# Mecánica de Sólidos

## Capítulo V: Problemas de Valores de Borde

Víctor Fachinotti, Benjamín Tourn

Programa de Doctorado en Ingeniería
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)

19 de octubre de 2015

# Ecuaciones de movimiento

- **Ecuaciones de campo Lagrangianas** (con $\mathbf{X}$ y $t$ como variables independientes):

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}_0 &= \rho_0 \ddot{\chi} && \text{Ecuaciones de movimiento} && (1) \\ \mathbf{A}\mathbf{S} &= \mathbf{S}^T \mathbf{A}^T && \text{Simetría de } \mathbf{T} && (2) \\ \det \mathbf{A} &= \frac{\rho_0}{\rho} && \text{Conservación de masa} && (3) \end{aligned}$$

- Para un material elástico:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) \tag{4}$$

# Ecuaciones de movimiento

- La ecuación de movimiento (1) junto a la ecuación constitutiva (4) sirven para determinar $\chi(\mathbf{X}, t)$.
- La condición de simetría de $\mathbf{T}$ impuesta por (2) debería ser satisfecha por (4).
- Se supone la densidad de referencia $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$ dada explícitamente.
- La densidad de fuerzas de cuerpo es generalmente una función prescrita de $\mathbf{x}$: $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\chi(\mathbf{X}), t) = \mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t)$.
- La ecuación de conservación de masa (3) no es necesaria para determinar $\chi(\mathbf{X}, t)$, sólo permite conocer $\rho$ en la configuración actual.

# Tensor de módulos elásticos

- Dada la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial S_{\alpha i}}{\partial X_\alpha} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{\chi}_i$$

- Introducimos la ecuación constitutiva $\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{A})$:

$$\frac{\partial S_{\alpha i}}{\partial A_{j\beta}} \frac{\partial A_{j\beta}}{\partial X_\alpha} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{\chi}_i$$

$$\mathcal{A}^1_{\alpha i \beta j} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{\chi}_i$$

donde $\mathcal{A}^1_{\alpha i \beta j}$ son las componentes cartesianas del tensor mixto de 4° orden llamado **tensor de módulos elásticos de primer orden** asociado al par conjugado $(\mathbf{S}, \mathbf{A})$:

$$\mathcal{A}^1_{\alpha i \beta j} = \frac{\partial S_{\alpha i}}{\partial A_{j\beta}} \quad \text{o} \quad \mathcal{A}^1 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{A}}$$

# Simetrías del tensor de módulos elásticos

- Para un material hiperelástico con función de energía de deformación $W$ por unidad de volumen de referencia:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A})$$

- Nótese la siguiente simetría:

$$\mathcal{A}^1_{\alpha i \beta j} = \frac{\partial^2 W}{\partial A_{i\alpha} \partial A_{j\beta}} = \mathcal{A}^1_{\beta j \alpha i}$$

# Balance de momento rotacional

- Si $W$ es objetiva:

$$W(\mathbf{A}) = W(\mathbf{U}) = W^{(2)}(\mathbf{E}^{(2)})$$

- Luego:

$$S_{\alpha i} = \frac{\partial W}{\partial A_{i\alpha}} = \frac{\partial W}{\partial E^{(2)}_{\beta\gamma}} \frac{\partial E^{(2)}_{\beta\gamma}}{\partial A_{i\alpha}} = T^{(2)}_{\gamma\beta} \left[ \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\partial A_{j\beta}}{\partial A_{i\alpha}}}_{\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}} A_{j\gamma} + A_{j\beta} \underbrace{\frac{\partial A_{j\gamma}}{\partial A_{i\alpha}}}_{\delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\overbrace{T^{(2)}_{\gamma\alpha}}^{T^{(2)}_{\alpha\gamma}} \overbrace{A_{i\gamma}}^{A^T_{\gamma i}}}_{[\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{A}^T]_{\alpha i}} + \frac{1}{2} \underbrace{T^{(2)}_{\alpha\beta} \overbrace{A_{i\beta}}^{A^T_{\beta i}}}_{[\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{A}^T]_{\alpha i}} = \left[ \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{A}^T \right]_{\alpha i}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{T}^{(2)}\mathbf{A}^T \qquad \Longrightarrow \mathbf{AS} = \mathbf{AT}^{(2)}\mathbf{A}^T \text{ simétrico}$$

$\Rightarrow$ BMR es consecuencia de asumir $W$ objetiva

# Elastostática

- Se remplaza la ecuación de movimiento (1) por la **ecuación de equilibrio**:

$$\operatorname{Div}\mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}_0 = \boldsymbol{0}$$

  donde desaparece la dependencia del tiempo $t$.

