

## MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO EN UN MEDIO VISCOSO

**Christian Muñoz V., Marcela A. Cruchaga y Diego J. Celentano**

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Universidad de Santiago de Chile  
Av. Bdo. O'Higgins 3363, Santiago, Chile  
e-mail: christian.munoz@usach.cl, mcruchag@lauca.usach.cl, dcelenta@lauca.usach.cl

**Palabras claves:** interacción fluido-sólido rígido, seguimiento de interfaces, fluidos viscosos.

**Resumen.** *En este trabajo se propone el estudio del movimiento de un cuerpo rígido en un medio viscoso. Para la simulación se resolverán las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas a la descripción del frente material o interfaz (superficie del cuerpo). La solución numérica de estas ecuaciones se realiza en el marco del método de elementos finitos. Para la descripción de la evolución de la interfaz se aplica una técnica de seguimiento lagrangeano de superficies móviles. Se propone el estudio de diferentes modelos numéricos para la descripción del movimiento de un cilindro y una esfera desplazándose por su propio peso en un medio viscoso. Se evalúa el efecto en la velocidad terminal de caída de la distancia del cuerpo a las paredes y de su geometría. Los resultados numéricos obtenidos se compararán con valores analíticos reportados en la literatura y con experiencias físicas sencillas realizadas en el contexto de este estudio.*

## 1 INTRODUCCION

El movimiento de sólidos dentro de fluidos viscosos es uno de los problemas clásicos de la mecánica de fluidos. Actualmente es de interés para la descripción y análisis de, por ejemplo, fluidos particulados, lechos fluidizados o sedimentación. Las primeras aproximaciones analíticas obtenidas para el movimiento de una esfera aislada corresponden a Stokes (1851) y Ossen (1910) para el caso en el que las fuerzas viscosas son dominantes frente a las inerciales ( $Re \rightarrow 0$ )<sup>[1]</sup>. Dichas aproximaciones se usan para el cálculo indirecto de la viscosidad del fluido por medio de la velocidad terminal de caída medida experimentalmente. También existen variadas expresiones analíticas para diversas formas del sólido para el caso en el que preponderan las fuerzas viscosas<sup>[2]</sup>. Sin embargo, estas soluciones están acotadas a regímenes con números de Reynolds muy bajos (es decir,  $Re \approx 1$ ) quedando una gran variedad de casos en los cuales estas relaciones no se cumplen debido a que el coeficiente de arrastre deja de comportarse linealmente con respecto al número de Reynolds. Es por ese motivo que se necesitan obtener aproximaciones, ya sea por medio de valores experimentales o numéricos, de estos casos. En el marco de los resultados experimentales se pueden mencionar los trabajos de Mordant y Pinton<sup>[3]</sup>, en los que se detalla un método avanzado para las mediciones de las velocidades de caída de esferas, y el de Fujita et al.<sup>[4]</sup> en el que se describe una nueva forma para calcular la viscosidad de un fluido basada, al igual que el anterior, en mediciones minuciosas de la velocidad de las esferas. Los trabajos de Chhabra et al.<sup>[5]</sup> y Ataíde<sup>[6]</sup> se destacan por sus contribuciones en la evaluación de los efectos que tienen las paredes en la velocidad límite de caída. De las distintas formulaciones teóricas correlacionadas con ensayos experimentales pueden destacarse las de Munroe (1888), Faxen (1921), Francis (1933), DiFelice (1996) y Ataíde et al. (1999)<sup>[1-6]</sup>. Por otro lado, en el marco de las modelaciones numéricas, actualmente existen variadas formulaciones para simular las interacciones de sólidos con fluidos, en las cuales se combinan las ecuaciones de Navier-Stokes para la simulación del campo de fluido acopladas con las de cuerpo rígido para el movimiento del sólido. Las diferencias de las distintas formulaciones radican en la forma de representar la frontera del sólido. Los trabajos de Hu et al.<sup>[7]</sup>, y Johnson y Tezduyar<sup>[8]</sup>, utilizan la técnica denominada “Arbitrary Lagrangian-Eulerian” (ALE), la que se basa en resolver el problema de la mecánica de los fluidos en donde un único material ocupa el dominio variable, mientras que la interfaz es representada por el contorno del dominio quedando su movimiento determinado por la deformación de la malla. Un segundo grupo representa al sólido por fracciones de volúmenes, entre estos trabajos se destacan los de Pan et al.<sup>[9]</sup>, Sharma y Patankar<sup>[10]</sup> y Peskin y Gary<sup>[11]</sup>. En los dos primeros se utiliza la técnica denominada “Distributed Lagrange-multiplier/fictitious-domain Method” (DLM). Este método fue implementado tanto en volúmenes finitos (MVF) como en elementos finitos (MEF).

