3) INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Sistema de 1 GDL. Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\, a(q)\, \dot{q}^2 - U(q)$$

q: coord generalizada

En coord Cartesianas:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

Las ecs de movimiento en ambos casos pueden integrarse en forma general.

Para ello, partimos de la conservación de energía

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \geq 0$$

$$E \geq U(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U\right)} \qquad E = U(x) \text{ si } \dot{x} = 0$$

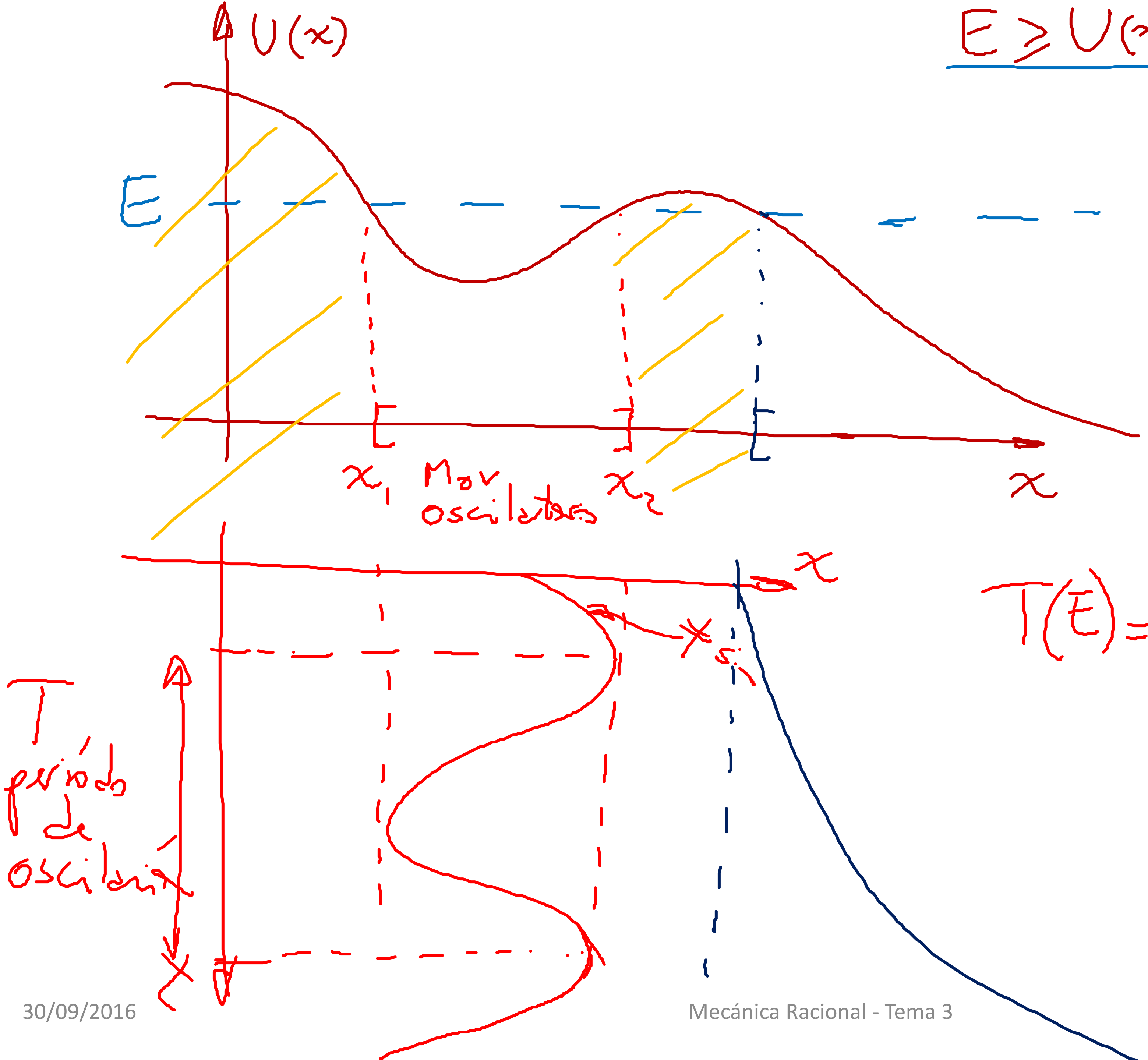
"turning points"

