

UN NUEVO MODELO DE PLASTICIDAD PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO NO LINEAL

Roberto Aguiar Falconí

Centro de Investigaciones Científicas CEINCI
Escuela Politécnica del Ejército. Quito-Ecuador
Email: raguiar@espe.edu.ec

Palabras claves : Pushover, DRAIN-2DX, IDARC, SARCF, CEINCI3.

Resumen. *Se presenta el desarrollo numérico de un nuevo modelo de plasticidad extendida, para encontrar la curva de capacidad sísmica resistente de una estructura de hormigón armado, mediante análisis estático no lineal, en forma incremental (pushover). En el modelo, se determina las zonas de daño en los extremos del elemento en función del diagrama de momentos, ante cargas laterales y en esta zona se consideran cuatro escalones de variación de la rigidez a flexión. Para verificar la bondad del modelo propuesto, se comparan las curvas de capacidad sísmica resistente en edificaciones de 3, 5 y 10 pisos, utilizando los modelos de plasticidad de los programas DRAIN-2DX, IDARC (Inelastic damage analysis of reinforced concrete) y SARCF (Seismic analysis of reinforced concrete frames). Estos últimos modelos han sido incorporados al programa CEINCI3. Las curvas de capacidad sísmica resistente, relaciona el cortante basal con el desplazamiento lateral máximo de la edificación. En la comparación que se realiza se considera y no se considera el efecto $P - \Delta$. Por otra parte, se realiza el estudio estadístico de los diferentes modelos utilizados, con relación al modelo de plasticidad que se propone, en los siguientes parámetros: resistencia última asociada a un desplazamiento lateral del 5% de la altura total del edificio, resistencia de fluencia, desplazamiento de fluencia y relación entre la rigidez post fluencia con respecto a la rigidez elástica; para el efecto se construyen modelos bilineales de la curva de capacidad sísmica, empleando el criterio de iguales áreas bajo la curva.*

1 INTRODUCCIÓN

Ante acciones sísmicas son los extremos de los elementos los que van a estar sujetos a grandes esfuerzos en consecuencia el daño se inicia en estos puntos y se va propagando hacia el centro de luz. Existen varios modelos de plasticidad que han sido propuestos para simular este comportamiento, varios de ellos se indican en la figura 1, los mismos que se describen a continuación, previamente se destaca que $(EI)_a$, $(EI)_o$, $(EI)_b$, son las rigidez a flexión en el nudo inicial, centro de luz y nudo final respectivamente los mismos que se determinan del diagrama momento-curvatura $M - C$.

Cuando el elemento se encuentra en el rango elástico la rigidez a flexión del nudo inicial, centro de luz y nudo final es igual cuando se trata de elementos de sección constante, pero una vez que una sección ingresa al rango no lineal esta rigidez (EI) disminuye.

En el modelo (1) indicado en la figura 1, se considera que la variación de rigidez entre los extremos del elemento y el centro de luz es lineal. Este modelo fue utilizado en la Versión 1.0 del programa IDARC⁽¹⁾. Este modelo considera que todo el elemento ingresa al rango no lineal, lo cual no es cierto cuando se tiene una acción sísmica de moderada intensidad que ha ocasionado que únicamente los extremos sufran daño.

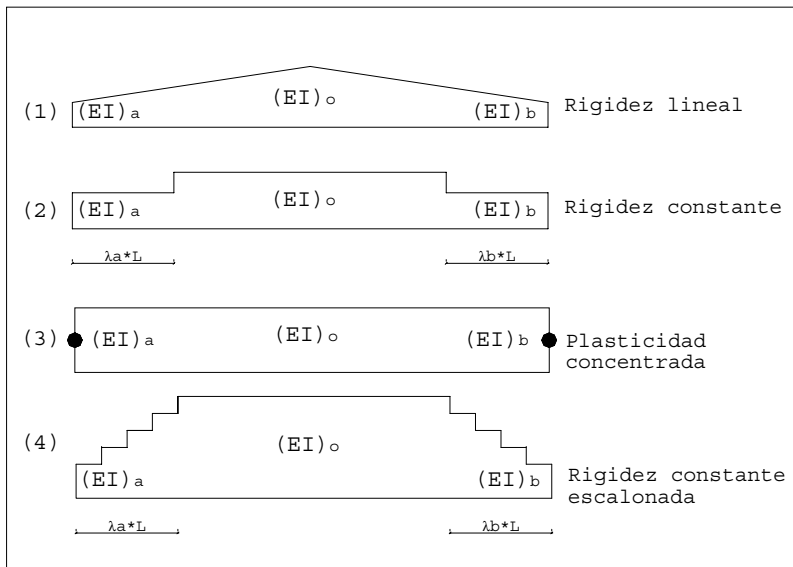


Figura 1: Modelos de plasticidad extendida.

