

Mecánica de Sólidos

Capítulo II: Deformación y movimiento

Víctor Fachinotti, Juan C. Álvarez Hostos

Programa de Doctorado en Ingeniería
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)

20 de septiembre de 2018

Observador y evento

- **Observador:** herramienta para medir cantidades f́isicas, particularmente, posiciones relativas de puntos y progreso del tiempo.
- **Evento:** para un observador O , es un feńomeno f́isico que ocurre en $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ al instante $t \in \mathbb{R}$: $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$
- Formalmente, **observador** es un mapeo 1-a-1 que asigna a un evento un par $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$.
- Dos eventos distintos (\mathbf{x}, t) y (\mathbf{x}_0, t_0) , como los ve O , est́an separados por una distancia $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ en \mathcal{E} y un intervalo $t - t_0$ en \mathbb{R} .

Transformaci3n de observador

- Sean dos observadores O y O^* , de modo que el evento (\mathbf{x}, t) registrado por O sea el mismo que el evento (\mathbf{x}^*, t^*) registrado por O^* .
- O y O^* deben ponerse de acuerdo en las unidades de medida de distancia y tiempo.
- **Transformaci3n de observador:** mapeo $\mathcal{E} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbb{R}$ t.q.

$$(\mathbf{x}, t), (\mathbf{x}_0, t_0) \longrightarrow (\mathbf{x}^*, t^*), (\mathbf{x}_0^*, t_0^*)$$

para (\mathbf{x}, t) arbitrario, (\mathbf{x}_0, t_0) fijo y arbitrario.

- Para preservar $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ y $t - t_0$, el mapeo debe ser

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^* = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t^* = t - a$$

con $a \in \mathbb{R}$ constante, y $\mathbf{Q}(t)$ tensor ortogonal.

- La transformación de observador puede expresarse alternativamente como

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}_0}_{\mathbf{c}(t)}, \quad t^* = t - a \quad (1)$$

- **Nota:** trabajaremos con **transformaciones de observador que preservan orientación**, de modo que $\mathbf{Q}(t)$ es ortogonal propio, i.e. $\mathbf{Q}(t) \in SO3$ ($SO3$: grupo de rotaciones en el espacio Euclídeo 3D).

Marco de referencia

- Supongamos que O elige $\{o, \mathbf{e}_i\}$, fija respecto de O , y O^* elige $\{o^*, \mathbf{e}_i^*\}$, fija respecto de O^* . Luego:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}^* = x_i^* \mathbf{e}_i^*$$

- El sistema de coordenadas adoptado por un observador constituye el **marco de referencia** de ese observador.

Marco de referencia

- Si $\{o, \mathbf{e}_i\}$ es el marco de referencia de O y $\{o^*, \mathbf{e}_i^*\}$ el de O^* :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}^* = x_i^* \mathbf{e}_i^*$$

con $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}_i$.

- Luego, la transformación de observador resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}, & t^* &= t - a \\ x_i^* \mathbf{e}_i^* &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)x_i \mathbf{e}_i \\ (\cdot \mathbf{e}_j^*) \quad x_i^* \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* &= \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{e}_j^* + x_i [\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i] \cdot \mathbf{e}_j^* \\ x_j^* &= c_j^*(t) + x_j \end{aligned}$$

- ⇒ Salvo la traslación de origen, los observadores asignaron las mismas coordenadas a un mismo evento.

Configuración de un cuerpo

- **Cuerpo** B : conjunto de *partículas o puntos materiales* en correspondencia 1-a-1 con $\mathcal{B} \in \mathcal{E}$. Si B se mueve, la región \mathcal{B} que ocupa en \mathcal{E} cambia.
- **Configuración** de B : mapeo 1-a-1 $\chi : B \rightarrow \mathcal{E}$ (partícula X a lugar ocupado \mathbf{x}).
 - Se supone que χ y χ^{-1} tienen hasta derivadas segundas continuas (excluimos, por ej., ondas de choque).
- Para una partícula genérica $X \in B$ tenemos:

$$\mathbf{x} = \chi(X), \quad X = \chi^{-1}(\mathbf{x})$$

- $\mathcal{B} \equiv \chi(B) = \{\chi(X), X \in B\}$: lugar ocupado por B en la configuración χ .

Movimiento

- **Movimiento** de B : familia de configuraciones $\chi_t : B \rightarrow \mathcal{E}$ con el tiempo t como ́nico parámetro:

$$\mathbf{x} = \chi_t(X) = \chi(X, t) \quad (2)$$

- Dos observadores O y O^* ven la part́cula X moverse de acuerdo a:

$$\mathbf{x} = \chi(X, t), \quad \mathbf{x}^* = \chi^*(X, t^*)$$

- $\chi^*(X, t^*)$ se define por la transformaci3n de observador (1):

$$\chi^*(X, t^*) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\chi(X, t), \quad t^* = t - a \quad (3)$$

Velocidad y aceleraci3n para diferentes observadores

- Velocidad y aceleraci3n vistas por O :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t), \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(X, t)$$

- Velocidad y aceleraci3n vistas por O^* : por (3) resulta:

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial t^*}(X, t^*) = \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t) + \dot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \chi(X, t) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi^*}{\partial t^{*2}}(X, t^*) &= \mathbf{Q}(t) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(X, t) + \ddot{\mathbf{c}}(t) \\ &+ 2\dot{\mathbf{Q}}(t) \frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t) + \ddot{\mathbf{Q}}(t) \chi(X, t) \end{aligned} \quad (5)$$

- Dos observadores ven velocidades y aceleraciones distintas por el movimiento relativo entre ambos.

Configuraci3n de referencia

- **Configuraci3n de referencia:** configuraci3n \mathcal{B}_0 a un instante dado $t = t_0$ arbitrario, tal que las part́culas $X \in \mathcal{B}$ pueden identificarse por su posici3n $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$:

$$\mathbf{X} = \chi_0(X), \quad X = \chi_0^{-1}(\mathbf{X}) \quad (6)$$

- $\mathcal{B}_0 = \chi_0(B)$: regi3n que ocupa B en la configuraci3n de referencia χ_0 .
- $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_t = \chi_t(B)$: regi3n que ocupa B en la configuraci3n actual χ_t .
- La posici3n actual resulta:

$$\mathbf{x} = \chi(X, t) = \chi(\chi_0^{-1}(\mathbf{X}), t)$$

Deformación (“deformation”)

- En adelante, identificaremos las partículas $X \in B$ con su posición $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$. Luego:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

- Claramente, χ depende de la configuración de referencia elegida.
- **Nota:** a diferencia de **configuración**, **deformación** implica que existe una referencia.

"Deformation" para dos observadores

- Dos observadores O y O^* ven deformaciones

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{x}^* = \chi^*(\mathbf{X}^*, t^*)$$

donde rige la transformaci3n de observador:

$$\chi^*(\mathbf{X}^*, t^*) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{X}, t), \quad t^* = t - a$$

- Sean \mathbf{X} y \mathbf{X}^* las posiciones de referencia de X para O y O^* , relacionadas por

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{c}(t_0) + \mathbf{Q}(t_0)\mathbf{X}$$

- Por conveniencia, asumimos que la configuraci3n de referencia es independiente del observador. Ello sucede si y s3lo si

$$\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{o}, \quad \mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$$

"Deformation" para dos observadores

- Un observador puede elegir marcos de referencia distintos para configuraciones distintas.
- En la configuración actual elige $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_i\}$ tal que:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

- x_i : coordenadas Eulerianas, espaciales o actuales de la partícula X .
- En la configuración de referencia elige $\{\mathbf{O}, \mathbf{E}_\alpha\}$ tal que:

$$\mathbf{X} = X_\alpha \mathbf{E}_\alpha$$

- X_α : coordenadas Lagrangianas, materiales o de referencia de la partícula X .

Nota: usamos letras griegas para componentes respecto de $\{\mathbf{E}_\alpha\}$.

Descripción Euleriana y Lagrangiana de campos tensoriales

- Dado f campo escalar, vectorial o tensorial sobre \mathcal{B} , el campo correspondiente F sobre \mathcal{B}_0 se obtiene haciendo:

$$f(\mathbf{x}) = f(\chi(\mathbf{X})) \equiv F(\mathbf{X})$$

- Igualmente, dado F definido sobre \mathcal{B}_0 , el campo correspondiente f sobre \mathcal{B} se obtiene haciendo

$$F(\mathbf{X}) = F(\chi^{-1}(\mathbf{x})) \equiv f(\mathbf{x})$$

- **Descripción Lagrangiana:** involucra campos definidos sobre \mathcal{B}_0 .
- **Descripción Euleriana:** involucra campos definidos sobre \mathcal{B} .