- Para material hiperelástico:

$$\operatorname{Div}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}\right) + \rho_0 \mathbf{b}_0 = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

# Problema de valores de borde

- Hasta aquí, hemos considerado las ecuaciones de movimiento o equilibrio + balance rotacional + objetividad + conservación de masa.
- Para describir un "problema", se necesita más información:
  1. la región del espacio $\mathcal{B}_0$ sobre la cual se aplican las ecuaciones,
  2. las condiciones de borde (CB) sobre la frontera $\partial\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}_0$,
  3. las condiciones iniciales.

# Problema de equilibrio

- El **problema de equilibrio** para materiales hiperelásticos está definido por las ecuaciones diferenciales (5) $+$ CB.
- Se pide determinar la solución (o soluciones) $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$ de la ecuación de equilibrio (5), *si existe*.
- En el sentido clásico, se dice que un problema está **bien puesto** cuando tiene solución única y continua con respecto a los datos.
- Esta noción clásica no es apropiada en Elasticidad no lineal, donde no se puede esperar en general unicidad de la solución.
- Además, no siempre se puede esperar existencia dentro del espacio de deformaciones $\chi$ con derivadas continuas hasta el segundo orden, y se deben buscar **soluciones débiles**.

# Condiciones de borde

- **CB de posición o desplazamiento**

$$\mathbf{x} = \bar{\chi}(\mathbf{X}) \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_0$$

- **CB de tracción**: la tracción, referida a la superficie $\partial \mathcal{B}_0$, es $\mathbf{S}^T\mathbf{N}$ por unidad de área de $\partial \mathcal{B}_0$.
    - **CB de carga muerta**: cambios en la superficie no modifican la carga:

    $$\mathbf{S}^T\mathbf{N} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}) \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_0$$

    - **CB de carga dependiente de la configuración o seguidora**:

    $$\mathbf{S}^T\mathbf{N} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{A}) \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_0,\ \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}),\ \mathbf{A} = \operatorname{Grad} \chi(\mathbf{X}).$$

- **CB mixta**

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \bar{\chi}(\mathbf{X}) \qquad & \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_0^x \\ \mathbf{S}^T\mathbf{N} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \dots) \qquad & \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_0^\sigma. \end{aligned}$$

con $\partial \mathcal{B}_0^x \cup \partial \mathcal{B}_0^\sigma = \partial \mathcal{B}_0$, $\partial \mathcal{B}_0^x \cap \partial \mathcal{B}_0^\sigma = \emptyset$.

# Restricciones sobre la deformación

- Es necesario plantear hipótesis adecuadas sobre $W$ para asegurar la existencia de soluciones significativas $\chi$ al PVB, pero no es suficiente.
- Toda solución $\chi$ debe ser consistente con ciertos requisitos de base física:

1. restricción sobre el gradiente de deformación:

$$\det \mathrm{Grad}\, \chi(\mathbf{X}) > 0 \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_0$$

   Para un material incompresible, debe verificarse

$$\det \mathrm{Grad}\, \chi(\mathbf{X}) = 1 \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_0$$

2. correspondencia uno-a-uno sobre $\mathcal{B}_0$:

$$\chi(\mathbf{X}) = \chi(\mathbf{X}') \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}'$$

   (evita interpenetración entre partículas)

# Teorema de Eriksen

- **Teorema de Eriksen:** *las deformaciones homogéneas son las únicas deformaciones de un sólido elástico isótropo sin restricciones internas que pueden obtenerse por aplicación de tracciones superficiales solamente, independientemente de la forma de la función de energía de deformación.*

