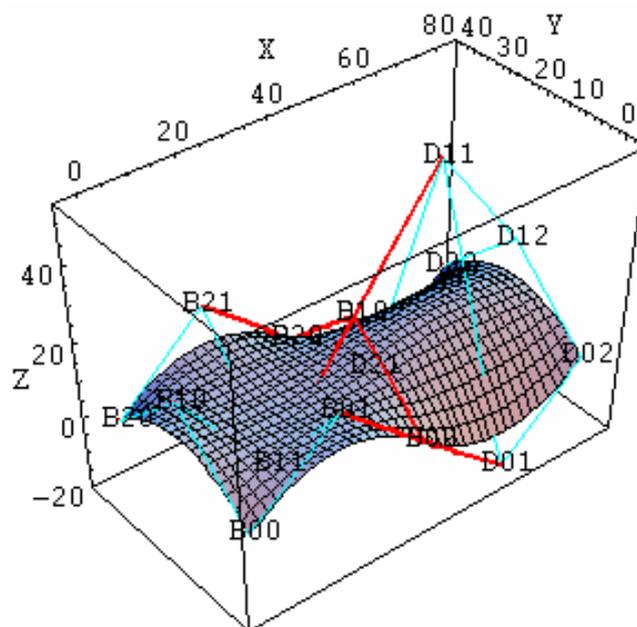
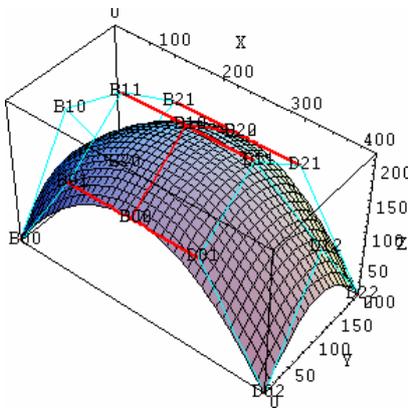
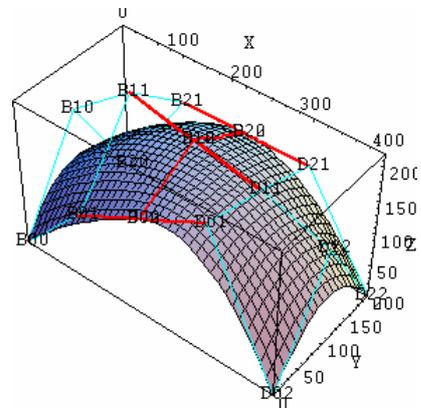


Figura 13. Empalme suave de dos superficies

Sobre todos los puntos del contorno de unión, las derivadas parciales de ambas superficies valuadas en los mismos tienen igual dirección, entonces, ambas superficies tienen normales comunes en tales puntos.



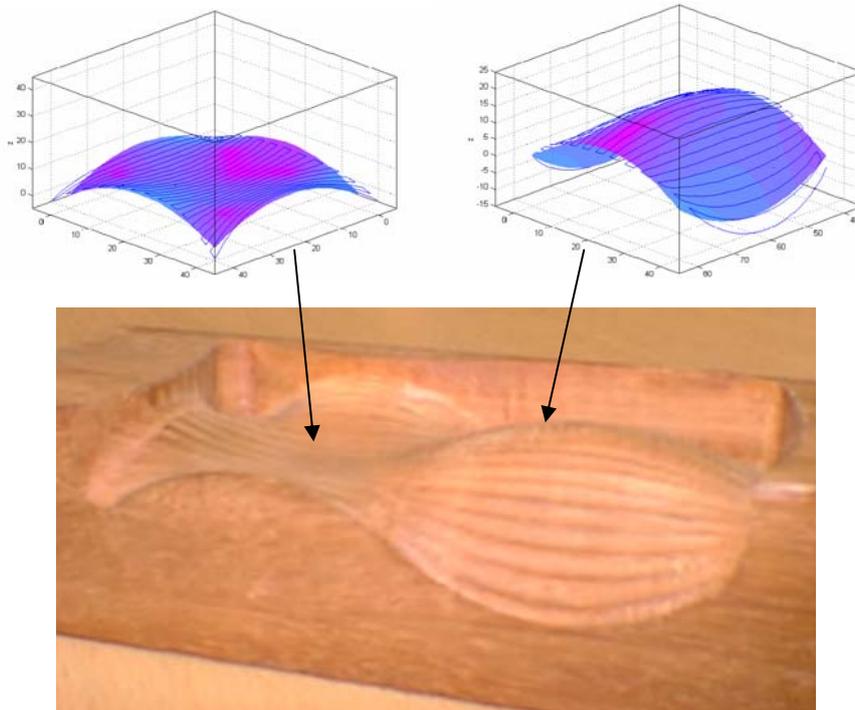
**Figura 14. Lados colineales de igual pendiente**



**Figura 15. Lados colineales de distinta pendiente**

### 9. Implementación práctica de la continuidad de dos superficies.

Se realizó la corroboración física de estas condiciones con las dos superficies de pruebas mostradas en la **Figura 16**, generando las trayectorias de corte por separado y maquinándolas una a continuación de la otra.



