Mecánica de Sólidos

Capítulo VI: Método de Elementos Finitos para Elasticidad No Lineal

Víctor Fachinotti, Benjamín Tourn

Programa de Doctorado en Ingeniería
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)

13 de noviembre de 2015

Principio de los Trabajos Virtuales

- Partimos del PTV:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta W \, \mathrm{d}V = \int_{\partial \mathcal{B}_0^{\sigma}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}V$$

  con

$$\delta W = \operatorname{tr}(\mathbf{S} \delta \mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{T}^{(n)} \delta \mathbf{E}^{(n)})$$

- Introducimos el desplazamiento $\mathbf{u} = \chi - \mathbf{X}$ y su gradiente $\mathbf{D} = \operatorname{Grad} \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} - \mathbf{I}$.
- Dada la DCA χ^* resulta:

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}^* - \boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}^* - \mathbf{X}) - (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{X}) = \mathbf{u}^* - \mathbf{u} = \delta \mathbf{u} \tag{1}$$

Notación de Voigt

- Trabajemos con el par conjugado $(\mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)})$:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \operatorname{tr}\left(\mathbf{T}^{(2)}\delta\mathbf{E}^{(2)}\right) \\
\mathbf{E}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}+\mathbf{D}^T+\mathbf{D}^T\mathbf{D}) \equiv \mathbf{E} \\
\mathbf{T}^{(2)} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}
\end{aligned}$$

- **Notación de Voigt**: ordenamos los componentes de los tensores $\mathbf{T}^{(2)}$ y $\mathbf{E}$ en los vectores

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{T}}^{(2)} &= \left[T_{11}^{(2)}\ T_{22}^{(2)}\ T_{33}^{(2)}\ T_{12}^{(2)}\ T_{23}^{(2)}\ T_{31}^{(2)}\right]^T \\
\tilde{\mathbf{E}} &= [E_{11}\ E_{22}\ E_{33}\ 2E_{12}\ 2E_{23}\ 2E_{31}]^T
\end{aligned}$$

Variación de la deformación

La variación de **E**:

$$\delta E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta A_{k\alpha} A_{k\beta} + A_{k\alpha}\delta A_{k\beta}) = \frac{1}{2}(\delta u_{k,\alpha} A_{k\beta} + \delta u_{k,\beta} A_{k\alpha})$$

se expresa en notación de Voigt como:

$$\delta\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta E_{33} \\ 2\delta E_{12} \\ 2\delta E_{23} \\ 2\delta E_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{i1}\delta u_{i,1} \\ A_{i2}\delta u_{i,2} \\ A_{i3}\delta u_{i,3} \\ A_{i1}\delta u_{i,2} + A_{i2}\delta u_{i,1} \\ A_{i2}\delta u_{i,3} + A_{i3}\delta u_{i,2} \\ A_{i3}\delta u_{i,1} + A_{i1}\delta u_{i,2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Luego, la variación de W puede escribirse como

$$\delta W = T^{(2)}_{ij}\delta E_{ij} = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)\,T}\delta\tilde{\mathbf{E}} = \delta\tilde{\mathbf{E}}^{T}\tilde{\mathbf{T}}^{(2)}$$

Aproximación por MEF

- Usando MEF estándar (Galerkin), aproximamos $\mathbf{u}$ como

$$\mathbf{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & N^2 & 0 & 0 & \dots & N^n & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & 0 & N^2 & 0 & \dots & 0 & N^n & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & 0 & 0 & N^2 & \dots & 0 & 0 & N^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \tag{3}$$

  - $N^I(\mathbf{X})$: función de forma asociada al nodo $I = 1, 2, \dots, n$, t.q. $N^I(\mathbf{X}^J) = \delta_{IJ}$.
  - $\mathbf{u}^I \approx \mathbf{u}(\mathbf{X}^I)$: aproximación al desplazamiento del nodo I (incógnita).