Derivadas temporales Lagrangianas y Eulerianas

- Sea $f(\mathbf{x}, t) = f(\chi(\mathbf{X}, t), t) = F(\mathbf{X}, t)$ un campo tensorial.
 - **Derivada temporal Euleriana o espacial:**

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}$$

- **Derivada temporal Lagrangiana o material:**

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial F}{\partial t}$$

- La velocidad de la partícula material \mathbf{X} es

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

- Las derivadas material y espacial se relacionan por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f$$

Movimiento de cuerpo rígido

- **Movimiento de cuerpo rígido** de B : aquél en que dos partículas cualesquiera del cuerpo preservan su distancia.
- El movimiento $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ visto por O es **rígido** si y sólo si:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$$

donde

- $\mathbf{c}(t)$ es una traslación pura del cuerpo.
- $\mathbf{Q}(t)$ es una rotación pura del cuerpo.
- Dos movimientos $\mathbf{x} = \chi(\mathcal{B}_0, t)$ y $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\chi}(\mathcal{B}_0, t)$ **difieren en un movimiento rígido** si y sólo si:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}$$

Gradiente de deformación

- Consideremos un único observador O con dos bases Cartesianas: $\{\mathbf{O}, \mathbf{E}_\alpha\}$ para \mathcal{B}_0 y $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_i\}$ para \mathcal{B} .
- Sea $d\mathbf{X} = dX_\alpha \mathbf{E}_\alpha$ un **elemento material de línea** o **fibra** en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$. Tras la deformación, $d\mathbf{X}$ se transforma en $d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{e}_i$ en $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. Por la regla de la cadena:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} dX_\alpha$$

$$\implies d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_\alpha) \mathbf{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_\alpha) d\mathbf{X} = \mathbf{A} d\mathbf{X}$$

- \mathbf{A} es el **gradiente de deformación** relativa a \mathcal{B}_0 :

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}}_{A_{i\alpha}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_\alpha \equiv \text{Grad } \mathbf{x}$$

Gradiente de deformación

- La ley

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A} d\mathbf{X} \quad (7)$$

define la transformación de $d\mathbf{X}$ a $d\mathbf{x}$, fibras formadas por los mismos puntos materiales.

- Esta transformación es lineal localmente: \mathbf{A} depende de \mathbf{X} , pero no de $d\mathbf{X}$.
- $\mathbf{A} d\mathbf{X} = \mathbf{0}$ es imposible para $d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ ya que implicaría colapso de la fibra.
- $\Rightarrow \mathbf{A}$ no es singular.
- $\Rightarrow J = \det \mathbf{A} \neq 0$.
- $\Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$

Ejercicio

Si ϕ es un campo escalar sobre \mathcal{B} y $\Phi(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{x}) \equiv \phi(\chi(\mathbf{X}))$, mostrar que

$$\text{Grad } \Phi = \mathbf{A}^T \text{grad } \phi$$

Ejercicio

Si \mathbf{v} es un campo vectorial sobre \mathcal{B} , siendo $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\chi(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\mathbf{X})$ mostrar que

$$\text{Grad } \mathbf{V} = (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{A}$$

Gradiente de deformación inversa

- Se define el **gradiente de deformación inversa** $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-T}$, tal que

$$d\mathbf{X} = \mathbf{B}^T d\mathbf{x} \quad (8)$$

- Usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} dX_\alpha &= \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} dx_j \\ \implies d\mathbf{X} &= dX_\alpha \mathbf{E}_\alpha = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{E}_\alpha = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} (\mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{e}_j) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (9)$$

Comparando (8) y (9):

$$\mathbf{B}^T = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{e}_j \implies \mathbf{B} = \underbrace{\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j}}_{B_{j\alpha}} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_\alpha \quad (10)$$

Tensores de deformación de Cauchy-Green

- **Tensor de deformación de Cauchy-Green derecho $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$:**

- $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es simétrico
- $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es definido positivo, pues

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) d\mathbf{X} = (\mathbf{A} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{A} d\mathbf{X}) = |\mathbf{A} d\mathbf{X}|^2 > 0, \quad \forall d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$$

- **Tensor de deformación de Cauchy-Green izquierdo $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$:**

- $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ es simétrico
- $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ es definido positivo

- De la misma manera, se demuestra que los tensores $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ son simétricos y definidos positivos.

Deformación de volumen

- Sean $d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{X}^{(2)}$ y $d\mathbf{X}^{(3)}$ no coplanares en \mathcal{B}_0 y con orientación positiva, i.e.:

$$0 < \det \left(\left[d\mathbf{X}^{(1)}, d\mathbf{X}^{(2)}, d\mathbf{X}^{(3)} \right] \right) = dV$$

dV : volumen del paralelepípedo de lados $d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{X}^{(2)}$, $d\mathbf{X}^{(3)}$

- Tras la deformación, $d\mathbf{X}^{(i)}$ se transforma en

$$d\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{A} d\mathbf{X}^{(i)}$$

- El volumen del paralelepípedo de lados $d\mathbf{x}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)}$, $d\mathbf{x}^{(3)}$ es

$$\begin{aligned} dv &= \det \left(\left[d\mathbf{x}^{(1)}, d\mathbf{x}^{(2)}, d\mathbf{x}^{(3)} \right] \right) \\ &= \det \left(\mathbf{A} \left[d\mathbf{X}^{(1)}, d\mathbf{X}^{(2)}, d\mathbf{X}^{(3)} \right] \right) = (\det \mathbf{A}) dV = J dV \quad (11) \end{aligned}$$

Deformación de volumen

- Debe preservarse la orientación de $\{d\mathbf{X}^{(i)}\}$ bajo deformación, por lo tanto $d v > 0$ y

$$J = \det \mathbf{A} > 0$$

- La deformación en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ se dice **isocora** si

$$J = \det \mathbf{A} = 1 \tag{12}$$

- Si $J = 1 \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$, la deformación del cuerpo es isocora.
- La deformación de B puede conservar el volumen global, sin que se satisfaga (12) $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$.

Deformación de superficie

- Sea un elemento de área orientado $d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS$ en un entorno de $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ (\mathbf{N} versor normal).
- Sea $d\mathbf{X}$ una fibra cortando $d\mathbf{S}$ de forma que $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} > 0$.
- El cilindro de base dS y generatriz $d\mathbf{X}$ tiene volumen

$$dV = d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{X}.$$

- Tras la deformación,

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{S} &\longrightarrow d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds && (\mathbf{n} : \text{versor normal}) \\
 d\mathbf{X} &\longrightarrow d\mathbf{x} \\
 dV &\longrightarrow dv = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Fórmula de Nanson

- Por (11):

$$d v = J d V = J d \mathbf{S} \cdot d \mathbf{X} \quad (14)$$

- Por (13):

$$d v = d \mathbf{x} \cdot d \mathbf{s} = \mathbf{A} d \mathbf{X} \cdot d \mathbf{s} = (\mathbf{A}^T d \mathbf{s}) \cdot d \mathbf{X} \quad (15)$$

- De (14) y (15):

$$J d \mathbf{S} = \mathbf{A}^T d \mathbf{s}$$

de donde se deduce la **fórmula de Nanson**:

$$d \mathbf{s} = J \mathbf{B} d \mathbf{S} \quad \text{o} \quad \mathbf{n} d \mathbf{s} = J \mathbf{B} \mathbf{N} d S$$

Nota: en general, el material de \mathbf{N} no es el mismo que el de \mathbf{n} .

Material indeformado

- Decimos que un material está **indeformado** (“**unstrained**”) en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ si la longitud de una fibra arbitraria $d\mathbf{X}$ en \mathbf{X} no cambia bajo deformación, o sea:

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (16)$$

- El **movimiento rígido** deja el material sin deformar.
- Si se verifica (16) $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$, el cuerpo está indeformado.

Ejercicio

Mostrar que para un cuerpo indeformado, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{Q}$ es ortogonal propio, independiente de $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$.

Tensor Lagrangiano de deformación

- El material se dice **deformado** (“strained”) si

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (17)$$

no es nulo.