# Teorema de Eriksen: Demostración

- Para $W$ isótropa:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial W}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{A}}$$

con $I_i$ invariante principal de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, y

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}^T, \qquad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = 2(I_1\mathbf{I} - \mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{A}^T, \qquad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = 2I_3\mathbf{B}^T$$

- Equilibrio en ausencia de fuerzas de cuerpo:

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial I_i}\,\mathrm{Div}\,\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{A}} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}(\,\mathrm{Grad}\,I_j)\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{A}} = \boldsymbol{0}$$

Se cumple para $W$ arbitraria si:

$$\mathrm{Div}\,\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{A}} = \boldsymbol{0}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

$$(\,\mathrm{Grad}\,I_j)\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{A}} + (\,\mathrm{Grad}\,I_i)\frac{\partial I_j}{\partial \mathbf{A}} = \boldsymbol{0}, \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{7}$$

# Teorema de Eriksen: Demostración

- Usando ecuación (6) para $i = 1$, resulta $\operatorname{Div} \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$ o, en componentes Cartesianas:

$$[\operatorname{Div} \mathbf{A}^T]_\beta = A_{i\beta,\beta} = x_{i,\beta\beta} = 0 \tag{8}$$

- Usando ecuación (7) con $i = j = 1$, tenemos:

$$\operatorname{Grad} I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \operatorname{Grad} I_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \operatorname{tr} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 2\mathbf{A}^T \operatorname{Grad} I_1 = \mathbf{0}$$

- Luego, como $\mathbf{A}$ es no singular, resulta $\operatorname{Grad} I_1 = \mathbf{0}$ o, en componentes Cartesianas:

$$[\operatorname{Grad} I_1]_\beta = (\operatorname{tr} \mathbf{A}^T \mathbf{A})_{,\beta} = (A^T_{\alpha i} A_{i\alpha})_{,\beta} = 2A_{i\alpha} A_{i\alpha,\beta} = 0$$

- Derivando respecto de $X_\beta$:

$$\begin{aligned}(A_{i\alpha} A_{i\alpha,\beta})_{,\beta} &= A_{i\alpha,\beta} A_{i\alpha,\beta} + A_{i\alpha} A_{i\alpha,\beta\beta} \\ &= A_{i\alpha,\beta} A_{i\alpha,\beta} + A_{i\alpha} x_{i,\alpha\beta\beta} \\ &= A_{i\alpha,\beta} A_{i\alpha,\beta} + A_{i\alpha} (x_{i,\beta\beta})_{,\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

# Teorema de Eriksen: Demostración

- Usando ecuación (8) en (9), tenemos:

$$A_{i\alpha,\beta} A_{i\alpha,\beta} = 0$$

de donde

$$A_{i\alpha,\beta} = 0$$

o

$$\operatorname{Grad} \mathbf{A} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \text{Deformación homogénea (Q.E.D.)}$$

# Deformación y tensión admisibles

- Las ecuaciones que gobiernan la deformación $\chi$ y la tensión $\mathbf{S}$ en un cuerpo hiperelástico en equilibrio son

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}\mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} &= \boldsymbol{0} && (10)\\ \mathbf{S} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}} && (11)\\ \mathbf{A} &= \operatorname{Grad}\chi \qquad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0 && (12) \end{aligned}$$

sujetas a las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \chi &= \bar{\chi} \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_0^x && (13)\\ \mathbf{S}^T\mathbf{N} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \forall \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_0^\sigma && (14) \end{aligned}$$

# Deformación cinemáticamente admisible

- **Deformación cinemáticamente admisible (DCA)**: campo vectorial $\chi$ definido en $\mathcal{B}_0$, continuo y con derivadas de orden $n \geq 2$ continuas (i.e., "suficientemente suave"), que satisface la condición de borde

$$\chi = \bar{\chi} \qquad \text{en } \partial\mathcal{B}_0^x$$

A este campo puede asociarse un campo tensorial de 2° orden $\mathbf{S}$ usando

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}, \qquad \text{con } \mathbf{A} = \operatorname{Grad} \chi$$

pero ese campo no necesariamente satisfará

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} &= \mathbf{0} \qquad \text{en } \mathcal{B}_0 \\ \mathbf{S}^T \mathbf{N} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{en } \partial\mathcal{B}_0^\sigma \end{aligned}$$