Variación de la deformación

- Usando (3):

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{u}_{,\alpha} = \mathbf{N}_{,\alpha}\delta\mathbf{U}$$

- Luego, la variación (2) se escribe:

$$\delta\tilde{\mathbf{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \dots & \mathbf{B}^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^1 \\ \delta\mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{u}^n \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{U}}$$

con $$\mathbf{B}^I = \begin{bmatrix} A_{11}N^I_{,1} & A_{21}N^I_{,1} & A_{31}N^I_{,1} \\ A_{12}N^I_{,2} & A_{22}N^I_{,2} & A_{32}N^I_{,2} \\ A_{13}N^I_{,3} & A_{23}N^I_{,3} & A_{33}N^I_{,3} \\ A_{11}N^I_{,2} + A_{12}N^I_{,1} & A_{21}N^I_{,2} + A_{22}N^I_{,1} & A_{31}N^I_{,2} + A_{32}N^I_{,1} \\ A_{12}N^I_{,3} + A_{13}N^I_{,2} & A_{22}N^I_{,3} + A_{23}N^I_{,2} & A_{32}N^I_{,3} + A_{33}N^I_{,2} \\ A_{13}N^I_{,1} + A_{11}N^I_{,3} & A_{23}N^I_{,1} + A_{21}N^I_{,3} & A_{33}N^I_{,1} + A_{31}N^I_{,3} \end{bmatrix}$$

Variación de la deformación

- Haciendo $A_{i\alpha} = u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}$, resulta

$$\mathbf{B}^I = \underbrace{\begin{bmatrix} N^I_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & N^I_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & N^I_{,3} \\ N^I_{,2} & N^I_{,1} & 0 \\ 0 & N^I_{,3} & N^I_{,2} \\ N^I_{,3} & 0 & N^I_{,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^I_{\mathrm{lin}}} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,1} N^I_{,1} & u_{2,1} N^I_{,1} & u_{3,1} N^I_{,1} \\ u_{1,2} N^I_{,2} & u_{2,2} N^I_{,2} & u_{3,2} N^I_{,2} \\ u_{1,3} N^I_{,3} & u_{2,3} N^I_{,3} & u_{3,3} N^I_{,3} \\ u_{1,1} N^I_{,2} + u_{1,2} N^I_{,1} & u_{2,1} N^I_{,2} + u_{2,2} N^I_{,1} & u_{3,1} N^I_{,2} + u_{3,2} N^I_{,1} \\ u_{1,2} N^I_{,3} + u_{1,3} N^I_{,2} & u_{2,2} N^I_{,3} + u_{2,3} N^I_{,2} & u_{3,2} N^I_{,3} + u_{3,3} N^I_{,2} \\ u_{1,3} N^I_{,1} + u_{1,1} N^I_{,3} & u_{2,3} N^I_{,1} + u_{2,1} N^I_{,3} & u_{3,3} N^I_{,1} + u_{3,1} N^I_{,3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^I_{\mathrm{nolin}}}$$

Forma MEF de la ecuación de equilibrio

- Introducimos las aproximaciones por MEF en el PTV:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{tr}\left(\mathbf{T}^{(2)}\delta\mathbf{E}\right)\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = 0$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta\tilde{\mathbf{E}}^T\tilde{\mathbf{T}}^{(2)}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \delta\mathbf{u}^T\bar{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{u}^T\rho_0\mathbf{b}\,\mathrm{d}V = 0$$

$$\delta\mathbf{U}^T\left(\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{T}}^{(2)}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{N}^T\bar{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T\rho_0\mathbf{b}\,\mathrm{d}V\right) = 0$$

- Siendo $\delta\mathbf{U}$ arbitrario, llegamos a la **forma discreta en versión MEF de la ecuación de equilibrio**:

$$\mathbf{R} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{T}}^{(2)}\,\mathrm{d}V}_{\mathbf{F}_{\mathrm{int}}} - \underbrace{\left(\int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \mathbf{N}^T\bar{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T\rho_0\mathbf{b}\,\mathrm{d}V\right)}_{\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}} = \boldsymbol{0} \quad (4)$$