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{}} \Rightarrow t = \int \frac{dx}{\sqrt{2/m\,(E - U(x))}} + C$$

Hay 2 ctes a determinar $\Rightarrow E$

$C \Rightarrow$ C Iniciales

$$E \geq U(x)$$

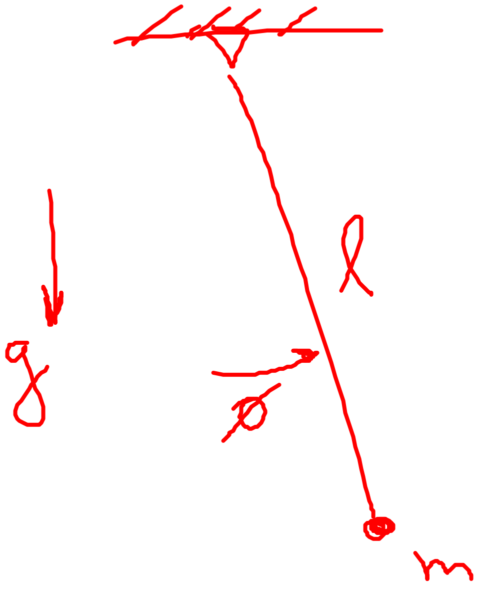


$x_1, x_2, T = f(E)$

$t_{x_1 \to x_2} = t_{x_2 \to x_1}$

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

Ej: Período de oscilación de péndulo simple



ϕ_0: máximo valor de ϕ

$$E = \frac{1}{2}\underbrace{m l^2}_{M}\dot{\phi}^2 \underbrace{- mgl\cos\phi}_{U(\phi)} = -mgl\cos\phi_0$$

$$T(E) = \sqrt{2M}\int_{-\phi_0}^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{E-U}} = \sqrt{2ml^2}\; 2\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{-mgl\cos\phi_0 + mgl\cos\phi}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\cancel{m}l^{\cancel{2}}}{\cancel{m}g\cancel{l}}}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

$$4\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

$$\cos\phi - \cos\phi_0 = \sin^2\frac{\phi_0}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$\underbrace{\cos^2\frac{\phi}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}_{\cos\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\phi}{2}\right)} = \left(\cos^2\frac{\phi_0}{2} - \sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) = \cancel{1} - \sin^2\frac{\phi}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2} -$$

$$-\left(\cancel{1} - \sin^2\frac{\phi_0}{2} - \sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}\right)$$

Define $\sin\xi = \dfrac{\sin\phi/2}{\sin\phi_0/2}$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi_0}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sin\frac{\phi_0}{2}}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\xi}}\;\Big)\phi$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\; K\left(\sin\frac{\phi_0}{2}\right)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

Integral elíptica completa de primer tipo.

P/peq oscilaciones: $\sin\phi_0/2 \simeq \phi_0/2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\phi_0^2}{16} + \dots\right)$$

Si $\phi_0 = 10^0 \Rightarrow \phi_0 \sim 0.2 \Rightarrow$ corrección $\frac{4}{1600}$

> $assume\left(\text{phi},'real', phi0,'real', y0,'real', \text{xi},'real', phi0 \geq \text{phi}, phi0 < \frac{\pi}{2}, l > 0, g > 0\right)$

>

>

> $ff := 4 \cdot \text{sqrt}\left(\frac{l}{2\,g}\right) \cdot int\left(\frac{1}{\text{sqrt}(\cos(\text{phi}) - \cos(phi0))}, \text{phi} = 0 .. phi0\right)$

$$ff := \frac{4\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{l\sim}{g\sim}}\;\text{InverseJacobiAM}\left(\frac{1}{2}\,\phi0\sim, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\cos(\phi0\sim)+1}}\right)}{\sqrt{-\cos(\phi0\sim)+1}} \quad (1)$$