- El **tensor de deformación** (“strain”) **Lagrangiano** o de **Green** o de **Green-Lagrange** \mathbf{E} da una medida del cambio de longitud de las fibras:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = E_{\alpha\beta} \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\beta$$

con:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{i\alpha} A_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial X_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right)$$

Desplazamiento - Gradiente de desplazamiento

- Definimos el **desplazamiento** de la partícula \mathbf{X} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$$

- Definimos el **gradiente de desplazamiento** \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{A} - \mathbf{I}$$

- Luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial X_\beta} \right)}_{E_{\alpha\beta}} \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\beta \end{aligned}$$

con u_α componente del desplazamiento en la base $\{\mathbf{E}_\alpha\}$.

Tensor Euleriano de deformación

- Alternativamente, el material se dice deformado si:

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^T) d\mathbf{x} \neq 0$$

de donde surge como medida del cambio de longitud de las fibras el **tensor de deformación (“strain”) Euleriano o de Almansi** :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^T) = e_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

con:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - B_{i\alpha} B_{j\alpha}) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} \right)$$

Estiramiento y extensión

- Sean \mathbf{M} y \mathbf{m} versores a lo largo de $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{x}$, luego:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}|d\mathbf{x}| &= \mathbf{A}\mathbf{M}|d\mathbf{X}| \\ \Rightarrow |d\mathbf{x}|^2 &= |\mathbf{A}\mathbf{M}|^2|d\mathbf{X}|^2\end{aligned}$$

- Se define el **estiramiento** (“stretch”) en dirección \mathbf{M} como

$$\lambda(\mathbf{M}) = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} = |\mathbf{A}\mathbf{M}| \quad (18)$$

- Siendo $\det \mathbf{A} > 0$, resulta $0 < \lambda(\mathbf{M}) < \infty \forall \mathbf{M} \neq \mathbf{o}$.
- Extensión:** $|d\mathbf{x}| - |d\mathbf{X}|$
- Relación de extensión:** $\frac{|d\mathbf{x}| - |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|} = \lambda(\mathbf{M}) - 1$
- Nota:** $\lambda(\mathbf{M}) = 1 \forall \mathbf{M}$ unitario $\iff \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Corte

- Sean $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{X}'$ en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$. Luego:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A} d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{x}' = \mathbf{A} d\mathbf{X}'$$

- Sean \mathbf{M} y \mathbf{M}' versores a lo largo de $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{X}'$ formando el ángulo Θ , y \mathbf{m} y \mathbf{m}' versores a lo largo de $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{x}'$ en $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ formando el ángulo θ :

$$\cos \Theta = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{|d\mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{A} d\mathbf{X}}{|d\mathbf{x}|} \cdot \frac{\mathbf{A} d\mathbf{X}'}{|d\mathbf{x}'|} = \frac{|d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{x}|} \frac{|d\mathbf{X}'|}{|d\mathbf{x}'|} \mathbf{A} \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \mathbf{M}' \\ &= \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{M}')}{\lambda(\mathbf{M}) \lambda(\mathbf{M}')} \end{aligned}$$

- Se define como **ángulo de corte** de las direcciones \mathbf{M} y \mathbf{M}' , en el **plano de corte** dado por \mathbf{M} y \mathbf{M}' , a la diferencia $\Theta - \theta$.

Descomposición polar de tensores de 2° orden

- **Lema:** A todo tensor de 2° orden, simétrico y definido positivo \mathbf{T} , le corresponde un único tensor de 2° orden, simétrico y definido positivo \mathbf{U} , tal que $\mathbf{T} = \mathbf{U}^2$.
- **Teorema de descomposición polar:** para todo tensor de 2° orden \mathbf{A} no singular, existen dos únicos tensores de 2° orden \mathbf{U} y \mathbf{V} , simétricos y definidos positivos, y un único tensor ortogonal de 2° orden \mathbf{R} tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$$

Demostración del teorema de descomposición polar (1/3)

- Como $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ son simétricos y definidos positivos, $\exists! \mathbf{U}, \mathbf{V}$ simétricos definidos positivos tales que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{V}^2$$

Definimos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}$$

Luego:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$$

Q.E.D. que $\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1}$ es ortogonal.

Similarmente, se demuestra que $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}$ es ortogonal.

Demostración del teorema de descomposición polar (2/3)

- Supongamos que existan tensores de 2° orden \mathbf{R}' ortogonal y \mathbf{U}' simétrico y definido positivo, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}'\mathbf{U}'$. Luego:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{U}'^{-1}\mathbf{R}'^T \\ \mathbf{R}^T = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}'\mathbf{R}'^T = \mathbf{R}^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}'^2 \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{U}' \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}'$$

- ⇒ los tensores de 2° orden \mathbf{R} ortogonal y \mathbf{U} simétrico y definido positivo tales que $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ son únicos.
- Se procede similarmente para demostrar que \mathbf{V} y \mathbf{S} son únicos.

Demostración del teorema de descomposición polar (3/3)

- Falta demostrar la unicidad de \mathbf{R} , o sea $\mathbf{R} \equiv \mathbf{S}$. Siendo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{S} = (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)\mathbf{V}\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T\mathbf{V}\mathbf{S})$$

- $\mathbf{S}^T\mathbf{V}\mathbf{S}$ es simétrico y definido positivo, y es único, igual a \mathbf{U} . Luego:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{U} \implies \mathbf{S} \equiv \mathbf{R}$$

- Nótese que

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$$

Descomposición polar del gradiente de deformación

- Apliquemos el teorema de descomposición polar al gradiente de deformación \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (19)$$

- **Tensores de estiramiento derecho e izquierdo: \mathbf{U} y \mathbf{V}**
- Como $J = \det \mathbf{A} > 0$ y además $\det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} > 0$ (por ser \mathbf{U} y \mathbf{V} definidas positivas), \mathbf{R} debe ser *ortogonal propia* y

$$J = \frac{dV}{dV} = \det \mathbf{A} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V}$$

- **Rotación rígida: $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}$**
- **Deformación pura (“pure strain”): $\mathbf{R} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$**

Descomposición polar del gradiente de deformación

- Tensor de deformación de Cauchy-Green derecho:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{U}^2$$

- Tensor de deformación de Cauchy-Green izquierdo:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{V}^2$$

- Tensor de “strain” Lagrangiano:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})$$

- Tensor de “strain” Euleriano:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2})$$

Estiramientos principales

Por (18), el estiramiento en la dirección \mathbf{M} es

$$\lambda(\mathbf{M}) = \{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{U}^2 \mathbf{M})\}^{1/2} = |\mathbf{U} \mathbf{M}|$$

Si $\lambda_i, \mathbf{u}^{(i)}$ es autopar de \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \quad i = 1, 2, 3$$

Luego, si $\mathbf{u}^{(i)}$ es unitario, resulta:

$$\lambda(\mathbf{u}^{(i)}) = |\mathbf{U} \mathbf{u}^{(i)}| = \lambda_i$$

λ_i : **estiramientos principales**

- Además,

$$\mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{R} \mathbf{u}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \lambda_i, \mathbf{R} \mathbf{u}^{(i)} \text{ es autopar de } \mathbf{V}$$

- Usando λ_i podemos calcular:

$$J = \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Ejercicio

Mostrar que

① $\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}$,

② $\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-2}$,

③ $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{V}^{-2}$,

④ $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ y \mathbf{U} tienen las mismas direcciones principales (coaxiales),

⑤ $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ y \mathbf{V} son coaxiales,

⑥ $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ y $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ tienen valores principales λ_i^{-2} .

