



**Examen Recuperatorio – 26/6/14**

1. Indicar, justificando adecuadamente, cuáles de estas afirmaciones para uel flujo de un fluido considera correcta y porqué.
  - a. Si un campo de velocidad es estacionario, luego el campo de aceleración también es estacionario.
  - b. Si un campo de velocidad es homogéneo, luego el campo de aceleración es nulo.
  - c. Si un campo de velocidad es estacionario y el medio es incompresible, luego el campo de aceleración es nulo.

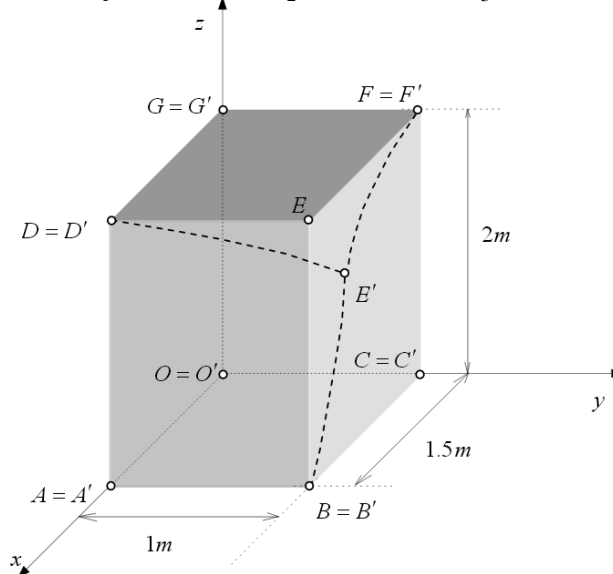
2. Sea el campo de velocidad:

$$\begin{cases} v_1 = -3x_2 + x_3 \\ v_2 = 3x_1 - 5x_3 \\ v_3 = -x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

Mostrar que este movimiento corresponde a un movimiento de cuerpo rígido.

3. El paralelepípedo de la figura, se deforma según indican las líneas de puntos. Las componentes de desplazamiento están dadas por:

$$u = C_1xyz \quad ; \quad v = C_2xyz \quad ; \quad w = C_3xyz$$



- a. Si la posición actual del punto E, representada por E', tiene coordenadas (1.503, 1.001, 1.997), determinar el estado de deformación infinitesimal en el punto E.
  - b. Para las mismas condiciones anteriores, obtenga la deformación normal en el punto E en la dirección de la línea ED.
  - c. Sabiendo que la deformación volumétrica específica es  $\varepsilon_V = \text{div } \boldsymbol{\varepsilon}$ , calcular el cambio total de volumen del paralelepípedo.
4. Mostrar que  $e_{ijk}\sigma_{jk} = 0$ , donde  $e_{ijk}$  es el símbolo de permutación y  $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$  es un tensor simétrico.

①

$$1) \quad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$a) \text{ Campo de velocidad estacionario } \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$$

$$\therefore a_i = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Luego, el campo de aceleración no depende del tiempo  $\Rightarrow \underline{a(x)}$  estacionario VERDADERO

$$b) \text{ Campo de velocidad homogéneo } \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\therefore a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \neq 0$$

FALSO

$$c) \text{ Campo de velocidad estacionario } \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$$

$$\text{Medio incompresible } \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$a_i = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \neq 0$$

FALSO

2

$$\begin{aligned} 2) \quad N_1 &= -3x_2 + x_3 \\ N_2 &= 3x_1 - 5x_3 \\ N_3 &= -x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x_j} + \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \right)$$

$$V_{11} = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0 \quad V_{12} = \frac{1}{2} (0 - 3 + 3) = 0 = V_{21}$$

$$V_{22} = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0 \quad V_{13} = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0 = V_{31}$$

$$V_{33} = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0 \quad V_{23} = \frac{1}{2} (-5 + 5) = 0 = V_{32}$$