**Figura 16. Simulación de trayectorias y mecanizado de ambas superficies en madera**

### 10. Conclusiones

Las superficies biparamétricas constituyen, actualmente, uno de los mejores modelos matemáticos para el diseño de formas libres, entre ellas se utilizan además las superficies NURBS (B-Splines Racionales No Uniformes), Coons (definidas por cuatro curvas Splines), B-Splines regladas, de revolución, etc (ROGERS D. F., 1990; PIEGL I., 1997). Entre las superficies de formas libres, las de

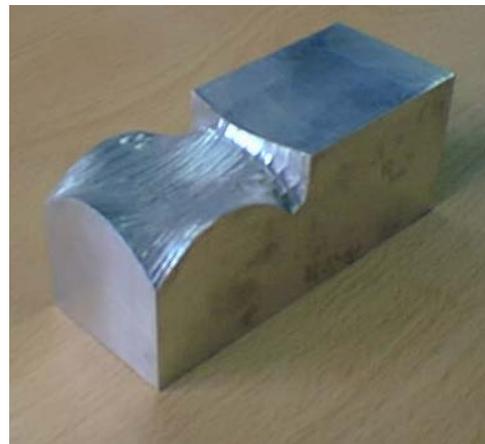
Bézier constituyen las de ecuación más simple. Las superficies de Bézier son una adecuada herramienta educativa para hacer un seguimiento desde su concepción hasta su concreción física en el mecanizado, con métodos numéricos de fácil comprensión y que permiten ser representadas computacionalmente por programadores poco expertos sin profundizar en la generación de interfaces gráficas y bases de datos complejas.

Este tipo de superficie no sirve para interpolar puntos desde el digitalizado de prototipos de manera directa, como lo permiten hacer las NURBS, aunque matemáticamente, sean un caso particular de estas últimas (PIEGL L., 1997).

Los puntos extremos de la malla pertenecen a la superficie y ésta es tangente a la malla en estos puntos. Entonces, combinando mallas, existe la posibilidad de unión respetando ciertas condiciones, permitiendo obtener piezas de formas de gran complejidad. Aún así, estas propiedades expuestas no son suficientes para modelar cualquier pieza, restan varios problemas de gran importancia, como la intersección de superficies, el seccionamiento o "recortado", y el empalme o redondeo. La generación de trayectorias para estos casos es aún más compleja.



**Figura 17. Proceso de mecanizado**



**Figura 18 Mecanizado en aluminio**



**Figura 19 Aspecto de la pieza de prueba**

Idéntico procedimiento al realizado en este trabajo, se puede utilizar para muchas aplicaciones particulares sin recurrir a un costoso software de CAD/CAM, como por ejemplo, en el maquinado de superficies definidas por ecuaciones implícitas u otras no mencionadas del tipo biparamétrico (PIEGL L., 1997), que deban cumplir una ley matemática definida, para realizar experimentos científicos tanto matemáticos como físicos, como ser el álabe de una turbina, conductos complejos de fluidos en la

tapa de cilindros de un motor, trayectorias complejas descritas por efectores finales de robots, etc, para lo cual se espera que este trabajo sea de inicial aporte.

Las fotografías de las **Figuras 17,18 y 19** pertenecen a las experiencias.

Los algoritmos desarrollados pueden obtenerse via e-mail por pedido a los autores.

### 11. Anexo I. Desarrollo analítico y numérico de una superficie con malla de 3x3 puntos de control.

De una malla de 3x3 puntos de control, o sea, de grado 2 en ambas direcciones paramétricas, resulta una superficie bicuadrática, donde las funciones de Bernstein aplicando [4] son:

$$\begin{aligned} J_{2,0}(u) &= \binom{2}{0} u^0 (1-u)^2 = \left( \frac{2}{0!(2-0)!} \right) (1-u)^2 = (1-u)^2 \\ J_{2,1}(u) &= \binom{2}{1} u^1 (1-u)^1 = \left( \frac{2}{1!(2-1)!} \right) u(1-u) = 2u(1-u) \\ J_{2,2}(u) &= \binom{2}{2} u^2 (1-u)^0 = \left( \frac{2}{2!(2-2)!} \right) u^2 = u^2 \end{aligned} \quad [10]$$

