Mecánica de Sólidos

Capítulo III: Leyes de balance, tensiones y ecuaciones de campo

Víctor Fachinotti, Juan C. Álvarez Hostos

Programa de Doctorado en Ingeniería
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)

20 de septiembre de 2018

Masa

- Supongamos $\exists$ función $m(B)$, **masa del cuerpo** B, t.q.

$$m(B) \geq 0 \qquad \forall \text{ cuerpo } B$$

  - m es aditiva:

$$m(B \cup B') = m(B) + m(B') \qquad \text{para } B, B' \text{ disjuntos}$$

  - m es continua respecto del volumen del cuerpo B

$$\Longrightarrow m(B) \to 0 \quad \text{cuando} \quad \text{volumen}(B) \to 0$$

- $m(B)$ es una propiedad intrínseca al cuerpo B, independiente de su movimiento.

$\Rightarrow$ m es un **escalar objetivo**.

Principio de conservación de la masa - Densidad

- **Principio de conservación de la masa (PCM)**: m es independiente de la configuración $\mathcal{B}$ ocupada por B desde el punto de vista de un observador arbitrario, luego:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(B) = 0 \qquad \forall \text{ cuerpo } B \tag{1}$$

- El requisito de **continuidad** asegura que $\forall \mathcal{B}$, $\exists$ un campo escalar ρ, **densidad de masa del material del cuerpo B en la configuración $\mathcal{B}$**, t.q.

$$m(B) = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{dv}$$

Asumiendo ρ suave y siendo $m \geq 0$, resulta

$$\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}$$

Forma local del principio de conservación de la masa

- Como $m(B)$ es independiente de la configuración:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})\,\mathrm{dV} = \int_{\mathcal{B}} \rho_0(\mathbf{X}) J^{-1}\,\mathrm{dv}$$

Aplicado a $\mathcal{B}$ arbitrario, por la continuidad de ρ, resulta

$$\rho = J^{-1}\rho_0 \qquad \textbf{(Forma local del PCM)}$$

Su derivada material:

$$\dot{\rho} = -\frac{\rho_0}{J^2}\dot{J} = -\,\rho\frac{\dot{J}}{J} \tag{2}$$

$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{J}}{J} = \operatorname{tr}\boldsymbol{\Gamma} \quad \text{(Resultado de problema del Cap. II)}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{v}) = \operatorname{div}\mathbf{v} \tag{3}$$

Forma local “dinámica” del principio de conservación de la masa

- **Forma local “dinámica” del PCM**: de (3):

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{4}$$

Ejercicio

Mostrar que

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$$

donde $\partial/\partial t$ designa la derivada temporal Euleriana.

Forma global del principio de conservación de la masa

- De (4):

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{B}} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v})\, \mathrm{dv} = \int_{\mathcal{B}_0} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v})\, J\, \mathrm{dV} \\
&= \int_{\mathcal{B}_0} \left(\dot{\rho} J + \rho \dot{J} \right) \mathrm{dV} = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\rho J)\, \mathrm{dV} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}_0} \rho J\, \mathrm{dV}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \rho\, \mathrm{dv}}_{m(B)} = 0 \qquad \textbf{(Forma global del PCM)} \qquad (5)
$$

Derivada temporal de la integral del campo ρf

- Para un campo (escalar, vectorial o tensorial) arbitrario f:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \rho f \,\mathrm{dv} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}_0} \rho f J \,\mathrm{dV} = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho f J)\,\mathrm{dV} =$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \overbrace{\underbrace{\left(\dot{\rho} J + \rho \dot{J}\right)}_{=0 \text{ por } (2)}}^{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho J)} f \,\mathrm{dV} + \int_{\mathcal{B}_0} \rho \dot{f} J \,\mathrm{dV} = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{f} \,\mathrm{dv} \qquad (6)$$

- **Deformación isocórica** ($J = 1$):
  - $\rho = \rho_0 \qquad \forall$ deformación a partir de $\mathcal{B}_0$
  - $0 = \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{v}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{\Gamma} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\Sigma}$

Momentos lineal y rotacional

- **Momento lineal de un cuerpo** B:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)\,\mathrm{dV}$$

- **Momento rotacional de un cuerpo** B respecto de $\mathbf{x}_0$ arbitrario:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv}$$

  dependiente del valor de $\mathbf{x}_0$ elegido.