El modelo (2) define una longitud de daño en el nudo inicial y nudo final de magnitud $\lambda_a L$ y $\lambda_b L$, respectivamente. En cada una de estas zonas de daño la rigidez a flexión se considera constante. Esta es una mejor aproximación en relación al modelo (1) pero no es real que el daño sea uniforme en toda la longitud de daño. Este modelo fue utilizado por el programa SARCF⁽²⁾.

En el modelo (3), el daño se concentra en un solo punto, en los extremos del elemento. No contempla longitud de daño, es un modelo extremadamente sencillo que se lo utiliza más con fines didácticos⁽³⁾.

El modelo (4), es el nuevo modelo de plasticidad que se propone en este artículo. En la longitud daño $\lambda_a L$ del nudo inicial se consideran cuatro niveles de rigidez a flexión y no uno solo como en el modelo (2). Lo propio se considera para el nudo final como se aprecia en la figura 1. La longitud de cada nivel de inercia en el nudo inicial es igual a $\lambda_a L/4$, y la magnitud se considera proporcional a las rigideces comprendidas entre $(EI)_a$ y $(EI)_o$. Iguales consideraciones se realizan para el nudo final.

2 DIAGRAMA DE MASAS ELASTICAS

Dado un elemento con cualquier variación de inercia a flexión, como el presentado en la figura 2, en el cual se han definido un par de ejes verticales denominados Y y Y' , en el nudo inicial y final respectivamente⁽⁴⁾. Adicionalmente se consideran dos coordenadas para definir la posición de un punto del elemento que son X y Z , cumpliéndose que $X + Z = L$.

En la parte superior de la figura 2, se presenta la forma general de variación de rigidez a flexión $(EI)_x$, y en la parte inferior el diagrama de masas elásticas que resulta al unir los puntos cuyo valor es $\frac{1}{(EI)_x}$.

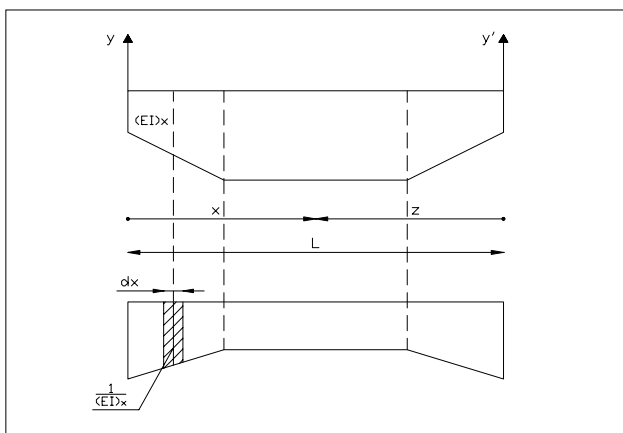


Figura 2: Diagrama de Masas Elásticas

Al considerar el elemento diferencial dx , se nota que el diferencial de área vale $\frac{dx}{(EI)_x}$.

En consecuencia el área total del diagrama de masas elásticas W , vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$W = \int_0^L \frac{dx}{(EI)_x} \quad (1)$$

Por otra parte, el momento de inercia del diagrama de masas elásticas con respecto al eje Y , denominado I_Y , y con respecto al eje Y' , llamado $I_{Y'}$, valen:

$$I_Y = \int_0^L X^2 \frac{dx}{(EI)_x} \quad (2)$$

$$I_{Y'} = \int_0^L Z^2 \frac{dx}{(EI)_x} \quad (3)$$

Finalmente, el momento de inercia compuesto del diagrama de masas elásticas respecto a los ejes Y y Y' , denominado $I_{YY'}$, es:

$$I_{YY'} = \int_0^L XZ \frac{dx}{(EI)_x} \quad (4)$$

En base a las ecuaciones indicadas se determinan los elementos de la matriz de flexibilidad.

3 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

La forma de la matriz de flexibilidad para el sistema de coordenadas indicado en la figura 3, es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

donde los elementos de la primera columna de f , son los giros en el nudo inicial y final que resultan al aplicar un momento unitario en el nudo inicial, lo propio es para los elementos de la segunda columna pero esta vez el momento unitario se aplica en el nudo final.