Dentro de las formulaciones numéricas para la descripción de superficies entre dos fluidos que no se mezclan se pueden diferenciar dos técnicas básicas de malla fija para la representación de la interfaz: una euleriana y otra lagrangeana. Ejemplos de dichas técnicas son la representación nodal mejorada presentada en [12] y la descripción lagrangeana del frente denominada “Moving Lagrangean Interface Technique” (MLIT)<sup>[13]</sup> donde la interfaz

se describe mediante puntos que sirven de marcadores. Dichas técnicas fueron comparadas en [14] y [15] en la resolución de problemas de interacciones fluido-sólido en geometrías planas aisladas a bajo número de Reynolds.

En este trabajo se propone evaluar el comportamiento de la técnica numérica identificada como MLIT para la descripción del movimiento de cuerpos rígidos en medios viscosos. Para tal fin se estudia el problema del desplazamiento por gravedad de un cuerpo rígido en un medio viscoso. Para verificar numéricamente los resultados simulados con MLIT se presenta primeramente la solución numérica obtenida para el campo de velocidades y presiones en una geometría cilíndrica mediante tres modelos numéricos equivalentes. Posteriormente se estudia el desplazamiento de una esfera considerando el efecto de la distancia a las paredes sobre la velocidad terminal de la misma. Estos resultados se comparan con correlaciones teóricas reportadas en la literatura y con ensayos experimentales propios.

## **2 MODELO MATEMÁTICO Y SOLUCIÓN COMPUTACIONAL**

Se considera que la física del problema a tratar puede ser descrita a través de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible considerando un fluido Newtoniano. El sistema de ecuaciones a resolver está constituido por la ecuación de cantidad de movimiento y de continuidad. Estas ecuaciones se definen en todo el dominio de análisis. El problema requiere de la definición apropiada de las condiciones iniciales y de contorno que lo caracterizan y, además, de la descripción acoplada de la superficie interfaz. La forma discreta de las ecuaciones diferenciales se obtienen en el marco del método de elementos finitos utilizando una técnica de ponderación generalizada a contracorriente (GSO) <sup>[16]</sup>. Para la determinación de la posición de la interfaz se utiliza el esquema lagrangeano MLIT<sup>[13]</sup>. El método empleado representa la interfaz entre dos medios que no se mezclan mediante una serie vinculada de puntos que actúan como marcadores de la posición del frente. Además, para mejorar la precisión de los resultados se utiliza un algoritmo corrector de conservación de la masa y una integración por subdominios en los elementos donde se aloja la interfaz.

## **3 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA: SIMULACIÓN, VERIFICACIÓN Y VALIDACIÓN**

Con el objetivo analizar el comportamiento que tiene una esfera que cae por su propio peso en un medio viscoso como lo muestra la Fig. 1 se estudian diferentes situaciones físicas. Se presenta primero el análisis de diferentes modelos numéricos para cuantificar el campo de velocidades y presiones alrededor de un cilindro que cae en un medio viscoso con la finalidad de verificar numéricamente los resultados. Posteriormente se evalúa el efecto de la distancia del cuerpo a las paredes en la velocidad terminal de caída de una esfera comparando los resultados numéricos obtenidos con los correspondientes al cilindro <sup>[14]</sup> y con correlaciones teóricas reportadas en la literatura <sup>[1,5,6]</sup>. Finalmente se validan los resultados con ensayos

experimentales propios.

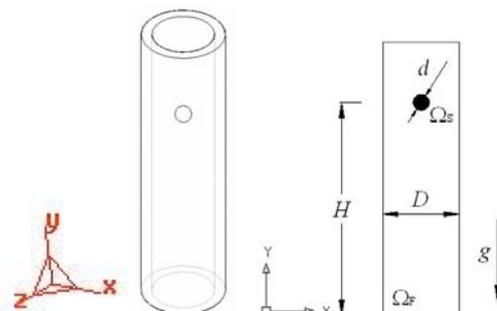


Figura 1: Descripción física.

### 3.1 Descripción del movimiento de un cilindro en un medio viscoso: comparación del campo de velocidades y presiones inducido utilizando diferentes modelos numéricos