- **Nota:** el momento lineal y el rotacional no son objetivos pues dependen de la velocidad.

Fuerzas de inercia y externas

- Se distinguen 2 tipos de fuerzas:
  1. **Fuerzas de inercia:** dependen de la elección del observador y su marco de referencia.
  2. **Fuerzas externas:** provienen de fuentes externas independientes del observador o marco de referencia. Actúan en la configuración actual $\mathcal{B}$, y pueden ser de 2 tipos:
     1. **Fuerzas de cuerpo:**
        $$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{dv}$$
        $\mathbf{b}$: fuerza de cuerpo (por u. de masa) en $\mathcal{B}$
     2. **Fuerzas de contacto:**
        $$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B})\, \mathrm{ds}$$
        $\mathbf{t}$: fuerza de contacto (por u. de área) en $\partial\mathcal{B}$

Fuerzas de cuerpo y de contacto

- La fuerza de cuerpo es Euleriana y objetiva:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q}\mathbf{b}$$

  Ejemplo: fuerza de gravedad

- La fuerza de contacto es Euleriana y objetiva:

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{Q}\mathbf{t}$$

  Ejemplos: fricción tangente y presión normal a la superficie

Resultante de fuerzas y de momentos

- **Resultante de fuerzas externas** en la configuración $\mathcal{B}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B})\,\mathrm{ds}$$

- **Momento resultante (o torque) de fuerzas externas** en la configuración $\mathcal{B}$, con respecto a $\mathbf{x}_0$:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B})\,\mathrm{ds}$$

- **Nota:** la fuerza resultante es objetiva, no así el torque debido a la dependencia de $\mathbf{x}_0$.

Balance de momento lineal

- **Primera ley de Newton**: existe un observador para el cual el momento lineal para todo cuerpo B en movimiento es independiente de t siempre que la resultante de las fuerzas externas sobre la configuración $\mathcal{B}$ sea nula $\forall t$.
- **Observador inercial**: dicho observador.
- **Marco inercial**: marco de referencia de rotación y aceleración nulas, adoptado por el observador inercial.
- Si la resultante de las fuerzas externas no es nula, el momento lineal cambia con t.

⇒ **Balance de momento lineal (BML)**:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B})\,\mathrm{ds} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} \equiv \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} \tag{7}$$

Balance de momento rotacional

- Si el torque resultante de las fuerzas externas no es nulo, el momento rotacional cambia con t.

⇒ **Balance de momento rotacional (BMR)**:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x},t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{t}(\mathbf{x},\partial\mathcal{B})\,\mathrm{ds}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x},t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{dv}$$

$$\equiv \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x},t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{dv} \quad (8)$$

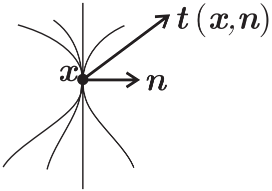
([$\equiv$] válido para $\mathbf{x}_0$ fijo para el observador considerado)

- **BML** y **BMR**, independientes entre sí, constituyen las **leyes de Euler del movimiento**, principios fundamentales de la Mecánica del Continuo.