# Tensión estáticamente admisible

- **Tensión (nominal) estáticamente admisible (TEA)**: campo tensorial de 2° orden $\mathbf{S}$ definido en $\mathcal{B}_0$, continuo y con derivadas de orden $n \geq 1$ continuas (i.e., "suficientemente suave"), que satisface la ecuación de equilibrio

$$\operatorname{Div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad \text{en } \mathcal{B}_0$$

y la condición de borde

$$\mathbf{S}^T \mathbf{N} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{en } \partial \mathcal{B}_0^{\sigma}$$

con $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\chi)$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \chi, \operatorname{Grad} \chi)$ definido para alguna DCA $\chi$.

# Tensión estáticamente admisible

- Se ve que $\mathbf{S}$ depende en general de la elección de $\boldsymbol{\chi}$, pero $\mathbf{S}$ y $\boldsymbol{\chi}$ no están necesariamente relacionadas por

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}, \qquad \text{con } \mathbf{A} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{\chi}$$

- Cuando $\mathbf{b} = \boldsymbol{0}$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es carga muerta, la definición de una TEA no implica la elección de una DCA.

# Principio de los trabajos virtuales

- Sean $\chi'$ y $\chi^*$ DCAs, y $\mathbf{S}'$ TEA asociada a $\chi'$ con $\mathbf{b}' = \mathbf{b}(\chi')$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}' = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \chi', \operatorname{Grad}\chi')$. Luego:

$$\operatorname{Div}\mathbf{S}' + \rho_0\mathbf{b}' = \mathbf{0} \qquad \forall\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0 \tag{15}$$

$$\mathbf{S}'^T\mathbf{N} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}' \qquad \forall\mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_0^\sigma \tag{16}$$

Hacemos (15)$\cdot\chi^*$ e integramos sobre $\mathcal{B}_0$:

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\operatorname{Div}\mathbf{S}') \cdot \chi^* \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}' \cdot \chi^* \,\mathrm{d}V =$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{Div}(\mathbf{S}'\chi^*)\,\mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{tr}(\mathbf{S}' \overbrace{\operatorname{Grad}\chi^*}^{\mathbf{A}^*})\,\mathrm{d}V$$

$$+ \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}' \cdot \chi^* \,\mathrm{d}V = 0 \tag{17}$$

# Principio de los trabajos virtuales

Usando teorema de la divergencia y CBs:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{Div}(\mathbf{S}'\boldsymbol{\chi}^*)\,\mathrm{d}V$$
$$= \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}'\boldsymbol{\chi}^*)\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}'^T\mathbf{N})\cdot\boldsymbol{\chi}^*\,\mathrm{d}S$$
$$= \int_{\partial\mathcal{B}_0^x} (\mathbf{S}'\bar{\boldsymbol{\chi}})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}}'\cdot\boldsymbol{\chi}^*\,\mathrm{d}S \quad (18)$$

Introduciendo (18) en (17):

$$\int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{tr}(\mathbf{S}'\mathbf{A}^*)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0^x} (\mathbf{S}'\bar{\boldsymbol{\chi}})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}}'\cdot\boldsymbol{\chi}^*\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}'\cdot\boldsymbol{\chi}^*\,\mathrm{d}V \quad (19)$$

# Principio de los trabajos virtuales

Adoptemos $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$ correspondiente a $\chi$ en (19), con $\chi$ y $\mathbf{S}$ solución del PVB (10)-(14):

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{tr}\,(\mathbf{S}\mathbf{A}^*)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0^x} (\mathbf{S}\bar{\chi})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\chi^*\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}\cdot\chi^*\,\mathrm{d}V \quad (20)$$

Adoptemos $\chi^* = \chi$ en (20):