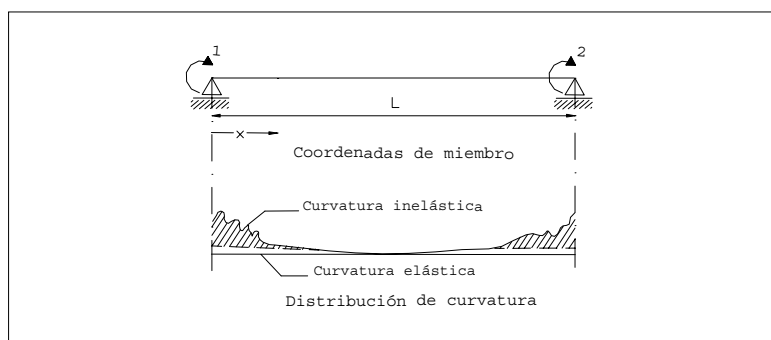


Figura 3: Sistema base de coordenadas de un elemento y distribución de curvatura.

En forma general las deformaciones f_{ij} se obtienen para el caso de marcos planos con la ecuación siguiente:

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{(EI)_x} dx + \int_0^L \frac{\beta V_i V_j}{(GA)_x} dx + \int_0^L \frac{N_i N_j}{(EA)_x} dx \quad (5)$$

donde M_i , M_j son los momentos a flexión; V_i , V_j son los cortantes; N_i , N_j las cargas axiales; (EI) la rigidez a flexión; (GA) la rigidez al corte, (EA) la rigidez axial y β el coeficiente de forma que caracteriza la distribución de las tensiones tangenciales.

3.1 Cálculo de f_{11}

Al aplicar un momento unitario en el nudo inicial de la figura 2, las ecuaciones de momento, corte y carga axial, son las siguientes:

$$M_1 = \frac{L-X}{L} \quad V_1 = \frac{1}{L} \quad N_1 = 0$$

Al reemplazar estas ecuaciones en la ecuación (5) se tiene:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{(EI)_x} dx + \int_0^L \frac{\beta V_1^2}{(GA)_x} dx$$

$$f_{11} = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{(EI)_x} + \int_0^L \beta \frac{1}{L^2} \frac{dx}{(GA)_x}$$

Al despreciar el efecto de corte, es decir no se considera la segunda integral y al reemplazar $X = L - Z$, se encuentra.

$$f_{11} = \int_0^L \frac{Z^2}{L^2} \frac{dx}{(EI)_x} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{Z^2}{(EI)_x} dx$$

Al sustituir la ecuación (3) en esta última ecuación se obtiene la ecuación con la cual se calculará f_{11}

$$f_{11} = \frac{I_y'}{L^2} \quad (6)$$

3.1 Cálculo de f_{22}

Al aplicar el momento unitario en el nudo final, las ecuaciones de momento, corte y carga axial, resultan.

$$M_2 = \frac{X}{L} \quad V_2 = \frac{1}{L} \quad N_2 = 0$$

Al reemplazar en ecuación (5) se encuentra:

$$f_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{(EI)_x} dx + \int_0^L \frac{\beta V_2^2}{(GA)_x} dx$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{X^2}{L^2} \frac{dx}{(EI)_x} + \int_0^L \frac{1}{L^2} \frac{\beta}{(GA)_x} dx$$

Nuevamente al despreciar el segundo término y al sustituir la ecuación (2) se halla

$$f_{22} = \frac{I_y}{L^2} \quad (7)$$

3.3 Cálculo de $f_{12} = f_{21}$

Al considerar únicamente el efecto de flexión en la ecuación (5) se tiene:

$$f_{12} = \int_0^L \frac{M_1 M_2}{(EI)_x} dx = \int_0^L \frac{X(X-L)}{L^2} \frac{dx}{(EI)_x}$$

Pero $X - L = Z$. Luego, f_{12} se calcula en función del momento de inercia compuesto, de la siguiente manera.

$$f_{12} = \int_0^L \frac{XZ}{L^2} \frac{dx}{(EI)_x} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{XZ}{(EI)_x} dx$$

$$f_{12} = \frac{I_{YY'}}{L^2} \tag{8}$$

3.4 Relación Importante

Al reemplazar las ecuaciones (2) a (4) en (6) a (8) y teniendo en cuenta que $X + Z = L$, se demuestra que:

$$W = f_{11} + f_{22} + 2f_{12} \tag{9}$$

Es más fácil calcular el término f_{12} con la ecuación (9) en lugar de utilizar la ecuación (8).

