Mecánica de Sólidos

Guía N°6: Leyes de Conservación, Tensión y Ecuaciones de Campo

1. Mostrar que
$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})$$
con ρ densidad en la configuración actual $\mathcal{B}$ durante el movimiento del cuerpo B, $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de la partícula material y $\frac{\partial}{\partial t}$ es la derivada temporal *Euleriana*.

2. Mostrar que podemos expresar la forma global de conservación de masa:
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x},t)\; dv = 0$$
en la forma:
$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t)\; dv = -\int_{\partial\mathcal{D}} \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}\, ds$$
donde $\mathcal{D}$ es la región fija de $\mathcal{E}$ ocupada por el cuerpo en el instante t (o sea, $\mathcal{B}$ coincide con $\mathcal{D}$ en t), $\partial\mathcal{D}$ su frontera, de normal exterior $\boldsymbol{n}$.

3. Si $\boldsymbol{t}$ es la tracción por unidad de área sobre una superficie de normal $\boldsymbol{n}$, mostrar que el cuadrado de la magnitud de la tensión de corte sobre esa superficie es:
$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t})^2$$
Si $n_i, i = 1,2,3$ son las componentes de $\boldsymbol{n}$ en los ejes principales del tensor de tensiones de Cauchy, mostrar que la expresión anterior se escribe:
$$(t_2-t_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (t_3-t_1)^2 n_3^2 n_1^2 + (t_1-t_2)^2 n_1^2 n_2^2$$
con $t_i, i = 1,2,3$ tensiones principales de Cauchy.

   Mostrar luego que el promedio de este valor sobre todas las direcciones posibles $\boldsymbol{n}$ es
$$\frac{1}{15}\{(t_2-t_3)^2 + (t_3-t_1)^2 + (t_1-t_2)^2\}$$
y deducir que este se puede expresar como
$$\frac{2}{15}\{[I_1(\boldsymbol{T})]^2 - 3I_2(\boldsymbol{T})\}$$
con $I_1(\boldsymbol{T})$ e $I_2(\boldsymbol{T})$ los dos primeros invariantes de $\boldsymbol{T}$.

4. Mostrar que

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{N} \mathrm{d}S$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{S} \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{N} \mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{b}_0 \mathrm{d}V$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{A}\boldsymbol{S} \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{N} \mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{b}_0 \mathrm{d}V$$

   para un cuerpo en equilibrio en una configuración $\mathcal{B}$, con $\boldsymbol{A}$ el gradiente de deformación y $\mathcal{B}_0$ su configuración de referencia.

5. Mostrar que

$$\boldsymbol{T}^{(-1)} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{(1)}\boldsymbol{U}$$

   es el tensor de tensiones conjugado de $\boldsymbol{E}^{(-1)}$.

6. Mostrar que $\boldsymbol{A}^T\hat{\boldsymbol{T}}$ es el tensor de tensiones conjugado del tensor de deformación $-\boldsymbol{B}$.

7. Mostrar que en general no existe tensor de deformación (strain) conjugado a $\boldsymbol{A}^T\hat{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}$. Dar una interpretación en términos de carga y área para este tensor de tensiones similar a la vista para $\boldsymbol{T}^{(2)}$.