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{tr}\,(\mathbf{S}\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0^x} (\mathbf{S}\bar{\chi})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\chi\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}\cdot\chi\,\mathrm{d}V \quad (21)$$

# Principio de los trabajos virtuales

Definimos $\delta\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}^* - \boldsymbol{\chi}$ tal que $\delta\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}$ en $\partial\mathcal{B}_0^x$, $\delta\mathbf{A} = \operatorname{Grad}\delta\boldsymbol{\chi} = \mathbf{A}^* - \mathbf{A}$, y restamos (21) de (20):

$$\int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{tr}(\mathbf{S}\delta\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}V \tag{22}$$

- Este es el **principio de los trabajos (o desplazamientos) virtuales (PTV)**.
  - **Lado derecho:** incremento *virtual* del trabajo de las tensiones a $\mathbf{S}$ fijo.
  - **Lado izquierdo:** trabajo realizado por las fuerzas de superficie y las de cuerpo ante un desplazamiento *virtual* $\delta\boldsymbol{\chi}$ a partir de la configuración actual, suponiendo que las fuerzas de superficie y las de cuerpo se mantienen fijas durante el desplazamiento $\delta\boldsymbol{\chi}$ y que $\delta\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}$ sobre $\partial\mathcal{B}_0^x$.

# Principio de los trabajos virtuales

- Notar que

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{S}\delta\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}\delta\mathbf{A}\right) \tag{23}$$

es la aproximación de primer orden a $\delta W$.

- Luego, para $\delta\boldsymbol{\chi}$ infinitesimal, el PTV toma la forma

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta W \,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} \,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} \,\mathrm{d}V \tag{24}$$

donde $\delta W$ es el incremento de la energía elástica almacenada debido a un desplazamiento infinitesimal $\delta\boldsymbol{\chi}$ a partir de la configuración actual.

# Principio de los trabajos virtuales

Para cuerpos hiperelásticos en equilibrio, notar el paralelismo entre

- PTV:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} + \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}S}_{\text{trabajo virtual externo}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \delta W \, \mathrm{d}V}_{\text{trabajo virtual interno}}$$

- Balance de energía mecánica (Lagrangiano):

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\mathbf{S}^T \mathbf{N}) \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} \mathrm{d}A}_{\text{potencia de las fuerzas aplicadas}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0} \dot{W} \, \mathrm{d}V}_{\substack{\text{tasa de cambio} \\ \text{de la energía de} \\ \text{deformación total}}}$$

# Principio de los trabajos virtuales

- Notar que

$$\operatorname{tr}(\mathbf{S}\delta\mathbf{A}) = \operatorname{Div}(\mathbf{S}\delta\boldsymbol{\chi}) - (\operatorname{Div}\mathbf{S})\cdot\delta\boldsymbol{\chi} \tag{25}$$

Introduciendo (25) en el PTV (22):

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\operatorname{Div}(\mathbf{S}\delta\boldsymbol{\chi}) - (\operatorname{Div}\mathbf{S})\cdot\delta\boldsymbol{\chi}]\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}\cdot\delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{26}$$

Usando el teorema de la divergencia:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{Div}(\mathbf{S}\delta\boldsymbol{\chi})\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}\delta\boldsymbol{\chi})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{S}^T\mathbf{N})\cdot\delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} (\mathbf{S}^T\mathbf{N})\cdot\delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}S \tag{27}$$

# Principio de los trabajos virtuales

Introduciendo (27) en el PTV (26):

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \overbrace{\left(\mathbf{S}^T \mathbf{N} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right)}^{\text{CB de carga (14)}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}_0} \underbrace{\left(\operatorname{Div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}\right)}_{\text{Ec. de equilibrio (10)}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}V = 0 \quad (28)$$

⇒ Si $\mathbf{S}$ satisface el PTV para $\delta\boldsymbol{\chi}$ arbitrario, $\mathbf{S}$ satisface la ecuación de equilibrio y la condición de borde de carga simultáneamente, y viceversa.