$\therefore \underline{V} = 0 \Rightarrow$  Mov cuerpo rígidu

(3)

$$3) \quad \begin{aligned} u &= C_1 xyz \\ v &= C_2 xyz \\ w &= C_3 xyz \end{aligned}$$

$$a) \quad \underline{x}_{E'} = (1.503, 1.001, 1.997)$$

$$\underline{x}_E = (1.5, 1, 2)$$

$$\underline{u}_{E'} = (0.003, 0.001, -0.003)$$

$$u = C_1 xyz \Rightarrow u_E = C_1 \times 1.5 \times 1 \times 2 = 0.003$$

$$C_1 = 0.001$$

$$v = C_2 xyz \Rightarrow v_E = C_2 \times 1.5 \times 1 \times 2 = 0.001$$

$$C_2 = 0.001/3$$

$$w = C_3 xyz \Rightarrow w_E = C_3 \times 1.5 \times 1 \times 2 = -0.003$$

$$C_3 = -0.001$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = C_1 yz \Rightarrow \epsilon_{11E} = 0.001 \times 1 \times 2 = 0.002$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = C_2 xz \Rightarrow \epsilon_{22E} = \frac{0.001 \times 1.5 \times 2}{3} = 0.001$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = C_3 xy \Rightarrow \epsilon_{33E} = -0.001 \times 1.5 \times 1 = -0.0015$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (C_1 xz + C_2 yz) = \epsilon_{21} \Rightarrow$$

$$\epsilon_{12E} = \epsilon_{21E} = \frac{1}{2} \left( 0.001 \times 1.5 \times 2 + \frac{0.001 \times 1 \times 2}{3} \right) =$$

$$0.001833 = \frac{11}{6000}$$

Q

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (C_2 x y + C_3 x z) = \epsilon_{32} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{32E} = \epsilon_{23E} &= \frac{1}{2} \left( \frac{0.001}{3} \times 1.5 \times 1 - 0.001 \times 1.5 \times 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (0.0005 - 0.003) = -0.00125 \end{aligned}$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (C_1 x y + C_3 y z) = \epsilon_{31} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{13E} = \epsilon_{31E} &= \frac{1}{2} (0.001 \times 1.5 \times 1 - 0.001 \times 1 \times 2) = \\ &= -0.00025 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.000833 & -0.00025 \\ 0.000833 & 0.001 & -0.00125 \\ -0.00025 & -0.00125 & -0.0015 \end{bmatrix}$$

$$b) \underline{\underline{n}}_{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{nE} = \underline{\underline{n}}_{ED} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{n}}_{ED} = 0.001$$

$$c) \epsilon_V = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = C_1 y z + C_2 x z + C_3 x y$$

$$\epsilon_v = \frac{\Delta(\Delta V)}{\Delta V}$$

(5)

$$\Delta V = \int_0^{1.5} \int_0^1 \int_0^2 \epsilon_v \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^{1.5} \int_0^1 \int_0^2 (C_1 yz + C_2 xz + C_3 xy) \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^{1.5} \int_0^1 \left( \frac{C_1 y z^2}{2} + \frac{C_2 x z^2}{2} + C_3 x y z \right) \Big|_0^2 \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^{1.5} \int_0^1 (2C_1 y + 2C_2 x + 2C_3 x y) \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^{1.5} \left( 2C_1 \frac{y^2}{2} + 2C_2 x y + C_3 x y^2 \right) \Big|_0^1 \, dx =$$

$$= \int_0^{1.5} (C_1 + 2C_2 x + C_3 x) \, dx =$$

$$= C_1 x + C_2 x^2 + C_3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1.5} =$$

$$= 1.5 C_1 + 2.25 C_2 + \frac{2.25}{2} C_3 =$$

$$= 1.5 \times 0.001 + \frac{2.25 \times 0.001}{3} - \frac{2.25}{2} \times 0.001 =$$

$$= 0.0015 + 0.00075 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 0.0015 - \frac{0.00075}{6} =$$

$$= \cancel{0.0015} + \cancel{0.00075} \times \frac{1}{6} = \cancel{0.0015} + \cancel{0.00075} \times \frac{1}{6} = 0.001125$$

6

$$\begin{aligned} 4) \quad \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{1jk} \sigma_{jk} \\ \varepsilon_{2jk} \sigma_{jk} \\ \varepsilon_{3jk} \sigma_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{123} \sigma_{23} + \varepsilon_{132} \sigma_{32} \\ \varepsilon_{231} \sigma_{31} + \varepsilon_{213} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{312} \sigma_{12} + \varepsilon_{321} \sigma_{21} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$