>

> $evalf(subs(phi0 = 0.001, ff));$

$$6.282025012\,\sqrt{\frac{l\sim}{g\sim}} \quad (2)$$

> $evalf(subs(phi0 = 0.2, ff));$

$$6.298738272\,\sqrt{\frac{l\sim}{g\sim}} \quad (3)$$

> $evalf(subs(phi0 = 0.4, ff));$

$$6.346539048\,\sqrt{\frac{l\sim}{g\sim}} \quad (4)$$

> $evalf(subs(phi0 = 0.6, ff));$

$$6.427480572\,\sqrt{\frac{l\sim}{g\sim}} \quad (5)$$

> $evalf(subs(phi0 = 0.8, ff));$

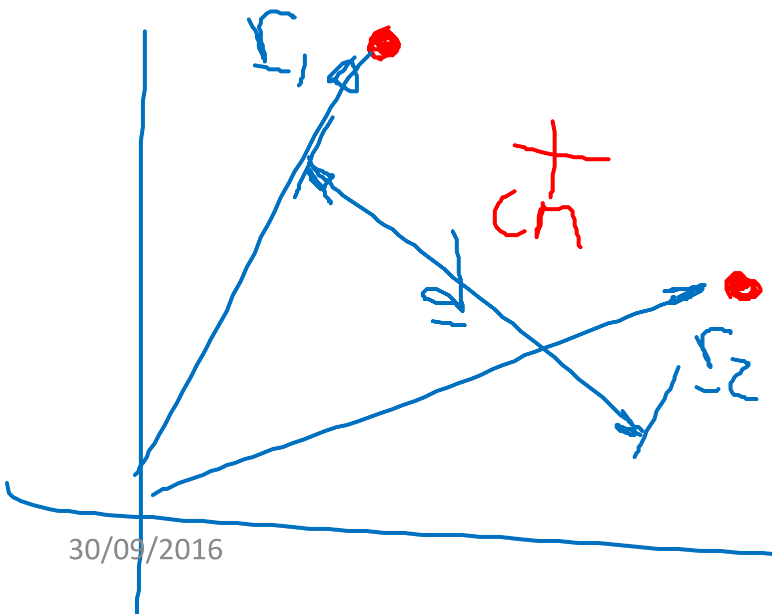
$$6.544039572\,\sqrt{\frac{l\sim}{g\sim}} \quad (6)$$

Ver determinar la energ pot a partir del período de oscilac.

Masa reducida

Sistema de 2 partículas.

Puede simplificarse separando el movimiento del sistema en el movimiento del CM y el de las part relativas al CM.



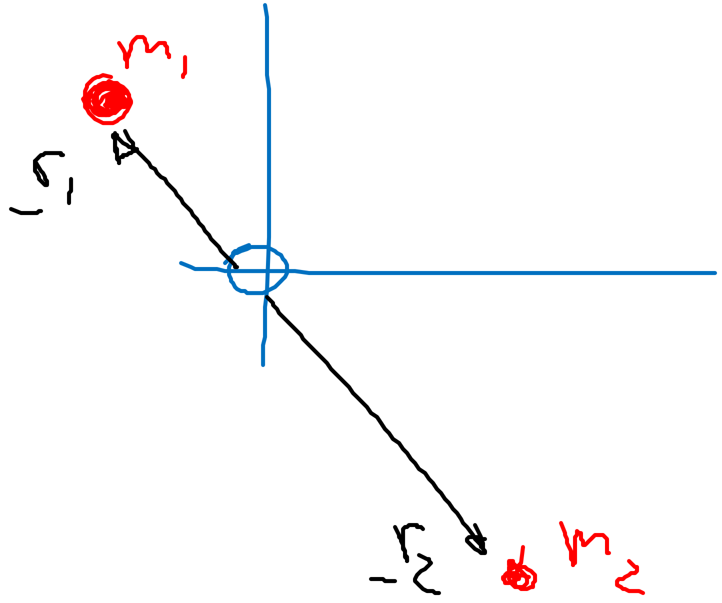
La energ potencial de la interacción entre part depende únicamente de la distancia entre ambas.