4 ALGORITMO DE CÁLCULO

Los términos de la matriz de flexibilidad para el elemento de plasticidad que se propone se obtienen a partir del cálculo de I_y , I_y' y W . En la figura 4, se indica el diagrama de masas elásticas del modelo (4) en el cual se ha utilizado la siguiente nomenclatura.

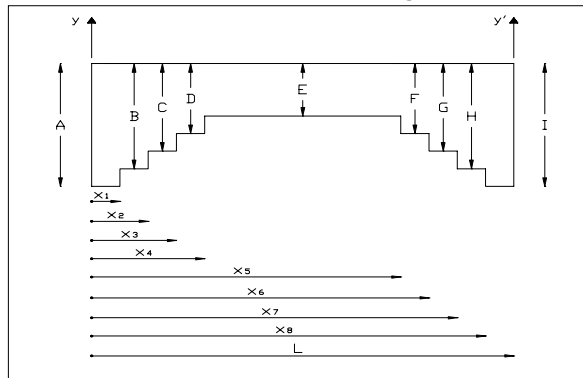


Figura 4: Nomenclatura utilizada para el cálculo de los términos de la matriz de flexibilidad

$$A = \frac{1}{(EI)_a} \quad E = \frac{1}{(EI)_o} \quad I = \frac{1}{(EI)_b} \quad C = \frac{1}{\frac{(EI)_a + (EI)_o}{2}}$$

$$B = \frac{1}{\frac{(EI)_a + \frac{(EI)_a + (EI)_o}{2}}{2}} \quad D = \frac{1}{\frac{(EI)_o + \frac{(EI)_a + (EI)_o}{2}}{2}}$$

Las variables H, G y F son similares a las variables B, C y D con la diferencia de que en lugar de $(EI)_a$ se tiene $(EI)_b$. Por otra parte la nomenclatura utilizada para definir la longitud de cada una de las subfiguras es la siguiente:

$$X_1 = \frac{\lambda_a L}{4} \quad X_2 = \frac{\lambda_a L}{2} \quad X_3 = \frac{3\lambda_a L}{4} \quad X_4 = \lambda_a L \quad X_5 = L - \lambda_b L$$

Las restantes variables X_i se encuentran en forma similar. Lo importante es destacar que todas se miden a partir del nudo inicial que es el nudo izquierdo. En base a esta nomenclatura en la tabla 1 se indica el cálculo de I_y, I'_y y W .

Tabla 1: Cálculo del área y momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

Fig	W	I_y	I'_y
1	$A X_1$	$\frac{A X_1^3}{3}$	$\frac{A [L^3 - (L - X_1)^3]}{3}$
2	$B (X_2 - X_1)$	$\frac{B (X_2^3 - X_1^3)}{3}$	$\frac{B [(L - X_1)^3 - (L - X_2)^3]}{3}$
3	$C (X_3 - X_2)$	$\frac{C (X_3^3 - X_2^3)}{3}$	$\frac{C [(L - X_2)^3 - (L - X_3)^3]}{3}$
4	$D (X_4 - X_3)$	$\frac{D (X_4^3 - X_3^3)}{3}$	$\frac{D [(L - X_3)^3 - (L - X_4)^3]}{3}$
5	$E (X_5 - X_4)$	$\frac{E (X_5^3 - X_4^3)}{3}$	$\frac{E [(L - X_4)^3 - (L - X_5)^3]}{3}$
6	$F (X_6 - X_5)$	$\frac{F (X_6^3 - X_5^3)}{3}$	$\frac{F [(L - X_5)^3 - (L - X_6)^3]}{3}$
7	$G (X_7 - X_6)$	$\frac{G (X_7^3 - X_6^3)}{3}$	$\frac{G [(L - X_6)^3 - (L - X_7)^3]}{3}$
8	$H (X_8 - X_7)$	$\frac{H (X_8^3 - X_7^3)}{3}$	$\frac{H [(L - X_7)^3 - (L - X_8)^3]}{3}$
9	$I (L - X_8)$	$\frac{I (L^3 - X_8^3)}{3}$	$\frac{I (L - X_8)^3}{3}$
	$\sum W$	$\sum I_y$	$\sum I'_y$

Con los resultados encontrados y con la notación indicada en la tabla 1, la matriz de flexibilidad del elemento es la siguiente.