Este análisis corresponde al caso de caída libre de un cilindro en un medio viscoso donde se desconoce la velocidad de caída del cuerpo en un dominio infinito, es decir, sin efecto de pared. Este análisis se identifica como Modelo A (Fig. 2a). Las propiedades adoptadas para el fluido corresponden a glicerina siendo la densidad de  $1200 \text{ kg/m}^3$  y la viscosidad dinámica de  $8 \text{ kg/m s}$ . Para el sólido se adopta una densidad de  $7800 \text{ kg/m}^3$  (acero) y una viscosidad infinita. La gravedad es  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  actuando en sentido contrario al eje Y. El cilindro se deja caer desde una altura  $H=1.62 \text{ m}$  (Fig. 1) siendo la longitud total del dominio representado de  $1.8 \text{ m}$  en el eje Y. El diámetro del cilindro es  $d = 0.05 \text{ m}$ . La velocidad límite de caída que se obtiene en el análisis (utilizando la técnica MLIT) es de  $1.02 \text{ m/s}$  y el valor teórico derivado del equilibrio de fuerzas de masa, flotación y fricción (o viscosas) es  $1.07 \text{ m/s}$  (con un coeficiente de arraste  $C_d$  calculado a partir de un modelo de flujo alrededor de un cilindro de malla fina). Una vez conocida la velocidad terminal, y con la finalidad de verificar el campo de velocidades y presiones inducido por el movimiento del cuerpo, se propone el análisis del flujo alrededor de un cilindro estático con una velocidad de aproximación del mismo valor que la velocidad terminal calculada anteriormente pero de sentido contrario. Este problema se analiza mediante dos modelos, uno con presencia de dos medios donde el cilindro es identificado por una superficie interfaz fija (Modelo B, ver Fig. 2b) y otro (Modelo C) donde sólo se considera el fluido y el contorno del cilindro pasa a ser contorno del dominio de análisis, es decir, corresponde al problema tradicional del flujo alrededor de un cilindro (Fig. 2c).

En la Fig. 3a se grafican las velocidades (relativas a la velocidad límite de caída) obtenidas utilizando los tres modelos. Se observan muy buenas correspondencias entre los tres tipos de análisis. En la Fig. 3b se presentan, para los tres modelos, la distribución de presiones (absolutas) en la superficie del cilindro. Estos resultados muestran una buena concordancia en la respuesta de los tres modelos a pesar de ser la presión la variable más sensible en el análisis.

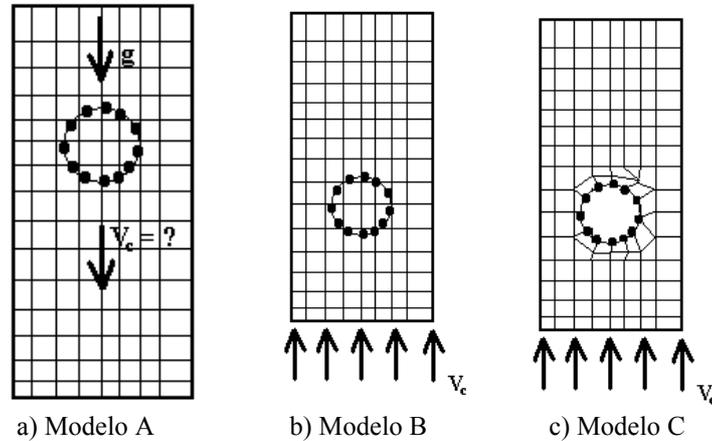


Figura 2: Cilindro cayendo en un medio viscoso, modelos comparativos: a) caída libre, b) flujo alrededor de un cilindro considerando dos medios y c) flujo alrededor de un cilindro.

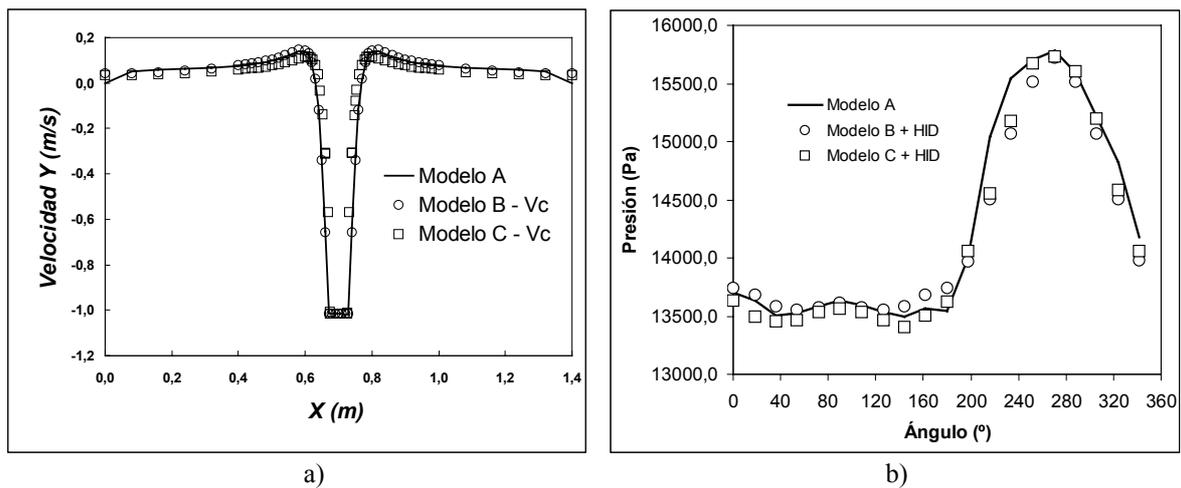


Figura 3: Cilindro cayendo en un medio viscoso, modelos comparativos: a) Componente Y de la velocidad a lo largo de un eje diametral paralelo al eje X y b) distribución de las presiones en la superficie del cilindro para los tres modelos analizados (ángulo  $0^\circ$  coincidente con eje diametral en sentido X positivo).