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$$

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \qquad \text{pos relativa}$$

Supongo q/el origen de coord está en el CM

$$m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = 0$$



$$\underline{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\underline{r}_2 = -\frac{m_2}{m_1}\left(\underline{r}_1 - \underline{r}\right)$$

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\underline{r}_1 = \frac{m_2}{m_1}\underline{r}$$

$$\underline{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\underline{r} \qquad \underline{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\underline{r}$$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\underline{r}} \qquad \dot{\underline{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\underline{r}}$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - U(|r|) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \dot{\underline{r}}^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \dot{\underline{r}}^2 - U(|r|)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2 \cancel{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}}_{m} \dot{r}^2 - U(|r|)$$

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(|r|)$$

$$\boxed{m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

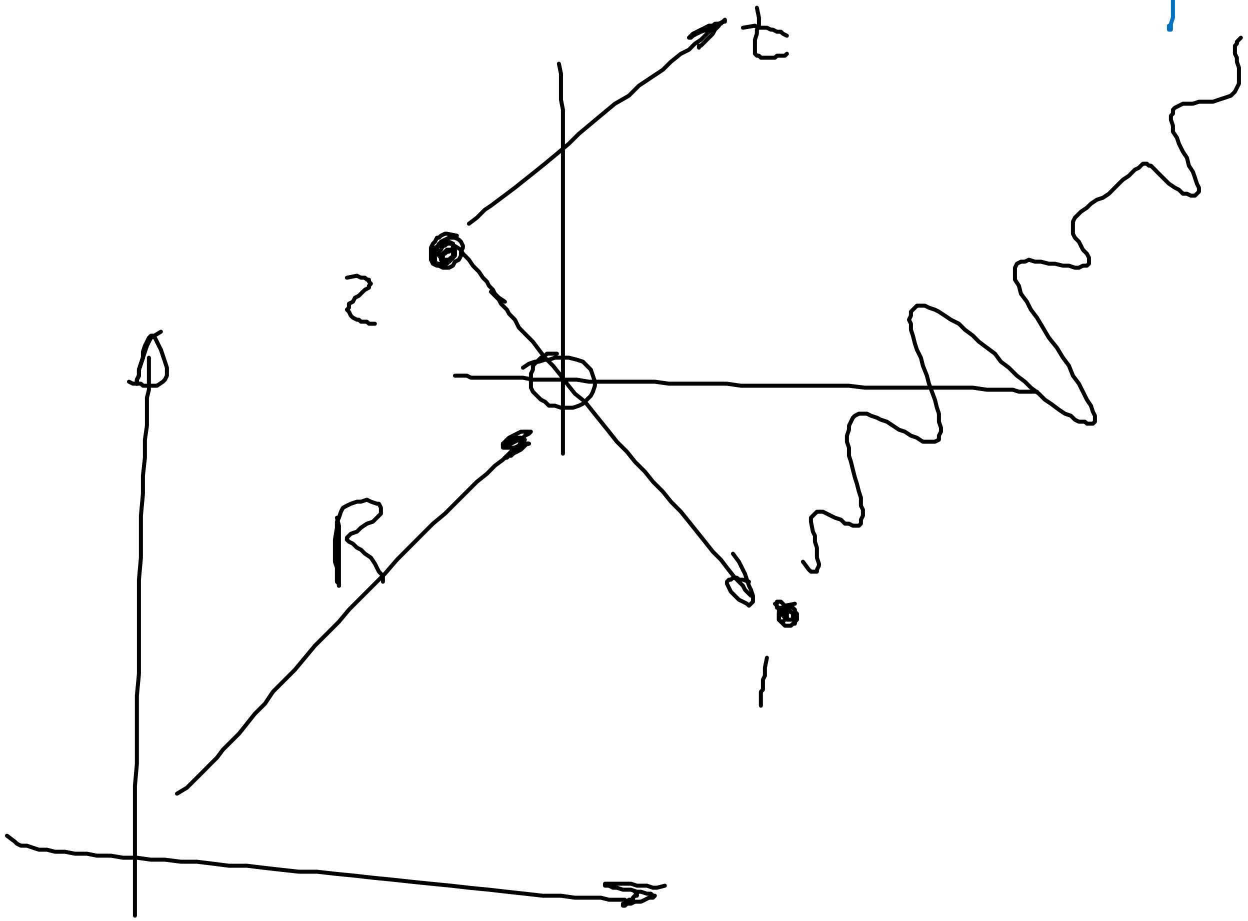
MASA REDUCIDA

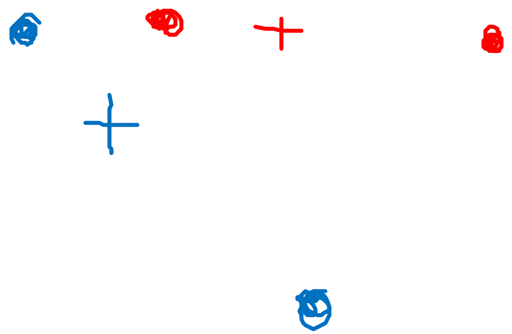
r: distancia entre partículas

Resolviendo $\underline{r} = \underline{r}(t)$ podemos calcular

$$\underline{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\underline{r}(t) \quad , \text{ etc}$$