$$f = \begin{bmatrix} \frac{\sum I'_y}{L^2} & \frac{\sum W - \frac{\sum I_y}{L^2} - \frac{\sum I'_y}{L^2}}{2} \\ \frac{\sum W - \frac{\sum I_y}{L^2} - \frac{\sum I'_y}{L^2}}{2} & \frac{\sum I_y}{L^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

5 RELACIONES MOMENTO CURVATURA M-C

En cada incremento de carga lateral, se encuentra el diagrama M-C en el nudo inicial, centro de luz y nudo final de cada elemento de la estructura. Así como se determina los momentos actuantes en cada uno de estos puntos y se observa en el diagrama en que rama de la misma se encuentra para determinar la correspondiente rigidez a flexión (EI). La forma general del diagrama se indica en la figura 5, la curva del primer cuadrante corresponde al caso de que la carga actúa en un sentido y la curva del tercer cuadrante para cuando la carga actúa en sentido contrario.

Como se aprecia en la figura 5, se considera un modelo trilineal para el diagrama M-C, en el cual el punto A, se encuentra cuando el hormigón llega a su máximo esfuerzo a tracción. El punto Y, cuando el acero a tracción alcanza el límite de fluencia y el punto U, cuando el hormigón a compresión llega a su máxima deformación útil.

Para el modelo de cálculo adoptado se tienen tres rigideces a flexión, para cada una de las ramas del modelo, que son:

$$(EI)_o = \frac{M_a}{\phi_a} = \frac{E b h^3}{12} \quad (11)$$

$$(EI)_1 = \frac{M_y - M_a}{\phi_y - \phi_a} \quad (12)$$

$$(EI)_2 = \frac{M_u - M_y}{\phi_u - \phi_y} \quad (13)$$

Se ha omitido el signo \pm para darle el carácter general. Para la primera rama que corresponde al rango elástico $(EI)_o$, se tiene que la rigidez se calcula con la Inercia gruesa. En consecuencia, en la ecuación (11) se tiene que b , es la base y h , es la altura de la sección transversal.

Cuando se inicia el proceso de carga, la sección analizada tiene una rigidez $(EI)_o$ y se mantiene con esta rigidez hasta cuando el momento actuante supera el valor de M_a , en que disminuye la rigidez a flexión al valor de $(EI)_1$, con este valor permanece hasta que el momento actuante sea mayor a M_y en que la rigidez disminuye notablemente al valor de $(EI)_2$.

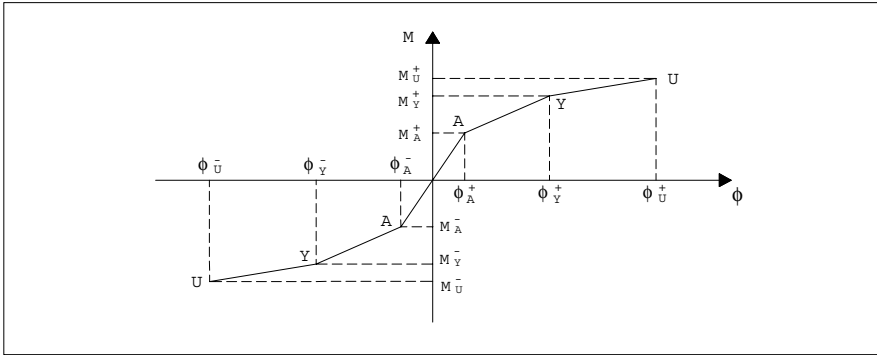


Figura 5: Modelo numérico adoptado para la curva momento curvatura.

6 LONGITUD DE DAÑO

En la figura 6, se indica el diagrama de momentos de un elemento a partir del cual se determina la longitud de daño $\lambda_a L$ para el nudo inicial y $\lambda_b L$ para el nudo final. Sean M_i y M_j los momentos actuantes en el nudo inicial y final respectivamente. Estrictamente cuando estos valores superan el valor de M_a se tiene daño en el elemento pero normalmente se considera la longitud de daño cuando el momento actuante supera el momento de fluencia M_y .

De la figura 6, por triángulos semejantes se deduce que:

$$\lambda_a = \frac{M_i - M_y}{M_i + M_j} \quad (14)$$

$$\lambda_b = \frac{M_j - M'_y}{M_i + M_j} \quad (15)$$

donde M_y y M'_y , son los momentos de fluencia para el nudo inicial y final del elemento.