### 3.2 Análisis del efecto de la distancia a las paredes del contenedor en la velocidad terminal de caída para una esfera: validación con correlaciones teórico-empíricas

Se analiza la evolución temporal de la velocidad de caída de una esfera de diámetro  $d = 0.05 \text{ m}$ . considerando diferentes condiciones de confinamiento (distancia a la pared) y condiciones de contorno (deslizante y no deslizante). Las demás propiedades físicas y geométricas se corresponden a las reportadas en el ejemplo anterior. Dado que el problema presenta geometría de revolución, se adopta para su análisis un modelo axisimétrico. La

condición inicial corresponde a una situación de reposo donde la esfera se ubica a una altura  $H = 1.62 \text{ m}$  en el eje de simetría. Se estudian 5 relaciones de aspecto ( $\beta = d/D$ , siendo  $d$  es el diámetro de la esfera y  $D$  el diámetro del cilindro, como se indica en Fig. 1):  $\beta = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\beta = 0.067$  y  $\beta = 0.05$ . Para cada análisis se utilizan mallas de: 900, 1800, 3258, 3982 y 4163 elementos, respectivamente.

La Fig. 4 muestra la evolución en el tiempo de la velocidad de caída de la esfera. El valor máximo alcanzado o velocidad terminal de caída disminuye para valores crecientes de  $\beta$ . La Fig. 4 permite determinar la relación de aspecto límite a partir de la cual la velocidad terminal de caída es invariante con la relación de aspecto y de las condiciones de contorno adoptadas. Se aprecia que a partir de una relación  $\beta = 0.1$  se tienen velocidades similares de aproximadamente  $0.54 \text{ m/s}$  que corresponde a un valor de número de Reynolds de 4 (basado en las propiedades de la glicerina). En la Fig. 5 se presenta la velocidad de caída límite para cada relación de aspecto ( $D/d$ ) calculada con diferentes condiciones de contorno. Se puede observar que a partir de la relación de aspecto 10 (es decir,  $\beta = 0.1$ ) las velocidades de caída límite alcanzadas no están influenciadas por la condición de contorno utilizada en el modelo.

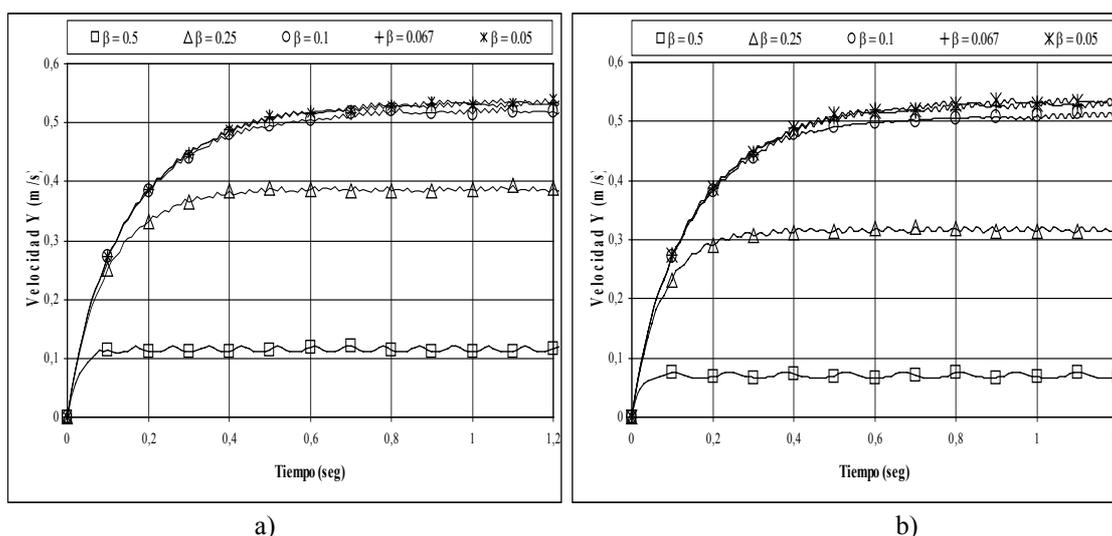


Figura 4: Evolución temporal de las velocidades de una esfera para diferentes relaciones de aspecto  $\beta$ : a) pared deslizante y b) pared no deslizante.

