Mecánica de Sólidos
Guía N° 3: Tensores - Parte III

1. Si $\det \boldsymbol{T} \neq 0$ mostrar:

$$\det(\boldsymbol{T}^{-1} - \lambda^{-1}\boldsymbol{I}) = 0$$

y luego:

$$\lambda^{-3} - I_1(\boldsymbol{T}^{-1})\lambda^{-2} + I_2(\boldsymbol{T}^{-1})\lambda^{-1} - I_3(\boldsymbol{T}^{-1}) = 0 \tag{1}$$

con:

$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{T}^{-1}) &= I_2(\boldsymbol{T})/I_3(\boldsymbol{T}) \\ I_2(\boldsymbol{T}^{-1}) &= I_1(\boldsymbol{T})/I_3(\boldsymbol{T}) \\ I_3(\boldsymbol{T}^{-1}) &= 1/I_3(\boldsymbol{T}) \end{aligned}$$

2. Mostrar que

$$\boldsymbol{T}^{-1} = (\boldsymbol{T}^2 - I_1(\boldsymbol{T})\boldsymbol{T} + I_2(\boldsymbol{T})\boldsymbol{I})/I_3(\boldsymbol{T})$$

y deducir que $\boldsymbol{T}^r$ puede expresarse en términos de $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{T}$, y $\boldsymbol{T}^2$, con coeficientes invariantes de $\boldsymbol{T}$, para r entero positivo o negativo.

3. Demostrar que si el tensor $\boldsymbol{T}$ es simétrico, sus autovectores son reales.

4. Dos tensores simétricos de orden 2 se dicen *coaxiales* si sus ejes principales coinciden. Mostrar que $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ son coaxiales si y sólo si $\boldsymbol{ST} = \boldsymbol{TS}$.

5. Hallar los valores y direcciones principales para el tensor de 2º orden $\boldsymbol{T}$ cuyas componentes, referidas a alguna base ortonormal, son:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dar la matriz de rotación que lleva T a tener forma diagonal.

6. Sea $\{\boldsymbol{e}_i\}$ base ortonormal tal que $\boldsymbol{e}_3$ es autovector de $\boldsymbol{T}$ simétrico de orden 2 con autovalor λ_3. Si λ_1, λ_2 son los dos autovalores restantes, mostrar que existe un ángulo θ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} = (\lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta)\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \\ (\lambda_1 \sin^2\theta + \lambda_2 \cos^2\theta)\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\sin\theta\cos\theta(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) \end{aligned}$$

7. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y $\hat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}/|\boldsymbol{w}|$ una base ortonormal, con $\boldsymbol{w}$ vector axial de $\boldsymbol{W}$. Mostrar:
$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{W}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})$$
y
$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{W}\boldsymbol{u})$$

8. Usando
$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}) \cos\theta + (\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) \sin\theta$$
mostrar:
$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cos\theta + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}(1 - \cos\theta) + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \sin\theta \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{E}$$
Si $\boldsymbol{U}$ es un tensor antisimétrico de orden 2 con vector axial $\boldsymbol{u}$, mostrar:
$$\boldsymbol{Q} = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \sin\theta \boldsymbol{U}$$

9. Mostrar que los invariantes principales de $\boldsymbol{Q}$ son
$$I_1(\boldsymbol{Q}) = I_2(\boldsymbol{Q}) = 1 + 2\cos\theta, \qquad I_3(\boldsymbol{Q}) = 1$$
Obtener su ecuación característica y mostrar que existe al menos un autovalor real.

10. Mostrar
$$\nabla \otimes (\phi \boldsymbol{T}) = \phi \nabla \otimes \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} \otimes \nabla\phi$$
Si $\boldsymbol{T}$ es un campo tensorial de orden 2, deducir
$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{T}) = \phi \nabla \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T \nabla\phi$$
Además:
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{v} + \operatorname{tr}\{\boldsymbol{T}(\nabla \otimes \boldsymbol{v})\}$$
con $\boldsymbol{v}$ campo vectorial.

11. Usar $(\nabla \otimes \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a})\big|_{t=0}$ para mostrar que $\nabla \otimes \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}$, con $\boldsymbol{r}$ campo vectorial posición e $\boldsymbol{I}$ identidad. Deducir $\nabla \cdot \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = 3$.

12. Si $r = |\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})|$, mostrar que $\nabla r = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})/r$. Luego, simplificar $\nabla \cdot (r^\alpha \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}))$, $\nabla \cdot (r^\alpha \boldsymbol{a})$, y $\nabla \cdot \{r^\alpha (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}))\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}$.

13. Mostrar que $\nabla \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, y
$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{v}) = \phi \nabla \times \boldsymbol{v} + \nabla\phi \times \boldsymbol{v}$$

14. Mostrar que $\nabla \otimes \nabla \otimes \boldsymbol{v}$ tiene contracciones $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$ y $(\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$ (el operador de Laplace $\nabla \cdot \nabla$ se nota también ∇^2).

    Usar $(\nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{a} = \nabla \cdot (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{a})$ con $\boldsymbol{v}$ reemplazado por $\nabla \times \boldsymbol{v}$, junto a
    $\left\{\nabla \otimes \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - (\nabla \otimes \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))^T\right\} \boldsymbol{a} = \{\nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\} \times \boldsymbol{a}$ para mostrar la identidad
    $$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla^2 \boldsymbol{v}$$

15. Probar:
    $$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} - (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} \\ \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \\ &\quad (\nabla \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \\ \nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \\ &\quad (\nabla \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u} - (\nabla \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

    $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ campo vectorial.

16. Si ϕ es un campo escalar, mostrar que $\nabla \otimes \nabla\phi$ es un campo tensorial orden 2, y que $\nabla \times (\nabla\phi) = \boldsymbol{0}$.

17. Mostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}$ campo vectorial.

18. Use representación en componentes Cartesianas para mostrar los resultados de los problemas 15, 16 y 17.

19. Si ϕ es un campo escalar, mostrar que las componentes de $\nabla \otimes \nabla\phi$ transforman como un CT(2). Deducir que $\nabla^2\phi$ es CT(0). Mostrar que $\nabla \times \boldsymbol{v}$ es un CT(1).

20. Si $\phi, \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{S}$ son campos escalar, vectorial y tensorial, respectivamente, tales que $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ y
    $$\boldsymbol{S} = -\phi \boldsymbol{I} + \alpha\{\nabla \otimes \boldsymbol{v} + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^T\}$$
    con $\alpha \in \mathbb{R}$, mostrar que
    $$\nabla \cdot \boldsymbol{S} = -\nabla\phi + \alpha \nabla^2 \boldsymbol{v}$$
    y
    $$\nabla(\operatorname{tr} \boldsymbol{S}) = -3\nabla\phi$$