Elipsoides de "strain" Eulerianos

- La esfera de centro $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ y radio $|\mathbf{d}\mathbf{X}|$:

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \equiv |\mathbf{d}\mathbf{X}|^2 = cte.$$

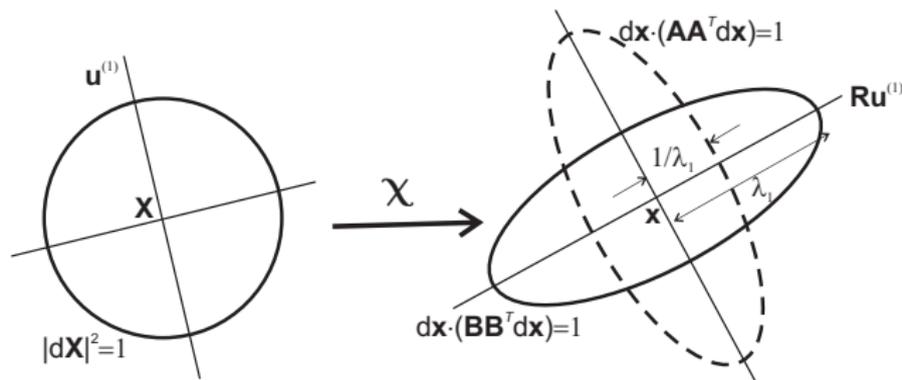
se deforma en el llamado **elipsoide de "strain" Euleriano** de centro $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$:

$$d\mathbf{x} \cdot \underbrace{(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)}_{\mathbf{V}^{-2}} d\mathbf{x} = |\mathbf{d}\mathbf{X}|^2 = cte.$$

- Se define el **elipsoide de "strain" Euleriano recíproco** con centro en $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$:

$$d\mathbf{x} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}_{\mathbf{V}^2} d\mathbf{x} = cte.$$

Elipsoides de "strain" Eulerianos



- **Ejes Eulerianos** = ejes principales de \mathbf{BB}^T = ejes principales de \mathbf{AA}^T = ejes principales de $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)}$
- El **elipsoide de "strain" Euleriano** tiene semiejes de longitud proporcional a λ_i , $i = 1, 2, 3$.
- El **elipsoide de "strain" Euleriano recíproco** tiene semiejes de longitud proporcional a $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

Elipsoides de "strain" Lagrangianos

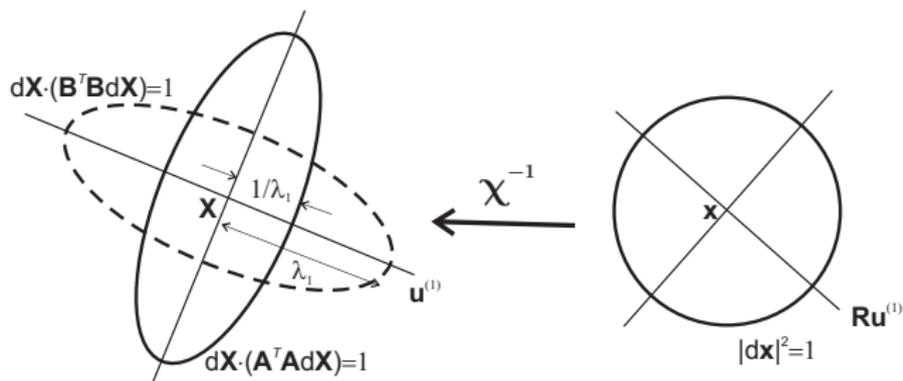
- La esfera $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|^2 = cte.$ con centro en $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ proviene del **elipsoide de "strain" Lagrangiano recíproco** con centro en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$:

$$d\mathbf{X} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}_{\mathbf{U}^2} d\mathbf{X} = |d\mathbf{x}|^2 = cte.$$

- Se define el **elipsoide de "strain" Lagrangiano** con centro en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$:

$$d\mathbf{X} \cdot \underbrace{(\mathbf{B}^T \mathbf{B})}_{\mathbf{U}^{-2}} d\mathbf{X} = cte.$$

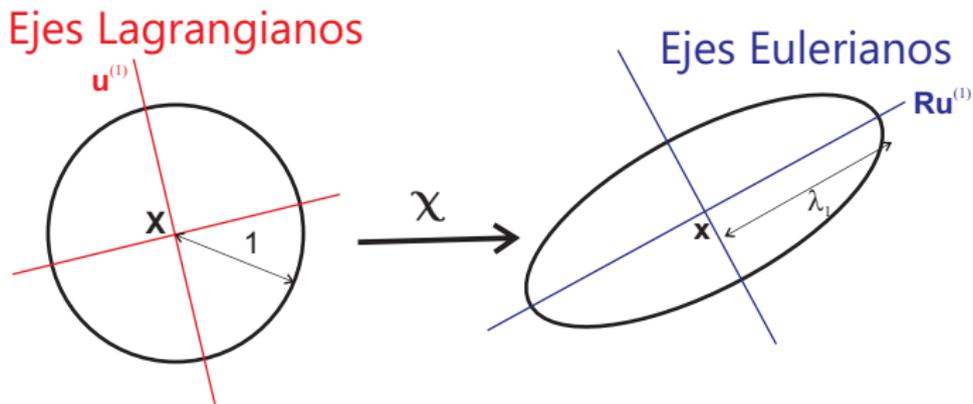
Elipsoides de "strain" Lagrangianos



- **Ejes Lagrangianos** = ejes principales de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ = ejes principales de $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ = ejes principales de $\mathbf{U} = \mathbf{u}^{(i)}$
- El **elipsoide de "strain" Lagrangiano recíproco** tiene semiejes de longitud proporcional a $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.
- El **elipsoide de "strain" Lagrangiano** tiene semiejes de longitud proporcional a λ_i , $i = 1, 2, 3$.

Ejes Eulerianos y Lagrangianos

- Tríadas ortogonales a lo largo de ejes Lagrangianos permanecen ortogonales luego de la deformación siguiendo los ejes Eulerianos.



Descomposición de la deformación

Hay dos formas de ver la deformación:

- **A = RU**

- 1 Aplicar **U**, estirando los elementos de línea a lo largo de ejes Lagrangianos hasta su longitud final:

$$\mathbf{U}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i\mathbf{u}^{(i)}$$

- 2 Rotarlos a su posición final:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)}$$

- **A = VR**

- 1 Rotar los elementos de línea a lo largo de los ejes Lagrangianos a su posición final $\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)}$.
- 2 Aplicar **V** para llevarlos a su longitud final:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i\mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)}$$

Deformación homogénea

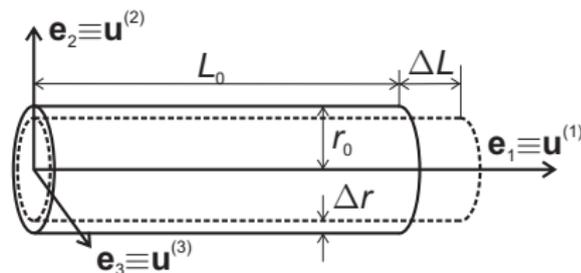
- **Deformación homogénea:** el gradiente de deformación \mathbf{A} es independiente del punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$. La forma más general de una deformación homogénea del cuerpo B desde la configuración de referencia \mathcal{B}_0 es

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{c}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0 \quad (20)$$

donde \mathbf{c} representa una traslación rígida.

Extensión uniforme con contracción lateral

- Extensión uniforme con contracción lateral:** un cuerpo cilíndrico circular de longitud L_0 y radio r_0 en \mathcal{B}_0 se deforma hasta \mathcal{B} por una extensión longitudinal ΔL y una contracción radial Δr . Por simetría, los ejes principales Lagrangianos y Eulerianos coinciden. En \mathcal{B}_0 y \mathcal{B} , adoptamos bases coincidentes con los ejes principales.



- Los estiramientos principales resultan

$$\lambda_1 = \frac{L_0 + \Delta L}{L_0}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{r_0 - \Delta r}{r_0}$$

Extensión uniforme con contracción lateral

- Las componentes de $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ y $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ se relacionan por

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_2 X_3$$

⇒ \mathbf{A} tiene componentes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Deformación isocórica:** $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$

$$\mathbf{A}_{isoc} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Dilatación pura

- **Dilatación pura:** Sea una esfera de diámetro D en \mathcal{B}_0 y d en \mathcal{B} . Por simetría, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = d/D$ y \mathbf{A} resulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

en ejes Lagrangianos y Eulerianos de orientación arbitraria.

- Deformación isocora si $\lambda_1 = 1$.

Deformación plana

- **Deformación plana:** Asumimos deformación nula en la dirección $\mathbf{E}_3 \equiv \mathbf{e}_3$. La deformación confinada al plano normal a esa dirección se dice **plana**. En la base $\{\mathbf{E}_\alpha\} \equiv \{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{A} &= A_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + A_{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \\ &\quad + A_{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (22)$$

- **Deformación plana isocora:** $\det \mathbf{A} = 1$, luego

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$$

Autovalores y autovectores en deformación plana

- Tensor de deformación Cauchy-Green derecho $\mathbf{U}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$: usando (21):

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11}^2 + A_{21}^2 & A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} & 0 \\ A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} & A_{12}^2 + A_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con ecuación característica:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{U}^2 - \lambda^2 \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} A_{11}^2 + A_{21}^2 - \lambda^2 & A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} & 0 \\ A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} & A_{12}^2 + A_{22}^2 - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda^2) \begin{vmatrix} A_{11}^2 + A_{21}^2 - \lambda^2 & A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} \\ A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} & A_{12}^2 + A_{22}^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = 1$ es autovalor.