La suma de las funciones es igual a 1.

$$J_{2,0}(u) + J_{2,1}(u) + J_{2,2}(u) = (1-u)^2 + 2u(1-u) + u^2 = 1^2 - 2u + u^2 + 2u - 2u^2 + u^2 = 1 \quad [11]$$

Expresar la ecuación [2] como el desarrollo de la serie es muy engorroso, por la gran cantidad de términos. Para su estudio, como para su implementación, se utiliza la expresión matricial más compacta, que para la malla 3x3 es:

$$Q(u, v) = [J][B][K] \quad [12]$$

El vector  $J$  posee las bases de Bernstein calculadas según [6]:

$$[J] = \begin{bmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{bmatrix} \quad [13]$$

Las funciones de  $K$  tienen igual forma en este caso porque los órdenes son iguales:

$$[K] = \begin{bmatrix} (1-v)^2 & 2v(1-v) & v^2 \end{bmatrix} \quad [14]$$

La malla está compuesta de los siguientes puntos (**Figura 1**):

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \ 0 \ 0] & [100 \ 0 \ 150] & [200 \ 0 \ 0] \\ [0 \ 100 \ 150] & [100 \ 100 \ 220] & [200 \ 100 \ 150] \\ [0 \ 200 \ 0] & [100 \ 200 \ 150] & [200 \ 200 \ 0] \end{bmatrix} \quad [15]$$

Luego, la expresión matricial [12] toma la forma:

$$Q(u, v) = \begin{bmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{bmatrix} \quad [16]$$

Si bien esta ecuación parece fácil de entender, haremos el producto matricial, desarrollando paralelamente una explicación gráfica en la **Figura 20**.

$$\begin{aligned}
Q(u, v) = & \left\{ (1-u)^2 B_{0,0} + 2u(1-u)B_{1,0} + u^2 B_{2,0} \right\} (1-v)^2 + \\
& + \left\{ (1-u)^2 B_{0,1} + 2u(1-u)B_{1,1} + u^2 B_{2,1} \right\} 2v(1-v) + \\
& + \left\{ (1-u)^2 B_{0,2} + 2u(1-u)B_{1,2} + u^2 B_{2,2} \right\} v^2
\end{aligned} \tag{17}$$

Donde cada llave es la expresión de una curva de Bézier de parámetro  $u$ , al evaluarlas en un valor  $u_0$  se transformarán en puntos  $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$  de cada curva,

$$Q(u_0, v) = \{P_0(u_0)\}(1-v)^2 + \{P_1(u_0)\}2v(1-v) + \{P_2(u_0)\}v^2 \tag{18}$$

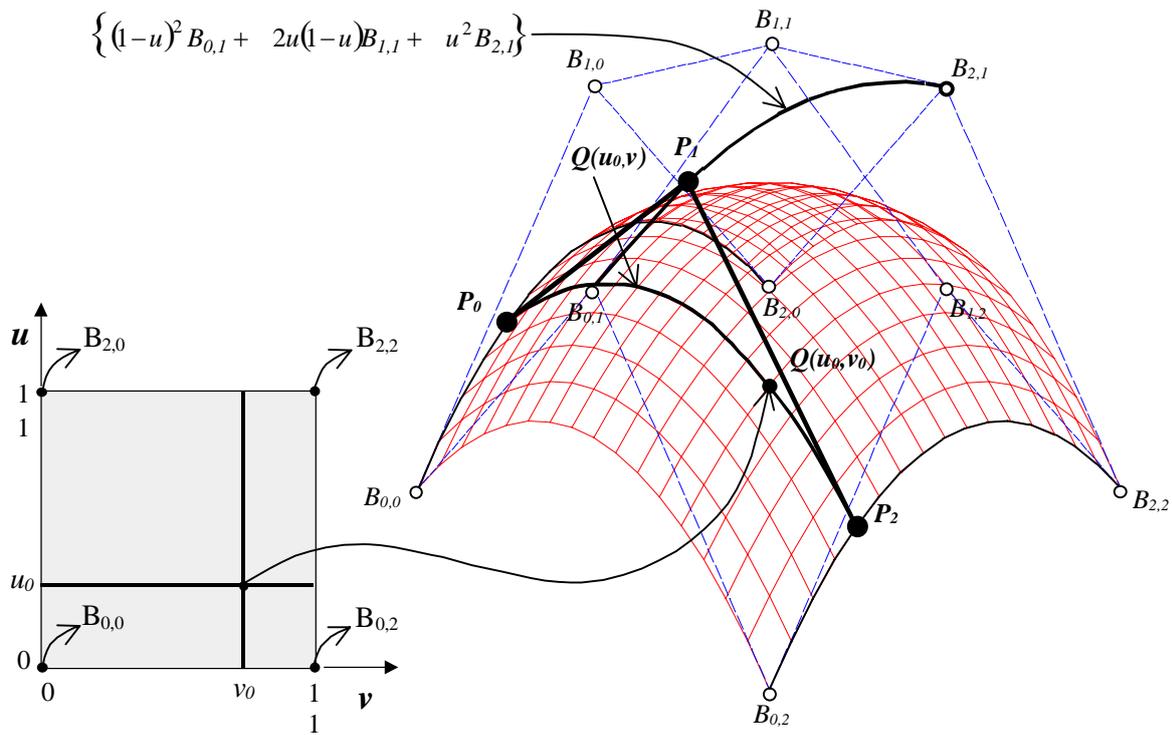
que formarán un polígono de la curva de parámetro  $v$  perteneciente a la superficie.