En la Fig. 6 se presenta la comparación de los resultados obtenidos para la velocidad límite de caída en función de  $D/d$  para los casos de una esfera y un cilindro (para este último caso, el análisis es bidimensional en el plano de caída). Se observa que los valores de velocidad alcanzados por la esfera para relaciones de aspecto altas son un 50% menores que los correspondientes al cilindro.

Para cuantificar el efecto de la distancia de la pared a la esfera sobre la velocidad terminal se define un factor de corrección que tiene la siguiente forma  $f = \frac{V}{U}$  donde  $V$  es la velocidad máxima alcanzada para una determinada relación de aspecto y  $U$  es la velocidad que alcanza

el mismo cuerpo cuando el dominio es infinito (efecto de pared despreciable).

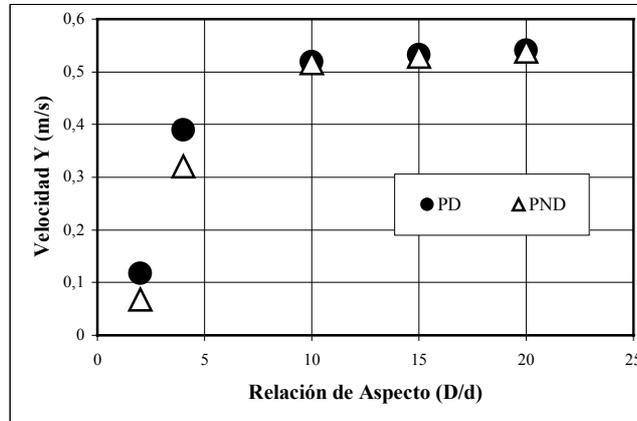


Figura 5. Evolución de la velocidad límite de caída de una esfera en función de la relación de aspecto  $D/d$  para los dos tipos de condición de contorno en la pared.

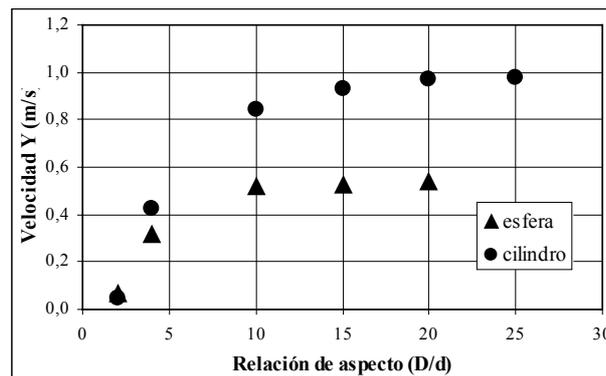


Figura 6: Comparación entre la velocidad terminal de caída para el cilindro y la esfera en función de la relación de aspecto  $D/d$  para paredes no deslizantes.

En la literatura se han propuesto diversas relaciones entre  $f$  y  $\beta$  <sup>[1,5,6]</sup>. En este estudio se utilizan las aproximaciones de:

Munroe (1888): 
$$f = 1 - \beta^{1.5} \tag{1}$$

Faxen (1921): 
$$f = (1 + 2.104\beta)^{-1} \tag{2}$$

Francis (1933): 
$$f = \left( \frac{1 - \beta}{1 - 0.475\beta} \right)^4 \tag{3}$$

y Ataíde et al. (1999):

$$f = \frac{1.092}{1 + 0.1e^{8.541\beta} Re^{-0.042 - 0.939\beta}} \quad (4)$$

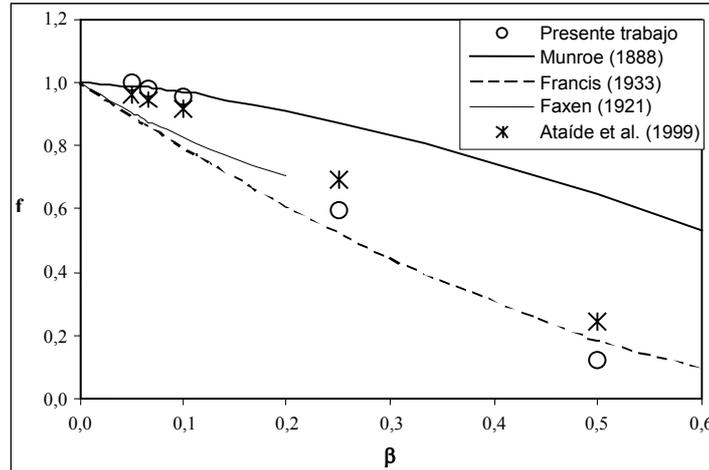


Figura 7: Comparación entre las curvas teóricas con los valores numéricos del factor de corrección obtenidos en el presente estudio.