Autovalores y autovectores en deformación plana

- Al autovalor $\lambda_3 = 1$ le corresponde el autovector $\mathbf{u}^{(3)}$ t.q.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}^2 \mathbf{u}^{(3)} &= (A_{11}^2 + A_{21}^2)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \mathbf{u}^{(3)} + (A_{12}^2 + A_{22}^2)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \mathbf{u}^{(3)} \\
 &+ (A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22})(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \mathbf{u}^{(3)} + \underbrace{(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)}_{\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2} \mathbf{u}^{(3)} \\
 &= \left[(A_{11}^2 + A_{21}^2 - 1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}^{(3)}) + (A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}^{(3)}) \right] \mathbf{e}_1 \\
 &+ \left[(A_{12}^2 + A_{22}^2 - 1)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}^{(3)}) + (A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}^{(3)}) \right] \mathbf{e}_2 \\
 &\quad + \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{(3)}
 \end{aligned}$$

que se verifica solamente si $[\dots] = 0$; para A_{ij} ($i, j = 1, 2$) arbitrario, ello requiere que

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}^{(3)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u}^{(3)} \equiv \mathbf{e}_3$$

Autovalores y autovectores en deformación plana

- Ahora, para determinar λ_1 y λ_2 basta resolver

$$\begin{vmatrix} A_{11}^2 + A_{21}^2 - \lambda^2 & A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} \\ A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} & A_{12}^2 + A_{22}^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

- Siendo $\mathbf{U}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ simétrica y positiva definida, sus autovalores son reales y positivos y sus autovectores forman una tríada ortogonal, de modo que $\mathbf{u}^{(1)}$ y $\mathbf{u}^{(2)}$ yacen en el plano de deformación de normal $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{u}^{(3)}$.

Corte simple

- **Corte simple:** deformación plana isocora para la cual hay una orientación, digamos \mathbf{e}_1 , en la que las fibras conservan su longitud y dirección:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$$

- Usando (22):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= A_{11} \underbrace{(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}_{=(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1} + A_{12} \underbrace{(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1}_{=(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}} + A_{21} \underbrace{(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}_{=(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2} \\ &+ A_{22} \underbrace{(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1}_{=(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}} + \underbrace{(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1}_{=(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}} = A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{21}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$= \mathbf{e}_1 \iff A_{11} = 1, A_{21} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Corte simple

- Además, como el corte simple es isocoro, resulta:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = A_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & A_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

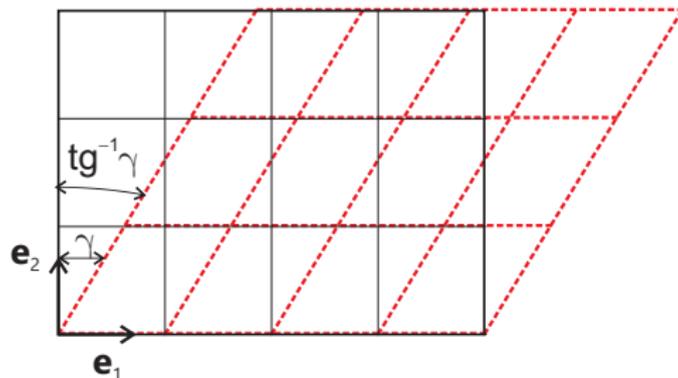
- Llamando $A_{12} = \gamma$, la matriz de componentes de \mathbf{A} respecto de $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

o sea:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$$

Corte simple



Usando (23) en (20) con $\mathbf{c} = \mathbf{o}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X} + \gamma(\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1$$

o, en componentes:

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

Corte simple

- Resumiendo, el gradiente de deformación para corte simple es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$$

donde:

- **Dirección de corte:** \mathbf{e}_1
- **Plano de corte:** \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 (plano de normal $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$)
- **Plano de deslizamiento:** plano de normal \mathbf{e}_2
- **Magnitud del corte:** γ

Corte simple

- Tensor de deformación Cauchy-Green derecho:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} + \gamma(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \gamma^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

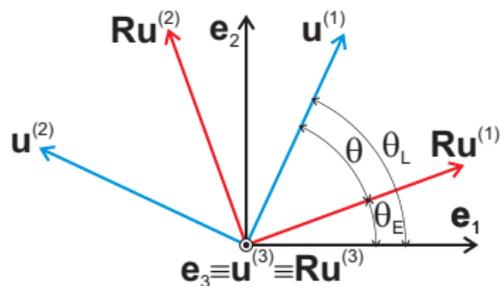
con ecuación característica:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{U}^2 - \lambda^2 \mathbf{I}) &= (1 - \lambda^2) \begin{vmatrix} 1 - \lambda^2 & \gamma \\ \gamma & 1 + \gamma^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda^2) [(1 - \lambda^2)^2 - \lambda^2 \gamma^2] = 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lambda_3 = 1$ y $\lambda \equiv \lambda_1 = 1/\lambda_2 \geq 1$ es solución de la ecuación cuadrática para λ^2 :

$$(1 - \lambda^2)^2 - \lambda^2 \gamma^2 = 0$$

Corte simple



- Cambio de base $\{\mathbf{u}^{(i)}\} \rightarrow \{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{U}^2 \text{ en } \{\mathbf{e}_i\} \\
 \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{Q}^T \text{ ortog. propia} \\
 \begin{bmatrix} \cos \theta_L & -\text{sen } \theta_L & 0 \\ \text{sen } \theta_L & \cos \theta_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{U}^2 \text{ en } \{\mathbf{u}^{(i)}\} \\
 \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{Q} \text{ ortog. propia} \\
 \begin{bmatrix} \cos \theta_L & \text{sen } \theta_L & 0 \\ -\text{sen } \theta_L & \cos \theta_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \\
 =
 \begin{bmatrix} \lambda^2 \cos^2 \theta_L + \lambda^{-2} \text{sen}^2 \theta_L & (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \text{sen } \theta_L \cos \theta_L & 0 \\ (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \text{sen } \theta_L \cos \theta_L & \lambda^2 \text{sen}^2 \theta_L + \lambda^{-2} \cos^2 \theta_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)
 \end{array}$$

Corte simple

- Por (24):

$$\lambda^2 \cos^2 \theta_L + \lambda^{-2} \operatorname{sen}^2 \theta_L = 1 \quad (25)$$

$$\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta_L + \lambda^{-2} \cos^2 \theta_L = 1 + \gamma^2 \quad (26)$$

$$(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \operatorname{sen} \theta_L \cos \theta_L = (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \frac{\operatorname{sen} 2\theta_L}{2} = \gamma \quad (27)$$

- De (25)+(26):

$$\lambda^2 + \lambda^{-2} = 2 + \gamma^2 \implies \gamma = \lambda - 1/\lambda$$

- Hacemos (25)-(26):

$$(\lambda^2 - \lambda^{-2})(\cos^2 \theta_L - \operatorname{sen}^2 \theta_L) = (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \cos 2\theta_L = -\gamma^2 \quad (28)$$

- Hacemos (27)/(28):

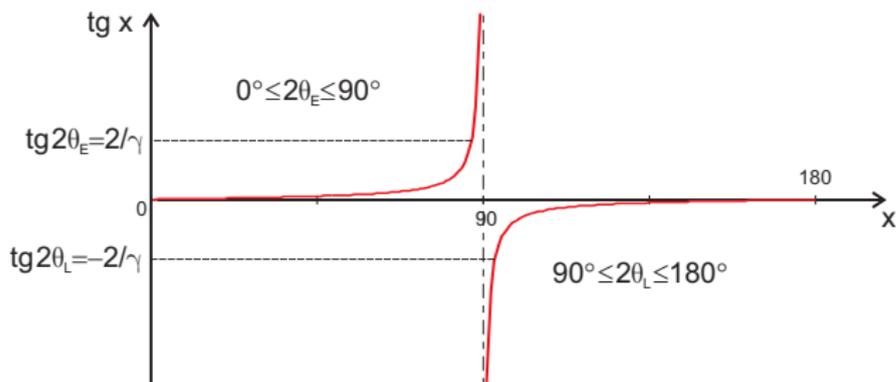
$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\theta_L = -1/\gamma \implies \operatorname{tg} 2\theta_L = -2/\gamma$$

Corte simple

- Ídem para $\mathbf{AA}^T = \mathbf{V}^2$, tenemos la orientación de los ejes Eulerianos:

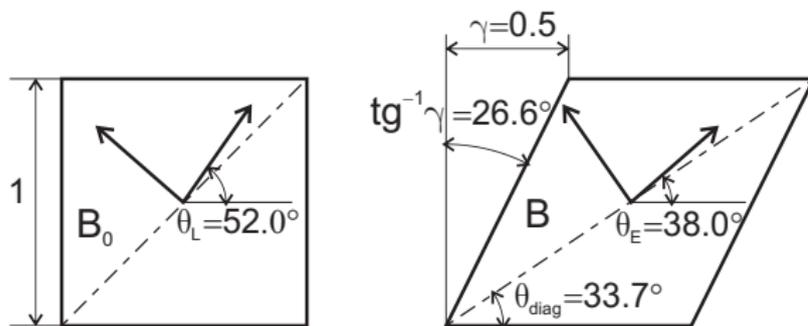
$$\operatorname{tg} 2\theta_E = 2/\gamma$$

- Para $\gamma = 0$, $\theta_L \equiv \theta_E = 45^\circ$.
- Para $\gamma > 0$:

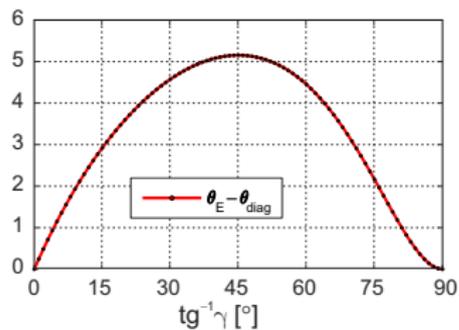
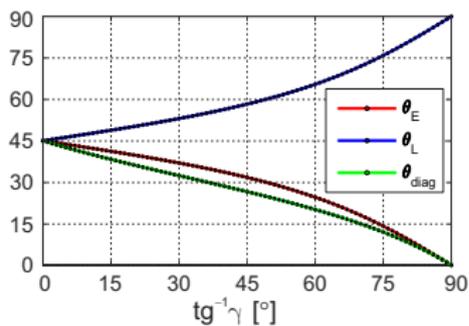


Corte simple

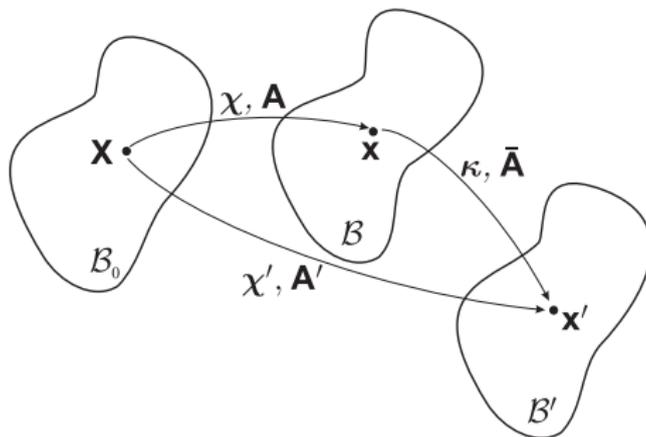
- Para $\gamma = 0,5$:



- θ_L , θ_E , θ_{diag} y $\theta_E - \theta_{diag}$ en función de $\text{tg}^{-1} \gamma$:



Combinación de deformaciones



- Deformación $B_0 \rightarrow B$: $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$.
 - Gradiente de deformación: $\mathbf{A} = \text{Grad } \chi(\mathbf{X})$
- Deformación $B_0 \rightarrow B'$: $\mathbf{x}' = \chi'(\mathbf{X}) = \kappa(\mathbf{x})$, con $\kappa : B \rightarrow B'$.
 - Gradiente de deformación: $\mathbf{A}' = \text{Grad } \chi'(\mathbf{X}) = \text{grad}(\kappa(\mathbf{x}))\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}$

Combinación de cortes simples

- Sea el corte simple:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1 \quad (29)$$

- **Dirección de corte:** \mathbf{m}
 - **Plano de corte:** \mathbf{m} - \mathbf{n}
 - **Plano de deslizamiento:** plano de normal \mathbf{n}
- Sea un segundo corte simple:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}, \quad \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0, \quad |\bar{\mathbf{m}}| = |\bar{\mathbf{n}}| = 1 \quad (30)$$

- **Combinación I:** (29) seguida de (30):

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I} + \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \gamma \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \gamma \bar{\gamma} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}) \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} \quad (31)$$

- **Combinación II:** (30) seguida de (29):

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \gamma \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \gamma \bar{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (32)$$

Commutación de cortes simples

- Las combinaciones de cortes simples (31) y (32) **conmutan** si $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}$, luego

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}})\mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{n}} &= (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m})\bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n} \\
 \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}})\mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{n}}] \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot [(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m})\bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{n} \\
 (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})}_{=0} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}) &= (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}) (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}}) \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}_{=1} \\
 \Rightarrow (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}}) &= 0
 \end{aligned}$$

- Luego, hay dos opciones:

- $\bar{\mathbf{m}} = \pm \mathbf{m}$: la deformación compuesta es un corte simple de magnitud $\sqrt{\gamma^2 + \bar{\gamma}^2 \pm 2\gamma\bar{\gamma}\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{n}}}$ en dirección $\bar{\mathbf{m}}$ con planos de deslizamiento normales a $\gamma\mathbf{n} \pm \bar{\gamma}\bar{\mathbf{n}}$.
- $\bar{\mathbf{n}} = \pm \mathbf{n}$: la deformación compuesta es un corte simple de magnitud $\sqrt{\gamma^2 + \bar{\gamma}^2 \pm 2\gamma\bar{\gamma}\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}}}$ en dirección $\gamma\mathbf{m} \pm \bar{\gamma}\bar{\mathbf{m}}$ con planos de deslizamiento normales a $\bar{\mathbf{n}}$.

Otra descomposición de la deformación

- **Teorema:** Una deformación arbitraria está compuesta por:
 - extensión isocora con contracción lateral: \mathbf{L}^*
 - corte simple en el plano normal a la dirección de la extensión: \mathbf{S}
 - rotación: \mathbf{R}
 - dilatación pura: \mathbf{D}

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{L}^*$$

Otra descomposición de la deformación: demostración (1/2)

- Podemos descomponer \mathbf{A} como

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{D} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = J^{1/3}\mathbf{I} & \text{Dilatación pura} \\ \mathbf{A}^* = J^{-1/3}\mathbf{A} & \text{Deformación isocora} \end{cases}$$

- Descomposición polar de \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{U}^* \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{R}^* & \text{Rotación} \\ \mathbf{U}^* & \text{Deformación pura isocora} \end{cases}$$

$$\implies \mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{R}^*\mathbf{U}^*$$

Otra descomposición de la deformación: demostración (2/2)

- Descomposición espectral de $\mathbf{U}^* = J^{-1/3}\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}^* = \lambda_1^* \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(1)} + \lambda_2^* \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} + \lambda_3^* \mathbf{u}^{(3)} \otimes \mathbf{u}^{(3)}$$

donde $\lambda_i^* = J^{-1/3} \lambda_i$, con $\lambda_1^* \lambda_2^* \lambda_3^* = 1$.

- Definiendo $\bar{\lambda}_i = \lambda_i^* \sqrt{\lambda_3^*}$ (tal que $\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = 1$), resulta

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{S}^* \mathbf{L}^*$$

con

$$\mathbf{S}^* = \bar{\lambda}_1 \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(1)} + \bar{\lambda}_1^{-1} \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{u}^{(3)} \otimes \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{R}^{**T} \mathbf{S}$$

$$\mathbf{L}^* = \lambda_3^{*-1/2} \left(\mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} \right) + \lambda_3^* \mathbf{u}^{(3)} \otimes \mathbf{u}^{(3)}$$

- \mathbf{R}^{**T} rotación, \mathbf{S} corte simple en el plano $\mathbf{u}^{(1)}-\mathbf{u}^{(2)}$ (ver ecuación 24)
- \mathbf{L}^* : extensión isocora en $\mathbf{u}^{(3)}$ con contracción en $\mathbf{u}^{(1)}$ y $\mathbf{u}^{(2)}$

$$\implies \mathbf{A} = \mathbf{D}(\mathbf{R}^* \mathbf{R}^{**T}) \mathbf{S} \mathbf{L}^* = \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{L}^* \quad (\text{Q.E.D.})$$

Tensores de "strain" Lagrangianos

- Sujetos a la condición de "strain" = 0 si y sólo si $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$, podemos definir los siguientes tensores de deformación basados en \mathbf{U} (**Lagrangianos**):

$$\begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U} & m = 0 \end{cases}$$

- Los tensores de "strain" Lagrangianos son coaxiales con \mathbf{U} , con valores principales:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} (\lambda_i^m - 1) & m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \\ \ln \lambda_i & m = 0 \end{cases}$$

- La definición puede extenderse a $m \in \mathbb{R}$ no nulo definiendo $\frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I})$ como un tensor coaxial con \mathbf{U} con valores principales $\frac{1}{m}(\lambda_i^m - 1)$.