$$Q(u_0, v_0) = \{P_0(u_0)\}(1-v_0)^2 + \{P_1(u_0)\}2v_0(1-v_0) + \{P_2(u_0)\}v_0^2 \tag{19}$$

Cada término es un vector de tres coordenadas, luego:

$$Q(u_0, v_0) = [x_0 \quad y_0 \quad z_0] \tag{20}$$

es el punto resultante en la superficie.



**Figura 20. Representación gráfica del desarrollo teórico de la malla 3x3. Se muestra además el dominio paramétrico con sus puntos notables.**

La superficie toma el valor de los vértices de la malla para los puntos extremos del dominio, por ejemplo, para  $v=1$ , nos queda el último término de [17] y en éste, si  $u=1$ , se anulan los dos primeros sumandos y entonces se tiene:  $Q(u=1, v=1)=B_{2,2}$

## 12. Anexo II. Expresión matricial de las derivadas parciales de una superficie con malla de 3x3 puntos de control.

Derivadas parciales de la ecuación [16]:

$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} = \begin{bmatrix} -2(1-u) & 2(1-2u) & 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{bmatrix} \quad [21]$$

$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial v} = \begin{bmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2(1-v) \\ 2(1-2v) \\ 2v \end{bmatrix} \quad [22]$$

Puede observarse que las derivadas parciales se obtienen derivando las funciones de Bernstein del parámetro correspondiente.

### 13. Agradecimientos

Agradecemos con respetuoso afecto a Juan Carlos Baghini, por la colaboración con material propio fruto de su tesis de postgrado, al apoyo incondicional del doctor Luis Rafael Canali con su bibliografía especializada, al ingeniero Roberto Santiago Apóstoli por introducirnos varios años atrás en esta apasionante línea de investigación y al amigo Sergio Carrara por su colaboración con los mecanizados y el aporte de su larga experiencia en nuestro centro, en el fresado a CNC. Finalmente, agradecemos al profesor Aureo Campos Ferreira<sup>(3)</sup>, por permitirnos presentar este trabajo en la Reunión RIBAMEC 99<sup>(4)</sup>, llevada a cabo del 11 al 15 de octubre en Florianópolis, Brasil.

### 14. Bibliografía Citada

HAWKES B., 1989. "CAD/CAM" Editorial Paraninfo. Capítulo 1 (pág.11 a 17), capítulo5 (pág.89 a 122).

CINCUNEGUI D. 1996. "Mecánica sólida"; "Lo que se dice Paramétrico". Revista CADXPress. Año 3 Número 24. (Pág 17 a 20 y pág. 32 a 35).

ROGERS D. F., ADAMS J.A., 1990. "Mathematical Elements for Computer Graphics, 2<sup>nd</sup> Ed",. Editorial Mc Graw-Hill, Capítulo 5 (pág.289 a 305), capítulo 6 (pág. 435 a 445).

BEZIER P.E., 1972. "Mathematics and Applications for Numerical Control", Editorial John Wiley & Sons. (pág. 169 y170).

BAGHINI J.C., 1988. "Curso de introducción al Sistema Unisurf", Renault Argentina S.A. Planta de Matrices. Formación Interna.

CHOI B.K, LEE C.S., HWANG J.S., JUN C.S., Abril 1988. "Compound Surface Modelling and Machining". Computer Aided Design-Vol.20-Núm.3-Butterworth & Co. Ltd.(Pág. 127 a 133).

PIEGL L., TILER W., 1997. "The NURBS Book", Springer - Alemania (Foreward y pág 35 a 116).

<sup>3</sup> Director de la carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad Federal de Santa Catarina, Director del Grupo Control Numérico de dicha universidad y coordinador de la Red Iberoamericana de Automatización de los procesos de Mecanizado.

<sup>4</sup> A partir de dicha reunión el centro CUDAR participó de dos proyectos internacionales.