Postulado fundamental de Cauchy

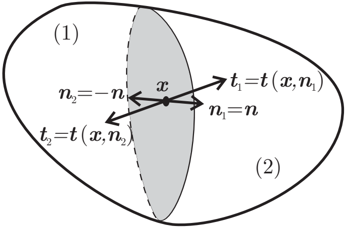
- **Postulado fundamental de Cauchy:** se supone que el vector tensión $\mathbf{t}$ en un punto $\mathbf{x}$ depende de $\partial\mathcal{B}$ sólo a través del versor $\mathbf{n}$ normal a $\partial\mathcal{B}$ en $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$$



Luego, la fuerza de contacto por u. de área ejercida por el material del lado (1) sobre el material del lado (2) es igual y opuesta a la que ejerce el material del lado (2) sobre el material del lado (1):

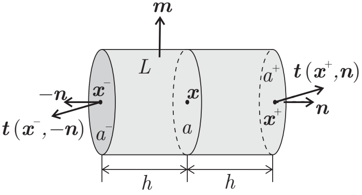
$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$$



Postulado fundamental de Cauchy

- **Demostración**: BML en el cilindro:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{dv} + \int_{a^-} \mathbf{t}(\mathbf{x}^-,-\mathbf{n})\,\mathrm{ds} + \int_{a^+} \mathbf{t}(\mathbf{x}^+,\mathbf{n})\,\mathrm{ds} + \int_{L} \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{m})\,\mathrm{ds} = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x},t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{dv}$$



Si $h \to 0$, $a^- \to a$, $a^+ \to a$, $\mathbf{x}^- \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x}^+ \to \mathbf{x}$, $\mathrm{vol}(\mathcal{B}) \to 0$, $\mathrm{area}(L) \to 0$, luego:

$$\int_a [\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x},-\mathbf{n})]\,\mathrm{ds} = 0$$

Considerando a arbitrario y $\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n})$ continuo en $\mathbf{x}$ $\forall\mathbf{n}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x},-\mathbf{n}) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Teorema de Cauchy

- **Teorema de Cauchy:** si $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ es continuo en $\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{t}$ depende linealmente de $\mathbf{n}$. Luego, $\exists\ \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, independiente de $\mathbf{n}$, t.q.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B},\ \forall \mathbf{n}$$

- $\mathbf{T}$: **tensor de tensión de Cauchy**

Ejercicio

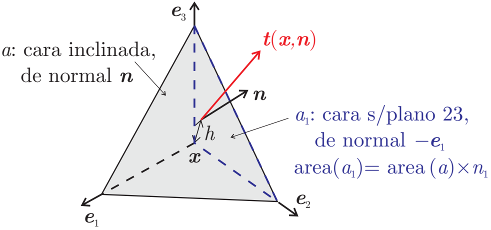
Mostrar que $\mathbf{T}$ *es un tensor de segundo orden Euleriano objetivo.*

Teorema de Cauchy: demostración (1/2)

- BML en el tetrahedro:

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{a_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i)\, \mathrm{d}s_i + \int_a \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\, \mathrm{d}s$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\, [\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)]\, \mathrm{d}v \approx \rho(\mathbf{x}, t)\, [\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)]\, \frac{1}{3} ha$$

([$\approx$] válido si $h \ll 1$, y $\dot{\mathbf{v}}$ y $\mathbf{b}$ acotadas en el tetrahedro)



Teorema de Cauchy: demostración (2/2)

Si $h \to 0$:

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \int_{a_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i)\, \mathrm{d}s_i + \int_a \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\, \mathrm{d}s =$$

$$\int_a \left[\sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i) n_i + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \right] \mathrm{d}s$$

Considerando a arbitrario y $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ continuo en $\mathbf{x}$ $\forall \mathbf{n}$:

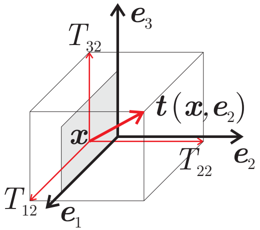
$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i) n_i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) n_i \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) n_i \quad (\text{suma en } i)$$

$$t_j(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \underbrace{t_j(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)}_{T_{ji}(\mathbf{x})} n_i \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Tensión normal y tensión de corte

- T_{ij}: componente según $\mathbf{e}_i$ de la fuerza (por unidad de área) en un punto $\mathbf{x}$ sobre un elemento de superficie de normal $\mathbf{e}_j$ en $\mathcal{B}$.
  - T_{ii} (sin suma en i): **tensión normal**
  - T_{ij} ($i \neq j$): **tensión tangencial o de corte**