# Principio variacional

- Para que el PTV (24) sea un verdadero **principio variacional**, cada uno de sus términos tendría que expresarse como variación de algún funcional de $\boldsymbol{\chi}$.
  - Para que $\mathbf{b} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} = \delta$(función escalar de $\boldsymbol{\chi}$), $\mathbf{b}$ debe ser conservativa:

$$\mathbf{b} = -\operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{\chi}) \implies \mathbf{b} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} = -\delta\phi \tag{29}$$

  - Si $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\chi})$ es independiente de $\operatorname{Grad}\boldsymbol{\chi}$:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\operatorname{grad}\psi(\mathbf{X}, \boldsymbol{\chi}) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} = -\delta\psi \tag{30}$$

- Usando (29) y (30), el PTV (24) toma la forma del principio variacional:

$$\delta\left(\int_{\mathcal{B}_0} (W + \rho_0\phi)\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \psi\,\mathrm{d}S\right) = 0 \tag{31}$$

# Principio variacional

- En caso de carga muerta $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X})$:

$$\psi = -\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\chi}$$

- En caso de carga seguidora $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, \chi, \mathbf{A}) = [\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}, \chi, \mathbf{A})]^T \mathbf{N}$:

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} (\boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{N}) \cdot \delta \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\boldsymbol{\Sigma} \delta \boldsymbol{\chi}) \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}S$$
$$= \int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{Div}\,(\boldsymbol{\Sigma} \delta \boldsymbol{\chi}) \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}_0} [(\,\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \boldsymbol{\chi} + \,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Sigma} \delta \mathbf{A})] \, \mathrm{d}V$$

El último integrando será variación de una función escalar $\varphi = \varphi(\mathbf{X}, \chi, \mathbf{A})$ si

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{A}}, \qquad \mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Sigma} = \,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\Longrightarrow \delta \varphi = (\,\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \boldsymbol{\chi} + \,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Sigma} \delta \mathbf{A})$$

# Principio variacional

- Luego, el PTV (24) toma la forma del principio variacional:

$$\delta \left( \int_{\mathcal{B}_0} (W + \rho_0 \phi - \varphi) \, \mathrm{d}V \right) = 0 \tag{32}$$

- Si $\varphi = -pJ$, con $p$ constante, tenemos $\boldsymbol{\Sigma} = -pJ\mathbf{B}^T$. De aquí sale la CB de presión uniforme $p$:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{N} = -pJ\mathbf{BN} \text{ sobre } \partial\mathcal{B}_0^\sigma$$

# Funcional de energía potencial

- Consideremos los PVs (31) y (32):

$$\delta \underbrace{\left( \int_{\mathcal{B}_0} (W + \rho_0 \phi) \, \mathrm{d}V + \int_{\partial \mathcal{B}_0^\sigma} \psi \, \mathrm{d}S \right)}_{E\{\chi\}} = 0 \tag{33}$$

$$\delta \underbrace{\left( \int_{\mathcal{B}_0} (W + \rho_0 \phi - \varphi) \, \mathrm{d}V \right)}_{E\{\chi\}} = 0 \tag{34}$$

- $E\{\chi\} = E(\chi, \operatorname{Grad} \chi)$: **funcional de energía potencial.**

# Principio de estacionaridad de la energía potencial

- Como procedimos para llegar a (28), los PVs (33) y (34) dan lugar a

$$\delta E = \int_{\partial\mathcal{B}_0^\sigma} \overbrace{\left(\mathbf{S}^T\mathbf{N} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right)}^{\text{CB de carga (14)}} \cdot\delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}_0} \underbrace{\left(\operatorname{Div}\mathbf{S} + \rho_0\mathbf{b}\right)}_{\text{Ec. de equilibrio (10)}} \cdot\delta\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}V = 0$$

- **Principio (variacional) de estacionaridad de la energía potencial**: la deformación $\boldsymbol{\chi}$ es solución de un PVB dado si y sólo si la variación $\delta E$ de $E\{\boldsymbol{\chi}\}$ se anula para todas las variaciones $\delta\boldsymbol{\chi}$ (con $\delta\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}$ sobre $\partial\mathcal{B}_0^x$).
- En otras palabras, la solución es la DCA que hace que $E$ sea estacionaria en el espacio de DCAs.