Tensores de "strain" Eulerianos

- Sujetos a la condición de "strain" = 0 si y sólo si $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$, podemos definir los siguientes tensores de deformación basados en \mathbf{V} (**Eulerianos**):

$$\begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{V}^m - \mathbf{I}) & m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \\ \ln \mathbf{V} & m = 0 \end{cases}$$

- Los tensores de "strain" Eulerianos son coaxiales con \mathbf{V} , con valores principales:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} (\lambda_i^m - 1) & m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \\ \ln \lambda_i & m = 0 \end{cases}$$

- La definición puede extenderse a $m \in \mathbb{R}$ no nulo definiendo $\frac{1}{m} (\mathbf{V}^m - \mathbf{I})$ como un tensor coaxial con \mathbf{V} con valores principales $\frac{1}{m} (\lambda_i^m - 1)$.

Generalización de tensores de "strain" Lagrangianos y Eulerianos

- **Generalización:** sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar monótona creciente, t.q. $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1$.

Ahora, podemos definir:

- **Tensores de "strain" Lagrangianos:**

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)}$$

coaxiales con \mathbf{U} y de valores principales $f(\lambda_i)$.

- **Tensores de "strain" Eulerianos:**

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{R} \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{R} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{R} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \mathbf{R}^T$$

coaxiales con \mathbf{V} y de valores principales $f(\lambda_i)$.

Generalización de tensores de "strain" Lagrangianos y Eulerianos

- **Notar:**

- f monótona creciente $\Rightarrow \mathbf{F}$ crece si las fibras se estiran.
- $f'(1) = 1 \Rightarrow$ las medidas de pequeñas deformaciones coinciden.

- **Casos particulares:**

- **Green:** $m = 2$ o $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ t.q.:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \equiv \mathbf{E}$$

- **Hencky:** $m = 0$ o $f(x) = \ln(x)$ t.q:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \ln(\mathbf{U})$$

- **Biot:** $m = 1$ o $f(x) = x - 1$ t.q:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} - \mathbf{I}$$

- **Almansi:** $m = -2$ o $f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^{-2})$ t.q.:

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{B})$$

Gradientes de velocidad

- **Gradiente de velocidad (pp. dicho o Euleriano):**

$$\mathbf{\Gamma} = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

- **Gradiente de velocidad Lagrangiano:**

$$\dot{\mathbf{A}} = \text{Grad } \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \text{ Grad } \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}$$

donde Grad y d/dt conmutan por ser \mathbf{X} y t independientes.

- Dado $d\mathbf{x} = \mathbf{A} d\mathbf{X}$ resulta:

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{A}} d\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma} d\mathbf{x} \quad (33)$$

i.e., $\mathbf{\Gamma}$ mide los cambios de las fibras (longitud y orientación).

Tensor de "strain-rate" Euleriano

- Para el tensor de Green:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{A} \right) \\ &= \mathbf{A}^T \underbrace{\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^T \right)}_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es **tensor de "strain-rate" Euleriano** (parte simétrica de $\boldsymbol{\Gamma}$).

- **Nota:** "strain-rate" \neq "rate of strain" = derivada temporal de "strain": $\boldsymbol{\Sigma}$ no puede expresarse como derivada temporal (Euleriana o Lagrangiana) de un tensor de "strain".

Tensor de "strain-rate" Euleriano

- Sea $d\mathbf{X}$ una fibra en $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$, que se deforma a $d\mathbf{x} = \mathbf{A} d\mathbf{X}$ en $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. Por (17) tenemos:

$$\frac{1}{2} (|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X}$$

Derivando el lado izquierdo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2) = |d\mathbf{x}| \frac{d}{dt} |d\mathbf{x}| = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Sigma} d\mathbf{x}$$

- Si definimos $\mathbf{m} = d\mathbf{x}/|d\mathbf{x}|$, resulta

$$\frac{1}{|d\mathbf{x}|} \frac{d}{dt} |d\mathbf{x}| = \mathbf{m} \cdot \mathbf{\Sigma} \mathbf{m} \quad (34)$$

i.e., $\mathbf{\Sigma}$ es una medida de la tasa con que las fibras materiales cambian de longitud.

Tensor de "strain-rate" Euleriano

- Dada la base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$, hacemos $\mathbf{m} = \mathbf{e}_i$ en (34):

$$\frac{1}{|\mathbf{d}\mathbf{x}|} \frac{d}{dt} |\mathbf{d}\mathbf{x}| = \mathbf{e}_i \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_i) = \Sigma_{ii}$$

$i = 1, 2, 3$ (no se suma en i)

i.e., las componentes diagonales Σ_{ii} son tasas de estiramiento en las direcciones \mathbf{e}_i .

Tensor de "strain-rate" Euleriano

- Usando (33) y (34), resulta

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} = \frac{1}{|d\mathbf{x}|} \frac{d}{dt} d\mathbf{x} - \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|^2} \frac{d}{dt} |d\mathbf{x}| = \Gamma \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \Sigma \mathbf{m}) \mathbf{m} \quad (35)$$

- Sea $d\mathbf{x}' = \mathbf{m}' |d\mathbf{x}'|$, tal que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' = \cos \theta$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}') &= -\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta} |\mathbf{m} \times \mathbf{m}'| \\ &= \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}' + \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{m}}' \\ &= [\Gamma \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \Sigma \mathbf{m}) \mathbf{m}] \cdot \mathbf{m}' + [\Gamma \mathbf{m}' - (\mathbf{m}' \cdot \Sigma \mathbf{m}') \mathbf{m}'] \cdot \mathbf{m} \\ &= -(\mathbf{m} \cdot \Sigma \mathbf{m} + \mathbf{m}' \cdot \Sigma \mathbf{m}') (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}') + \mathbf{m}' \cdot \underbrace{(\Gamma + \Gamma^T)}_{2\Sigma} \mathbf{m} \quad (36) \end{aligned}$$

Tensor de "strain-rate" Euleriano

- De (35):

$$\dot{\theta} = \frac{(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m} + \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}') (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}') - 2 \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}}{|\mathbf{m} \times \mathbf{m}'|}$$

- Si $\mathbf{m} = \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{m}' = \mathbf{e}_j$, con $i \neq j$:

$$\dot{\theta} = \frac{(\underbrace{\Sigma_{ii} + \Sigma_{jj}}_{=0}) \underbrace{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)}_{=1} - 2 \Sigma_{ij}}{\underbrace{|\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j|}_{=1}} = -2 \Sigma_{ij}, \quad i \neq j$$

i.e., Σ_{ij} ($i \neq j$) es la tasa de cambio del ángulo entre dos fibras ortogonales en un instante dado.

Spin de cuerpo rígido

- **Spin de cuerpo rígido:** parte antisimétrica de Γ :

$$\Omega = \frac{1}{2} (\Gamma - \Gamma^T)$$

Luego, la ecuación (35) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} &= \Gamma \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \Sigma \mathbf{m}) \mathbf{m} \\ &= \Omega \mathbf{m} + \Sigma \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \Sigma \mathbf{m}) \mathbf{m} \end{aligned} \quad (37)$$

- $\Omega \mathbf{m}$: rotación (o spin) de cuerpo rígido.
- $\Sigma \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \Sigma \mathbf{m}) \mathbf{m}$: rotación superpuesta al spin de cuerpo rígido.

Movimiento de cuerpo rígido

- En un **movimiento de cuerpo rígido**, las fibras no cambian en longitud ni en ángulo relativo, luego

$$\Sigma = 0$$

- Luego, (37) resulta

$$\dot{\mathbf{m}} = \Omega \mathbf{m} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} \quad (38)$$

- Usando la definición de rot:

$$(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{a} = [\nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T] \mathbf{a} = (\Gamma - \Gamma^T) \mathbf{a} = 2\Omega \mathbf{a} \quad (39)$$

Por (38) y (39), resulta:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$$

i.e., el movimiento es una rotación rígida (spin) con **velocidad angular** $\boldsymbol{\omega}$.

Ejercicio

Mostrar que la derivada temporal Lagrangiana del tensor de deformación $\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{B})$ es $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}$.