- **Vector de tensión normal**:

$$\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = [\mathbf{n}\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n})]\,\mathbf{n} = (\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\,\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n})$$

- **Vector de tensión de corte**:

$$\mathbf{t}^{(c)}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) - \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\,\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n})$$

Primera ley del movimiento de Cauchy

- Usando $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$, el BML (7) resulta

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}\,\mathrm{ds} - \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv} = 0 \qquad (9)$$

Por teorema de la divergencia:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_{ij} n_j\,\mathrm{ds} = \int_{\mathcal{B}} T_{ij,j}\,\mathrm{dv}$$

o

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}\,\mathrm{ds} = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \mathbf{T}^{T}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{dv}$$

Luego, (9) toma la forma:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{T}^{T}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)\right] \mathrm{dv} = 0 \qquad (10)$$

Primera ley del movimiento de Cauchy

Considerando $\mathcal{B}$ arbitrario, ρ, $\mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{v}}$ continuas y $\mathbf{T}$ con derivada primera continua en (10), obtenemos la **primera ley del movimiento de Cauchy**:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{11}$$

Segunda ley del movimiento de Cauchy

Introduciendo (11) en el BMR (8):

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{b}\,\mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{t}\,\mathrm{ds} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times(\operatorname{div}\mathbf{T}^T + \rho\mathbf{b})\,\mathrm{dv}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\operatorname{div}\mathbf{T}^T\,\mathrm{dv} = \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{T}\mathbf{n}\,\mathrm{ds}$$

Sabiendo que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es el vector axial de $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\operatorname{div}\mathbf{T}^T\otimes(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\otimes\operatorname{div}\mathbf{T}^T\right]\mathrm{dv} = \int_{\partial\mathcal{B}} \left[\mathbf{T}\mathbf{n}\otimes(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\otimes\mathbf{T}\mathbf{n}\right]\mathrm{ds} \qquad (12)$$

Segunda ley del movimiento de Cauchy

Por el teorema de la divergencia:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}\mathbf{n} \otimes \underbrace{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}_{\Delta\mathbf{x}} \, \mathrm{ds} = \left(\int_{\partial\mathcal{B}} T_{ij} n_j \Delta x_k \, \mathrm{dv} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$
$$= \left[\int_{\mathcal{B}} \left(T_{ij} \Delta x_k \right)_{,j} \mathrm{dv} \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \left[\int_{\mathcal{B}} \left(T_{ij,j} \Delta x_k + T_{ij} \delta_{kj} \right) \mathrm{dv} \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \mathbf{T}^T \otimes (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \, \mathrm{dv} + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \, \mathrm{dv} \quad (13)$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{T}\mathbf{n} \, \mathrm{ds} = \left[\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}\mathbf{n} \otimes (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \, \mathrm{ds} \right]^T$$
$$= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \otimes \operatorname{div} \mathbf{T}^T \, \mathrm{dv} + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}^T \, \mathrm{dv} \quad (14)$$

Segunda ley del movimiento de Cauchy

Usando (13) y (14) en (12):

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) \right] \mathrm{dv} = 0 \qquad \forall B$$

de donde, por continuidad de $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, obtenemos la **segunda ley del movimiento de Cauchy**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

- En resumen, el movimiento de un cuerpo está gobernado por

$$\textbf{Ecuaciones de campo Eulerianas} \quad \begin{cases} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \end{cases} \tag{15}$$

  i.e., 4 ecuaciones escalares con 10 incógnitas escalares:
  - ρ
  - 3 componentes de $\mathbf{x}$
  - 6 componentes independientes de $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$
- **Problema de Valores de Borde e Iniciales (PVBI)**: Ecs . de campo (15) + **condiciones de borde** + **condiciones iniciales**
- El PVBI se clausura con las **ecuaciones constitutivas**, dependientes del material, que especifican $\mathbf{T}$ como función o funcional de t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, $\operatorname{Grad} \mathbf{x}$ y, en general, derivadas de mayor orden de $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}, t)$.