Resolución de la ecuación no lineal de equilibrio

- La ecuación (4) define un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas para las incógnitas U_i, $i = 1, 2, \ldots, dim \times n$ (dim = 3 en 3D), con n número total de nodos de la malla que representa a $\mathcal{B}_0$.
- Ese sistema debe resolverse iterativamente. Partiendo de $\mathbf{U}^{(k)}$ conocido para la iteración k, se actualiza $\mathbf{U}$ para la iteración $k+1$ resolviendo el sistema lineal

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k+1)}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k)}) + \mathbf{K}(\mathbf{U}^{(k)})(\mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)}) = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

donde $\mathbf{K}$ es la **matriz jacobiana tangente**:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}\mathbf{U}} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\mathbf{U}}$$

- **Método de Newton-Raphson**: $\mathbf{K}$ se calcula exactamente.

Cálculo de la matriz jacobiana tangente

- La contribución de las fuerzas internas a **K** es:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}\mathbf{U}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \,\mathrm{d}V}_{\mathbf{K}_{\mathrm{mat}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{U}} \left(\mathbf{B}_{\mathrm{nolin}}^T \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{T}}^{(2)}=const.} \mathrm{d}V}_{\mathbf{K}_{\mathrm{geo}}}$$

donde **C** es la matriz en que se ordenan siguiendo la notación de Voigt los módulos elásticos de primer orden $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \dfrac{\partial T_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial E_{\gamma\delta}}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{1111} & \mathcal{A}_{1122} & \mathcal{A}_{1133} & \mathcal{A}_{1112} & \mathcal{A}_{1123} & \mathcal{A}_{1131} \\ \mathcal{A}_{2211} & \mathcal{A}_{2222} & \mathcal{A}_{2233} & \mathcal{A}_{2212} & \mathcal{A}_{2223} & \mathcal{A}_{2231} \\ \mathcal{A}_{3311} & \mathcal{A}_{3322} & \mathcal{A}_{3333} & \mathcal{A}_{3312} & \mathcal{A}_{3323} & \mathcal{A}_{3331} \\ \mathcal{A}_{1211} & \mathcal{A}_{1222} & \mathcal{A}_{1233} & \mathcal{A}_{1212} & \mathcal{A}_{1223} & \mathcal{A}_{1231} \\ \mathcal{A}_{2311} & \mathcal{A}_{2322} & \mathcal{A}_{2333} & \mathcal{A}_{2312} & \mathcal{A}_{2323} & \mathcal{A}_{2331} \\ \mathcal{A}_{3111} & \mathcal{A}_{3122} & \mathcal{A}_{3133} & \mathcal{A}_{3112} & \mathcal{A}_{3123} & \mathcal{A}_{3131} \end{bmatrix}$$

- **Notar:** como $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{A}_{\gamma\delta\alpha\beta}$, **C** es simétrica.

Cálculo de la matriz jacobiana tangente

- La contribución de las fuerzas externas:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\mathbf{U}} = \int_{\partial\mathcal{B}_0^{\sigma}} \mathbf{N}^T \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\mathbf{U}}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{U}}\,\mathrm{d}V$$

- En caso de cargas muertas, no hay contribución de las tracciones $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

Proyección nodal

- Se define el campo continuo ϕ^* usando las mismas funciones de interpolación que para $\mathbf{u}$:

$$\phi^*(\mathbf{X}) = N^I(\mathbf{X})\phi_I$$

- ϕ^* aproxima en sentido débil al campo discontinuo ϕ (ej., componentes de tensión y deformación) si:

$$\int_{\mathcal{B}_0} N^I \phi^* \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}_0} N^I \phi \,\mathrm{d}V$$

$$\underbrace{\left(\int_{\mathcal{B}_0} N^I N^J \,\mathrm{d}V\right)}_{M_{IJ}} \phi_J = F_I$$

- Si M_{IJ} está diagonalizada:

$$\phi_I = \frac{F_I}{M_{II}}$$