Ejercicio

Para el movimiento de cuerpo rígido

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}$$

mostrar que la velocidad y aceleración pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c})$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}))$$

respectivamente, donde $\boldsymbol{\omega}(t)$ es el vector axial del tensor antisimétrico $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$.

Ejercicio

Si $J = \det \mathbf{A}$ y $\partial J / \partial \mathbf{A}$ es el tensor de segundo orden de componentes $(\partial J / \partial \mathbf{A})_{\alpha i} = \partial J / \partial A_{i\alpha}$, deducir:

$$\frac{\partial J}{\partial A_{j\beta}} = J B_{j\beta}$$

y en consecuencia:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = J \mathbf{B}^T$$

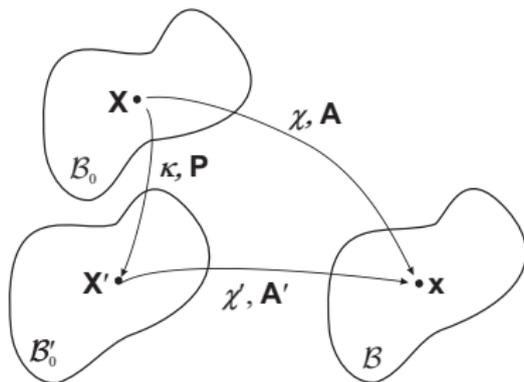
Luego, mostrar

$$\dot{\mathbf{A}} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = J \boldsymbol{\Gamma}$$

y

$$\frac{\dot{J}}{J} = \text{tr } \boldsymbol{\Gamma} \quad (40)$$

Cambio de configuración de referencia



- Deformación $B_0 \rightarrow B'_0$: $\mathbf{X}' = \kappa(\mathbf{X})$
 - Gradiente de deformación: $\mathbf{P} = \text{Grad } \kappa(\mathbf{X})$
- Deformación $B'_0 \rightarrow B$: $\mathbf{x} = \chi'(\mathbf{X}')$
 - Gradiente de deformación: $\mathbf{A}' = \text{Grad}' \chi'(\mathbf{X}')$
- Deformación $B_0 \rightarrow B$: $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$
 - Gradiente de deformación: $\mathbf{A} = \text{Grad } \chi(\mathbf{X}) = \mathbf{A}'\mathbf{P}$

Cambio de observador

- Supongamos (de acá en adelante) que la configuración de referencia es independiente del observador. Luego, la transformación de observador resulta:

$$\chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{X}, t), \quad t^* = t - a$$

Luego:

$$\mathbf{A}^* = \text{Grad } \chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t) \text{Grad } \chi = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A} \quad (41)$$

Descripción del movimiento ante cambio de observador

- La transformación de observador afecta la descripción de la velocidad $\dot{\chi}$ y de la aceleración $\ddot{\chi}$:

$$\dot{\chi}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\dot{\chi}(\mathbf{X}, t) + \dot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\chi(\mathbf{X}, t)$$

$$\ddot{\chi}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\ddot{\chi}(\mathbf{X}, t) + \ddot{\mathbf{c}}(t) + \ddot{\mathbf{Q}}(t)\chi(\mathbf{X}, t) + 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

- La velocidad y la aceleración dependen de la cinemática a través del movimiento relativo entre observadores implicado por $\dot{\mathbf{c}}(t)$, $\ddot{\mathbf{c}}(t)$, $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ y $\ddot{\mathbf{Q}}(t)$.

Objetividad de tensores

- **Tensores objetivos:** aquéllos que no dependen de la cinemática (i.e., de $\dot{\mathbf{Q}}$, $\dot{\mathbf{c}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}$, $\ddot{\mathbf{c}}$), que son intrínsecos al material. Cada observador asigna el mismo valor a tales tensores, y esa “**indiferencia de observador**” se refleja en sus reglas de transformación.
- Debemos distinguir entre las reglas de transformación aplicadas a tensores Eulerianos (ej.: \mathbf{V} , $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$, Σ), tensores Lagrangianos (ej.: \mathbf{U} , $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, \mathbf{E}) y tensores a dos puntos o Euleriano-Lagrangiano mixtos (ej.: \mathbf{A} , \mathbf{R}).

Objetividad de campos Eulerianos

- **Un campo escalar Euleriano $\phi(\mathbf{x}, t)$ es objetivo si**

$$\phi^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \phi(\mathbf{x}, t) \quad (42)$$

- **Un campo vectorial Euleriano \mathbf{u} es objetivo si**

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

- **Un campo tensorial Euleriano \mathbf{T} de 2° orden es objetivo si**

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^T$$

- En general, la derivada temporal de un campo Euleriano objetivo no resulta un campo Euleriano objetivo. Por ej., para el campo vectorial Euleriano objetivo \mathbf{u} :

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \frac{d\mathbf{u}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{u} \quad \text{no es objetivo.}$$

Objetividad de campos Eulerianos

Ejemplo

- Siendo $\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$, se demuestra que:
 - $J = \det \mathbf{A}$ es un campo escalar objetivo:

$$J^* = \det \mathbf{A}^* = \det \mathbf{A} = J$$

- los siguientes tensores Eulerianos son objetivos:

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^{*T} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^T$$

$$(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^* = \mathbf{B}^*\mathbf{B}^{*T} = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{V}^* = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{*1/2} = (\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^T)^{1/2} = (\mathbf{Q}\mathbf{V}^2\mathbf{Q}^T)^{1/2}$$

$$= [(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T)(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T)]^{1/2} = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T$$

- Los escalares $|\dot{\chi}|$ y $|\ddot{\chi}|$ no son objetivos.

Objetividad de campos Eulerianos

Ejemplo

- Siendo $\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$, se demuestra que:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}^* &= \dot{\mathbf{A}}^* \mathbf{A}^{*-1} = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad \text{es un tensor Euleriano no objetivo.}\end{aligned}$$

- Su parte simétrica

$$\mathbf{\Sigma}^* = \mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Q}^T \quad \text{es un tensor Euleriano objetivo.}$$

- Su parte antisimétrica

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad \text{es un tensor Euleriano no objetivo.}$$

Objetividad de campos tensoriales Lagrangianos

- El campo tensorial Lagrangiano $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ de orden $n > 0$ es **objetivo** si no está afectado por el cambio de observador:

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$$

- La derivada temporal de un campo Lagrangiano objetivo es un campo Lagrangiano objetivo:

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \frac{d\mathbf{T}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{T}^*}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \dot{\mathbf{T}}$$

Objetividad de campos tensoriales Lagrangianos

Ejemplo

- Siendo $\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$, se demuestra que los siguientes tensores Lagrangianos son objetivos:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^* = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^* = \mathbf{B}^{*T} \mathbf{B}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^* - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{U}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{*1/2} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{1/2} = \mathbf{U}$$

Objetividad de campos tensoriales mixtos

- Un campo tensorial mixto $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ de 2° orden es objetivo si

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$$

Ejemplo

- Son tensores mixtos objetivos:
 - el gradiente de deformación \mathbf{A} .
 - el tensor $\mathbf{R} \in SO3$ de la descomposición polar $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{U}^{*-1} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

Campos tensoriales inducidos

- Dado el campo vectorial Euleriano \mathbf{u} ,
 - $\mathbf{A}^T \mathbf{u}$ y $\mathbf{B}^T \mathbf{u}$ son los campos vectoriales Lagrangianos inducidos por \mathbf{u} .
- Dado el campo vectorial Lagrangiano \mathbf{U} ,
 - $\mathbf{A} \mathbf{U}$ y $\mathbf{B} \mathbf{U}$ son los campos vectoriales Eulerianos inducidos por \mathbf{U} .
- Dado el campo tensorial Euleriano de 2° orden \mathbf{T} ,
 - $\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B}$ son los campos tensoriales Lagrangianos de 2° orden inducidos por \mathbf{T}
 - $\mathbf{A}^T \mathbf{T}$, $\mathbf{B}^T \mathbf{T}$, $\mathbf{T} \mathbf{A}$, $\mathbf{T} \mathbf{B}$ son los campos tensoriales mixtos de 2° orden inducidos por \mathbf{T}

Objetividad de campos tensoriales inducidos

- Un campo tensorial es objetivo si y sólo si cada uno de sus campos inducidos es objetivo.
- Por ejemplo, para el vector Euleriano objetivo \mathbf{u} que induce los vectores Lagrangianos $\mathbf{A}^T \mathbf{u}$ y $\mathbf{B}^T \mathbf{u}$, resulta:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{*T} \mathbf{u}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{B}^{*T} \mathbf{u}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{u}$$