Tensiones principales de Cauchy

- Como $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, su forma espectral es

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{3} t_i \mathbf{w}^{(i)} \otimes \mathbf{w}^{(i)}$$

  - t_i: **tensiones principales de Cauchy**
  - $\mathbf{w}^{(i)}$: **direcciones principales de T**

Nota: En general, las direcciones principales de $\mathbf{T}$ no coinciden con los ejes principales Eulerianos, excepto en el caso de sólidos elásticos isótropos.

Tensión nominal

Usando $\mathbf{n}\,\mathrm{ds} = J\mathbf{B}\mathbf{N}\,\mathrm{dS}$ (Fórmula de Nanson, Cap. **II**), la resultante de fuerzas de contacto sobre $\partial\mathcal{B}$ resulta:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}\mathbf{n}\,\mathrm{ds} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} J\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{N}\,\mathrm{dS} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{S}^T\mathbf{N}\,\mathrm{dS} \tag{16}$$

introduciendo el **tensor de tensión nominal**:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{B}^T\mathbf{T}$$

- Como $\mathbf{T}$ es Euleriano, $\mathbf{S}$ en un tensor mixto
- Como $\mathbf{T}$ es objetivo y $\mathbf{S}$ es un tensor inducido por $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$ también es objetivo
- $\mathbf{S}^T = \mathbf{P}$: 1^{er} **tensor de tensión de Piola-Kirchhoff**
- $\hat{\mathbf{T}} = J\mathbf{T}$: **tensor de tensión de Piola**

Ecuaciones de campo Lagrangianas

- **BML** sobre $\mathcal{B}_0$:

$$\int_{\mathcal{B}} \overbrace{\mathbf{b}(\chi(\mathbf{X},t),t)}^{\mathbf{b}_0(\mathbf{X})} \underbrace{\rho\,\mathrm{dv}}_{\rho_0\,\mathrm{dV}} + \int_{\partial\mathcal{B}} \overbrace{\mathbf{T}}^{J^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T} \underbrace{\mathbf{n}\,\mathrm{ds}}_{J\mathbf{BN}\,\mathrm{dS}} = \int_{\mathcal{B}} \overbrace{\dot{\mathbf{v}}(\chi(\mathbf{X},t),t)}^{\ddot{\chi}(\mathbf{X},t)} \underbrace{\rho\,\mathrm{dv}}_{\rho_0\,\mathrm{dV}}$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})\mathbf{b}_0(\mathbf{X})\,\mathrm{dV} + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{S}^T\mathbf{N}\,\mathrm{dS} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})\ddot{\chi}(\mathbf{X},t)\,\mathrm{dV} \qquad (17)$$

Usando el teorema de la divergencia:

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{S}^T\mathbf{N}\,\mathrm{dS} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{Div}\,\mathbf{S}\,\mathrm{dV}$$

en (17), obtenemos

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})\mathbf{b}_0(\mathbf{X})\,\mathrm{dV} + \int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{Div}\,\mathbf{S}\,\mathrm{dV} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})\ddot{\chi}(\mathbf{X},t)\,\mathrm{dV} \qquad (18)$$

Ecuaciones de campo Lagrangianas

- Considerando $\mathcal{B}_0$ arbitrario en (18), obtenemos la **ecuación Lagrangiana de movimiento**:

$$\operatorname{Div}\mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\chi} \qquad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0 \tag{19}$$

  con $\mathbf{X}$ y t como variables independientes.