En la Fig. 7 se grafican las mencionadas correlaciones y los valores obtenidos en el presente análisis. Se consideró como velocidad terminal de una esfera en un dominio infinito la obtenida de la simulación con la relación de aspecto 0.05, es decir,  $0.54 \text{ m/s}$ . Las relaciones de Faxen y Francis representan estados de fluidos a bajos  $Re$ , mientras que la de Munroe ajusta mejor a altos  $Re$ . Ataíde et al. muestra buena aproximación en los estados intermedios con un error de exactitud del 4% aproximadamente [6]. Esto justifica que los resultados numéricos (que corresponden a  $Re = 4$ ) estén cercanos a dicha correlación. Además se puede apreciar que el presente análisis se comporta de buena manera para valores de  $\beta < 0.1$ , mientras que surgen algunas discrepancias para valores mayores. Esto puede deberse a la discretización utilizada ya que a través de un análisis de sensibilidad de los resultados con respecto al tamaño de malla para la relación de aspecto 0.5, se obtuvo una variación inversamente proporcional al espaciamiento entre nodos. Por lo tanto, disminuyendo el tamaño de malla se reduce la discrepancia observada con la correlación de Ataíde et al. para  $\beta > 0.1$  (estos resultados no se presentan).

### 3.3 Validación experimental

En este último apartado se presenta la validación experimental realizada. Se llevaron a cabo una serie de experiencias simples basadas en el experimento del cálculo de la viscosidad según la ley de Stokes, es decir, se dejó caer una esfera dentro de un recipiente con un fluido, cuya viscosidad es la que se quiere conocer por medio de la velocidad de caída.

Se utilizó una probeta graduada de un litro, dos fotoceldas de velocidad y tres esferas de distintos diámetros. El montaje se aprecia en la Fig. 8. La distancia entre las fotoceldas es de  $16.77\text{ cm}$ , el diámetro interno de la probeta es  $6.16\text{ cm}$  y se usaron esferas de  $4.8\text{ mm}$ ,  $6.5\text{ mm}$  y  $7.95\text{ mm}$ , cuyos pesos fueron  $0.4\text{ gr}$ ,  $1\text{ gr}$  y  $2\text{ gr}$  respectivamente.



Figura 8. Montaje experimental

La densidad del fluido se estimó en  $1240\text{ kg/m}^3$ . Además de las mediciones de tiempo realizadas por la señal detectada por las fotoceldas, se registraron videos de las experiencias que, a través del análisis de sus fotogramas, permitieron obtener los resultados de la evolución temporal de la posición de las esferas reportadas en la Fig. 9 junto a algunos resultados numéricos del modelo axisimétrico utilizado. Los resultados promedio de las velocidades límite obtenidos de las experiencias fueron (en  $m/s$ ):  $(0.11\pm 0.01)$ ,  $(0.18\pm 0.01)$  y  $(0.25\pm 0.01)$  respectivamente para los tres diámetros de esferas utilizadas. Sin embargo, una gran dispersión se obtiene en la determinación de la viscosidad del fluido, parámetro al cual son muy sensibles las simulaciones.

#### *Cálculo de la viscosidad*

Los valores del coeficiente  $\beta$  para las esferas en estudio son  $0.078$ ,  $0.105$  y  $0.129$  para los diámetros  $4.8$ ,  $6.5$  Y  $7.95\text{ mm}$  respectivamente. Adoptando una correlación de las definidas por las ecuaciones (1), (2) y (3) y la velocidad experimental observada, se obtiene el valor de la velocidad terminal de caída en un fluido sin fronteras. Luego, por medio de la expresión

teórica basada en el equilibrio de fuerzas  $Cd = \frac{4}{3} \left( \frac{\rho_S}{\rho_L} - 1 \right) \frac{gd}{v_t^2}$ , se calcula el coeficiente de

arrastre asociado y, de esta manera, adoptando la relación empírica<sup>[1]</sup>  $Cd = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4$ ,

se obtienen los valores de  $Re$  y, de la definición de éste, se deriva la viscosidad asociada. La Tabla 1 muestra un cuadro resumen de los cálculos para la viscosidad según las correlaciones de Munroe, Francis y Faxen, en la que se aprecia la dispersión que tiene su valor. La viscosidad del líquido es una variable muy sensible, ya sea a la correlación tomada para el

cálculo de la velocidad como a las mediciones experimentales de la velocidad. De acuerdo a lo observado en la Fig. 7 los valores de velocidad tienen un mejor ajuste con la correlación de Monroe para paredes alejadas del cuerpo. Por otro lado, la hipótesis de número de Reynolds bajos establecida para las correlaciones de Francis y Faxen no se satisfacen rigurosamente de acuerdo a los valores de  $Re$  reportados en la Tabla 1. Por estas razones se supone que los valores de viscosidad computados con la aproximación de Monroe son más adecuados. Sin embargo, existe igualmente una dispersión entre los valores calculados en base a los diferentes diámetros de esfera. Para el análisis numérico se supone entonces un rango de viscosidades admisibles.