$$|\underline{r}(t)| \Rightarrow \underline{r}(t)\;?$$





Movimiento en un campo central

Al reducir el prob de 2 part al movimiento de un cuerpo único, llegamos al problema de determinar el movimiento de una partícula en un campo externo / la energ potencial depende de la distancia $\underline{r}$

Este es llamado "campo central".

La fuerza:

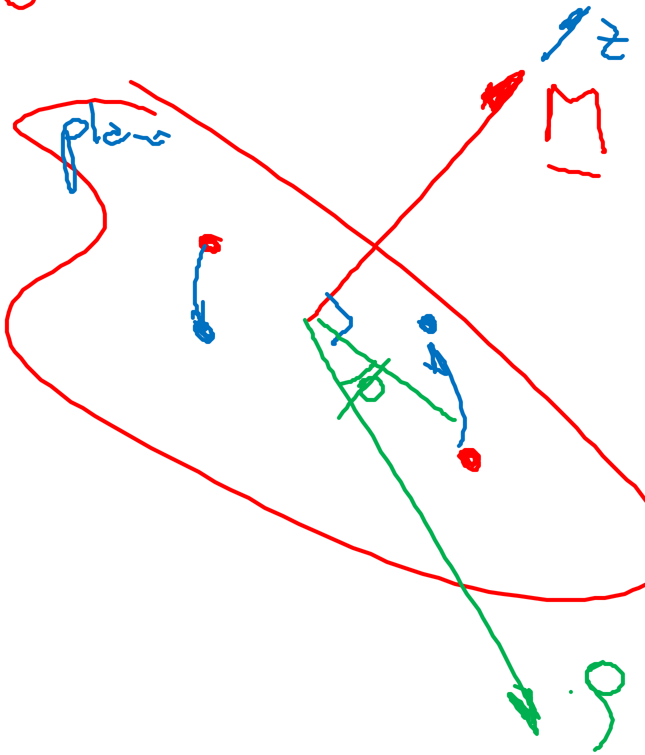
$$\underline{F} = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial \underline{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\,\frac{\underline{r}}{r}$$

$$r = \sqrt{\underline{r}\cdot\underline{r}} \qquad \frac{\partial r}{\partial \underline{r}} = \frac{1}{2\sqrt{}}\,2\underline{r} = \frac{\underline{r}}{r}$$

El momento angular de todo sistema respecto al centro del campo se conserva.

P/una partícula $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{p}$ $\therefore$ $\underline{M} \perp \underline{r}, \underline{p}$

Luego, $\underline{M}$ cte $\Rightarrow$ el movimiento es tal que $\underline{r}$ permanece en un plano $\perp \underline{M}$



$\therefore$ El camino de una partícula pertenece a un plano. Usamos coord polares en ese plano

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right) - U(\rho)$$

masa

Notar que el Lagrangiano no contiene explícitamente a ϕ

Toda coordenada generalizada q_i que no aparece explic. en el Lagrangiano es llamada "cíclica".

Notar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ \text{constante}$$

q_i cíclica

(integral del mov)

Esto permite hacer simplificaciones.