- **BMR**: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ equivale a:

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S}^T\mathbf{A}^T \quad \text{o} \quad \mathbf{SB} = \mathbf{B}^T\mathbf{S}^T \tag{20}$$

- **Balance de masa**:

$$\det \mathbf{A} = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{21}$$

- (19)+(20)+(21): **Ecuaciones de campo Lagrangianas**

Ejercicio

Mostrar que

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{A}\,\mathrm{dV} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{x} \otimes \mathbf{N}\,\mathrm{dS}$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}\,\mathrm{dV} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{X} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{N}\,\mathrm{dS} - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{X} \otimes \mathbf{b}_0\,\mathrm{dV}$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{AS}\,\mathrm{dV} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{x} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{N}\,\mathrm{dS} + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{x} \otimes \mathbf{b}_0\,\mathrm{dV}$$

para un cuerpo en equilibrio en una configuración $\mathcal{B}$, con **A** *como el gradiente de deformación a partir de la configuración de referencia $\mathcal{B}_0$.*

Balance de energía mecánica

- Hacemos **(BML)** $\cdot\, \mathbf{v}$:

$$\rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) - \operatorname{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$$

Integrando sobre $\mathcal{B}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{dv} = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) \, \mathrm{dv} - \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\operatorname{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma})}_{=\operatorname{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma})} \mathrm{dv} + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{dv} \quad (22)$$

- Por ecuación (6):

$$\int_{\mathcal{B}} \rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{dv} = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \, \mathrm{dv} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{dv} \quad (23)$$

- Por teorema de la divergencia y $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) \, \mathrm{dv} = \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{ds} = \int_{\partial\mathcal{B}} \underbrace{(\mathbf{T}\mathbf{n})}_{=\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{ds} \quad (24)$$

Balance de energía mecánica

- **Balance de energía mecánica**: usando (23) y (24) en (22):

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{dv} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{ds}}_{\text{Potencia de las fuerzas externas}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{dv}}_{\text{Tasa de cambio de la energía cinética}} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathrm{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) \, \mathrm{dv}}_{\text{Potencia de tensiones}} \qquad (25)$$

Balance de energía mecánica

- En general, la energía mecánica no se conserva durante el movimiento de un continuo. De hecho, la potencia de tensiones contiene contribuciones conservativas y disipativas, de modo que **no** podemos escribir
$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma})\,\mathrm{dv} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} (\ldots)\,\mathrm{dv}$$
- Sólo en el caso de materiales elásticos, la ecuación (25) implica conservación de energía.

Formulación Lagrangiana del balance de energía mecánica

- Cambiemos los dominios de integración en (25):

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\chi}\, \mathrm{dV} + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{S}^T \mathbf{N} \cdot \dot{\chi}\, \mathrm{dS} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\chi} \cdot \dot{\chi}\, \mathrm{dV} + \int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}})\, \mathrm{dV} \quad (26)$$

- Notar que

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) = \mathrm{tr}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{S}) = \mathrm{tr}\left[(\varGamma\mathbf{A})(J\mathbf{B}^T\mathbf{T})\right] = \mathrm{tr}(J\varGamma\mathbf{T}) = \mathrm{tr}(J\mathbf{T}\varGamma) = \mathrm{tr}(J\mathbf{T}\varGamma^T) = J\,\mathrm{tr}(\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) \quad (27)$$

es la **densidad de potencia de tensiones** sobre $\mathcal{B}_0$.

Deformaciones y tensiones conjugadas

- Sea $\mathbf{E}^{(m)}$ un tensor de deformación Lagrangiano:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U} & m = 0 \end{cases}$$

- Para $m = 2$:

$$\mathbf{E}^{(2)} \equiv \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \qquad \dot{\mathbf{E}}^{(2)} \equiv \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}$$

Usando (27):

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) = \mathrm{tr}(J\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{tr}[(J\mathbf{T}\mathbf{B}\dot{\mathbf{E}}^{(2)})\mathbf{B}^T] = \mathrm{tr}(\mathbf{T}^{(2)}\dot{\mathbf{E}}^{(2)})$$

donde introdujimos el **2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff**:

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{B}^T\mathbf{T}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\hat{\mathbf{T}}\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{B}$$