Tabla 1. Cálculo de la viscosidad.

$D$ (mm)	$f$	$U$ (m/s)	$Cd$	$Re$	$\mu$ (kg/ms)
<b>Monroe</b>					
4.8	0.978	0.112	22.67	1.24	0.542
6.5	0.966	0.186	11.27	2.78	0.539
7.95	0.954	0.262	7.76	4.43	0.584
<b>Francis</b>					
4.8	0.841	0.131	16.74	1.74	0.446
6.5	0.786	0.229	7.47	4.64	0.397
7.95	0.741	0.337	4.68	8.69	0.383
<b>Faxen</b>					
4.8	0.859	0.128	17.49	1.66	0.459
6.5	0.818	0.220	8.09	4.19	0.423
7.95	0.786	0.318	5.27	7.36	0.425

En la Fig. 9 se grafican los valores experimentales de la posición en función del tiempo y rectas cuyas tangentes identifican los diferentes valores de velocidad terminal obtenidos en el cálculo para tres viscosidades: 0.6, 0.46 y 0.3  $kg/ms$ . La Fig. 9 muestra la sensibilidad de los resultados con respecto a la viscosidad. La curva con tangente igual a la velocidad terminal obtenida con una viscosidad de 0.46  $kg/ms$  ajusta globalmente mejor los diferentes resultados, en particular en el rango de distancias entre las cuales el movimiento registrado en la experiencia puede suponerse independiente de las condiciones de la superficie libre y del fondo del recipiente (es decir entre 0.15 y 0.3  $m$  aproximadamente).

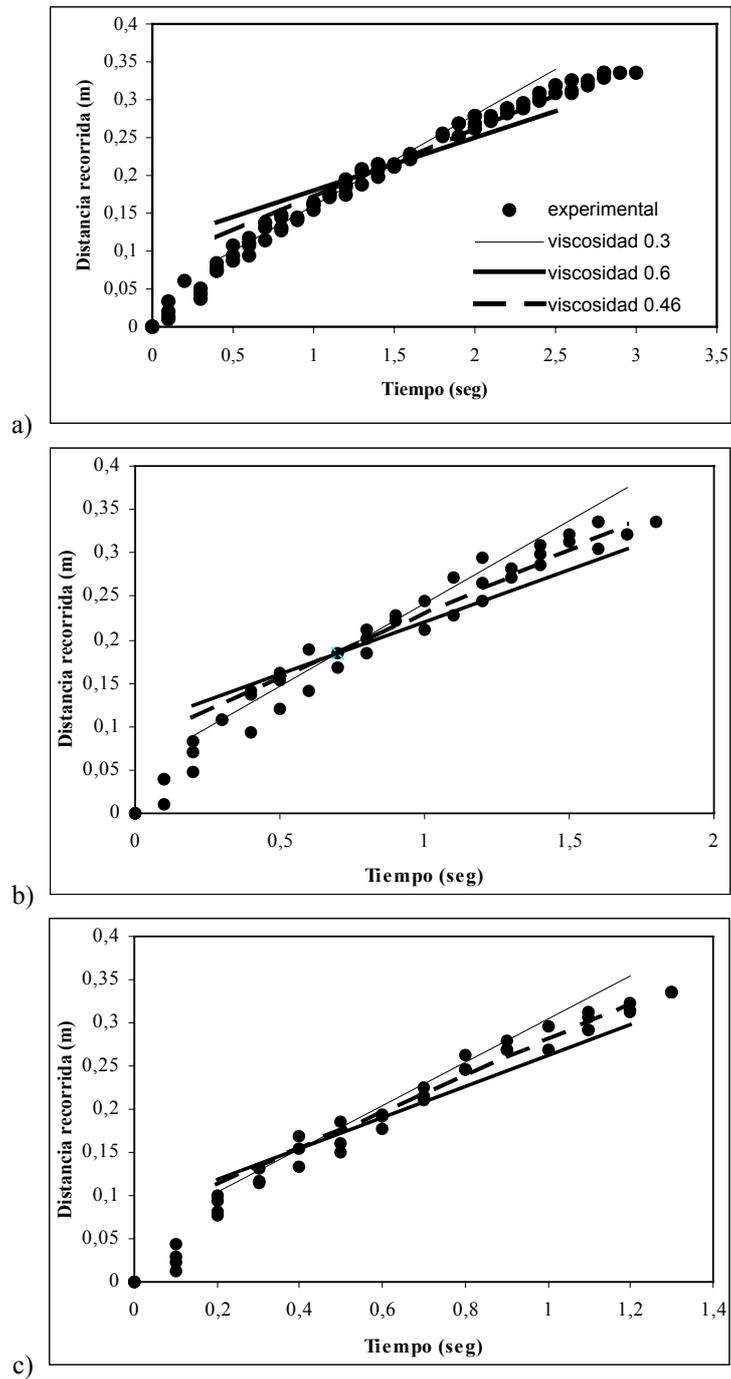


Figura 9. Resultados experimentales y numéricos para esferas de: a) 4.8 mm, b) 6.5 mm y c) 7.95 mm de diámetro.