En este caso $p_\phi = m\rho^2\dot\phi \left(= \frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right)$

Coincide c/el Momento angular M_z (ver libro)

O sea q/ logramos la ley de conservación de momento angular:

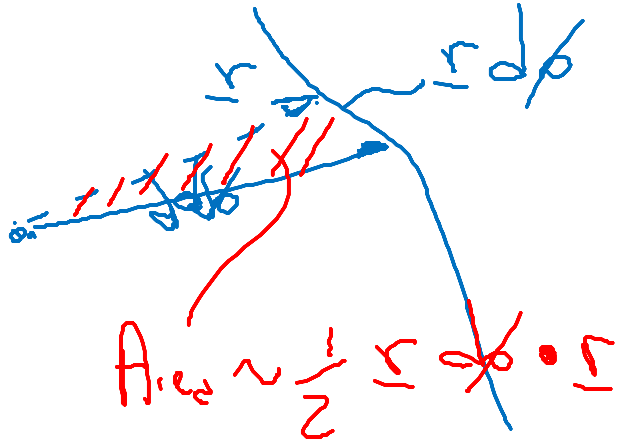
$$M = mr^2\dot\phi = cte.$$

Interpretación gráfica:

En el dif tiempo $\Rightarrow d\phi = \dot\phi\, dt$

$$M = 2m\, Area = cte$$

2° ley Kepler



$Area \sim \frac{1}{2} r\, d\phi \cdot r =$

Planteos conserv energía y momento... $M = m r^2 \dot{\phi}$

(*) $E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + U(r) = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{M^2}{m r^2} + U(r)}_{U_{eff}(r)}$

$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}$

$d\phi = \frac{M}{m r^2} dt$

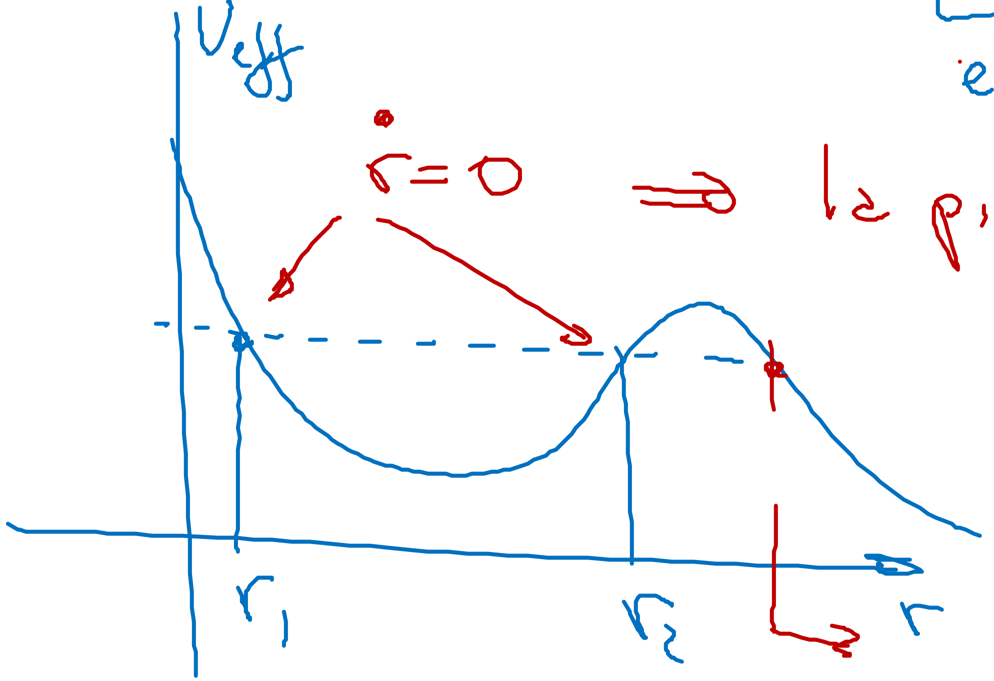
$t = \int \frac{dr}{\sqrt{}} + C$

$\frac{dr}{d\phi} = \frac{m r^2}{M} \sqrt{}$

$\Rightarrow \phi = \int \frac{M \, dr}{r^2 \sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - M^2/r^2}}$

La U_{eff}

$$U_{eff} = U(r) + \underbrace{\frac{M^2}{2mr^2}}_{\text{energía centrífuga}}$$



$\dot{r} = 0 \Rightarrow$ la partícula no está necesariamente en reposo ($\dot{\phi}$)