Deformaciones y tensiones conjugadas

- Para $m = -2$:

$$\mathbf{E}^{(-2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-2}), \qquad \dot{\mathbf{E}}^{(-2)} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) = \mathrm{tr}(J\mathbf{T}\boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{tr}\left(J\mathbf{T}\mathbf{A}\dot{\mathbf{E}}^{(-2)}\mathbf{A}^T\right) = \mathrm{tr}\left(\underbrace{(\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{T}}\mathbf{A})}_{\mathbf{T}^{(-2)}}\dot{\mathbf{E}}^{(-2)}\right)$$

- Para $m = 1$:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (\text{Tensor de deformación de Biot}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{E}}^{(1)} = \dot{\mathbf{U}}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{T}^{(2)}\dot{\mathbf{E}}) = \mathrm{tr}\left(\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{T}^{(2)})}_{\mathbf{T}^{(1)}}\dot{\mathbf{E}}^{(1)}\right)$$

donde $\mathbf{T}^{(1)}$ es el **tensor de tensión de Biot o de Jaumann**.

Deformaciones y tensiones conjugadas

- Generalizando, se asocia con el tensor de deformación $\mathbf{E}^{(m)}$ un tensor de tensión simétrico $\mathbf{T}^{(m)}$ t.q.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{T}^{(m)}\dot{\mathbf{E}}^{(m)}) = \mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}}) \tag{28}$$

- $(\mathbf{T}^{(m)}, \mathbf{E}^{(m)})$ constituyen un **par conjugado**.
- Los tensores $\mathbf{T}^{(m)}$ y $\mathbf{E}^{(m)}$ son tensores Lagrangianos objetivos.
- Existen otros pares conjugados, como $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$ por ejemplo.
- Si bien $\mathrm{tr}(\hat{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{A}})$, $\hat{\mathbf{T}}$ no tiene deformación conjugada ya que la "strain-rate" Euleriana $\boldsymbol{\Sigma}$ no es una "rate of strain",
- Un tensor de tensión no necesariamente tiene una deformación conjugada (y viceversa).

Deformaciones Eulerianas y sus tensiones conjugadas

- Sean los tensores Eulerianos de deformación:

$$\mathbf{F}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}) & m \neq 0 \\ \ln \mathbf{V} & m = 0 \end{cases}$$

relacionados con los tensores Lagrangianos de deformación por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(m)} &= \mathbf{R}^T \mathbf{F}^{(m)} \mathbf{R} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{(m)} &= \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{F}}^{(m)} \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}^{(m)} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \mathbf{F}^{(m)} \dot{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{F}}^{(m)} \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} \mathbf{E}^{(m)} + \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{F}}^{(m)} \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \mathbf{E}^{(m)} + \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

Deformaciones Eulerianas y sus tensiones conjugadas

- La densidad de potencia de tensiones (28) resulta:

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{T}^{(m)}\dot{\mathbf{E}}^{(m)}\right) = \mathrm{tr}\left(\left(\mathbf{R}\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{R}^{T}\right)\dot{\mathbf{F}}^{(m)}\right) + \mathrm{tr}\left(\left(\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{E}^{(m)} - \mathbf{E}^{(m)}\mathbf{T}^{(m)}\right)\mathbf{R}^{T}\dot{\mathbf{R}}\right)$$

- Luego, el tensor Euleriano de deformación $\mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{R}\mathbf{E}^{(m)}\mathbf{R}^{T}$ tendrá al tensor Euleriano $\mathbf{R}\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{R}^{T}$ como tensor de tensión conjugado si y sólo si $\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{E}^{(m)}\mathbf{T}^{(m)}$, i.e., si $\mathbf{T}^{(m)}$ es coaxial con $\mathbf{E}^{(m)}$ (o con $\mathbf{U}$).

Ejercicio

Mostrar que

$$\mathbf{T}^{(-1)} = \mathbf{U}\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{U}$$

es el tensor de tensión conjugado al tensor de deformación $\mathbf{E}^{(-1)}$.

Ejercicio

Mostrar que $\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{T}}$ *es el tensor de tensión conjugado al tensor de deformación* $-\mathbf{B}$.

Ejercicio

Mostrar que en general no existe tensor de deformación conjugado a $\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{T}}\mathbf{B}$.