## 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado los resultados obtenidos para la descripción del movimiento de cuerpos rígidos de geometría simple (cilindro y esfera) inmersos en un líquido viscoso. Los resultados de los diferentes modelos bidimensionales planos para el cilindro muestran buena correspondencia en los perfiles de velocidad y presión obtenidos. La velocidad límite predicha por el modelo es similar al valor teórico esperado. Se evaluó, además, la influencia de la distancia a las paredes del contenedor en la caída de una esfera. Se determinó la relación de aspecto en la que el efecto de las mismas es despreciable corroborando, mediante la comparación con los resultados para un cilindro, que la axisimetría de la esfera presenta mayores fuerzas de corte, lo que provoca que las velocidades de caída, para iguales relaciones de aspecto, disminuyan casi al cincuenta por ciento de las alcanzadas por el cilindro. Los resultados del factor de corrección de velocidad terminal para la esfera se validaron satisfactoriamente con correlaciones reportadas en la literatura. Por otro lado, se realizaron experiencias simples para poder analizar el comportamiento de una esfera de acero en un medio viscoso en las que se observó una fuerte discrepancia en la medición de las propiedades del flujo y cierta indeterminación propia en las mediciones de velocidad. Se observa que los resultados numéricos muestran sensibilidad con respecto a la viscosidad. Sin embargo, se aprecia una razonable concordancia entre los valores experimentales a velocidad límite alcanzada con los distintos diámetros ensayados y los resultados numéricos correspondientes.

### Agradecimientos

Los autores agradecen a Fondecyt Proyecto 1020029 en cuyo marco se realiza este trabajo.

## 5 REFERENCIAS

- [1] F. M. White, *Viscous fluid flow*, McGraw Hill, (1974).
- [2] V. N. Constantinescu, *Laminar viscous flow*, Mechanical Engineering Series, Springer, (1995).
- [3] N. Mordant, J. F. Pinton, “Velocity measurement of a settling sphere”, *European Physical Journal B.*, **18**, 343-352 (2000).
- [4] Y. Fujita, N. Kuramoto, Y. Kurano, K. Fujii, “A new project at NMIJ for an absolute measurement of the viscosity by the falling ball method”, *14<sup>th</sup> Int. Conference on the Properties of Water and Steam*, 112-115 (2004).
- [5] R. P. Chhabra, S. Agarwal, K. Chaudhary, “A note on wall effect on the terminal falling velocity of a sphere in quiescent Newtonian media in cylindrical tubes”, *Power Technology*, **129**, 53-58 (2003).
- [6] C. H. Ataíde, F. A. R. Pereira, M. A. S. Barrozo, “Wall effect on the terminal velocity of spherical in Newtonian and non-Newtonian fluids”, *Brazilian Journal of Chemical*

- Engineering*, **16**, (1999).
- [7] H. H. Hu, D. D. Joseph, M. J. Crochet, “Direct numerical simulation of fluid particle motion”, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **3**, 285-306 (1992).
- [8] A. A. Johnson, T. E. Tezduyar, “Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube”, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **134**, 351-373 (1996).
- [9] T. W. Pan, D. D. Joseph, R. Bai, R. Glowinski, V. Sarin, “Fluidization of 1204 spheres: simulation and experiment”, *J. Fluid Mech*, **451**, 169-191 (2002).
- [10] N. Sharma, N. A. Patankar, “A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows”, *J. Computational Physics*, **205**, 439-457 (2005).
- [11] A. P. Peskin, G. R. Hardin, “Moving particles through a finite element mesh”, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, **103**, 77-91 (1998).
- [12] M. Cruchaga, D. Celentano, T. Tezduyar, “Moving-interface computations with the edge-tracked interface locator technique (ETILT)”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **47**, 451-469 (2005).
- [13] M. Cruchaga, D. Celentano, T. Tezduyar, “A moving Lagrangian interface technique for flow computations over fixed meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 525-543 (2001).
- [14] C. Muñoz, M. Cruchaga, “Efecto de la distancia a las paredes en el movimiento bidimensional de un sólido cayendo por su propio peso en un medio viscoso”, *Cuadernos de Mecánica Computacional*, **2**, 55-65 (2004).
- [15] M. Cruchaga, C. Muñoz, D. Celentano, “Thermally coupled flows induced by the motion of immersed rigid bodies”, *Int. Conf. on Comp. Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, (2005).
- [16] M. Cruchaga, E. Oñate, “A generalized streamline finite element approach for the analysis of incompressible flow problems including moving surfaces”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **173**, 241-255 (1999).