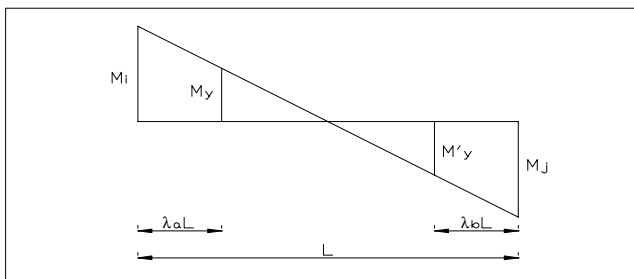


Figura 6: Diagrama de momentos y longitudes de daño.

7 DESCRIPCIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

La altura de los entrepisos de las estructuras que se analizan es de 3.0 m. Por otra parte, cada una tiene luces iguales y es de 4 m. para las de 3 y 5 pisos, la de 10 pisos tiene luces de 5 m. En referencias (3,5) se presenta el armado de las columnas y vigas y en la tabla 2 se presenta las dimensiones de las mismas al igual que la carga vertical actuante.

Tabla 2: Descripción de las estructuras analizadas.

Estructura	Vanos	Carga Vertical	Columnas		Vigas
			Dimensiones	Niveles	
3 Pisos	2	1.6 T/m.	40X40 cm.	Todos	30X30 cm.
5 Pisos	3	2.5 T/m.	45X45 cm.	Todos	30X45 cm.
10 Pisos	3	4.0 T/m.	56X56 cm.	1-4	75X35 cm.
			54X54 cm.	5-6	75X35 cm.
			50X50 cm.	7-8	75X35 cm.
			42X42 cm.	9-10	75X35 cm.

8 CURVAS DE CAPACIDAD SIN CONSIDERAR EFECTO $P-\Delta$

En el presente apartado se presentan las curvas de capacidad resistente que se obtienen con cada uno de los modelos de plasticidad indicados en la figura 1, mediante el programa de computación **CEINCI3** y mediante el programa **DRAIN-2DX**⁽⁶⁾. Se presentan resultados, sin considera el efecto $P-\Delta$. Las curvas de capacidad resistente, relacionan el cortante basal V , con el desplazamiento lateral máximo de la estructura D_l , y se obtienen aplicando la técnica del pushover.

En la figura 7-a, se muestra las curvas de capacidad en la estructura de 3 pisos, se aprecia que la curva que se obtiene con el modelo de plasticidad propuesto se encuentra aproximadamente en la mitad de las que se obtienen con los otros modelos. La curva de capacidad que se halla con el programa DRAIN-2DX es una cota superior y la que se encuentra con el modelo (1) de rigidez lineal es una cota inferior.

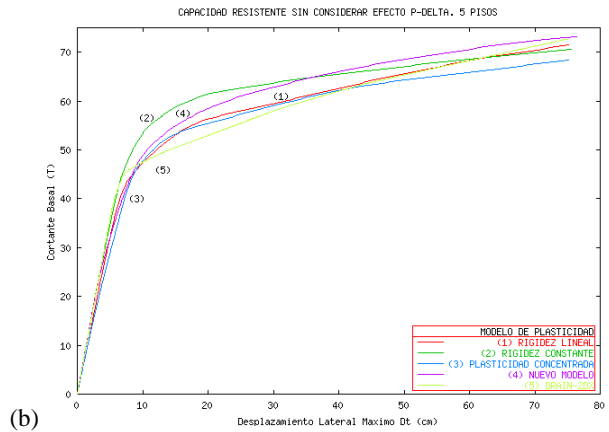
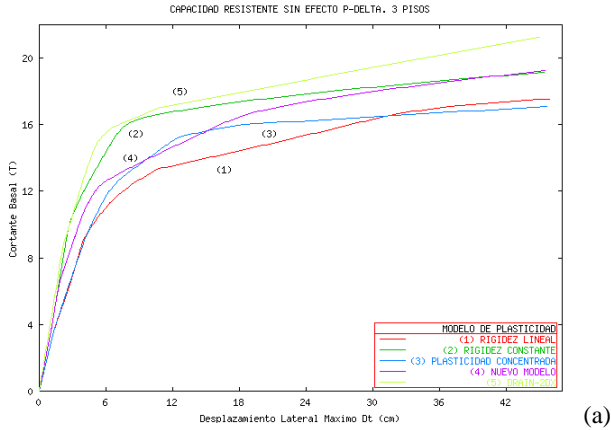


Figura 7 (a) y (b): Curvas de capacidad resistente que se obtienen con diferentes modelos de plasticidad en estructuras de 3 y 5 pisos. Análisis sin considerar efecto $P - \Delta$.

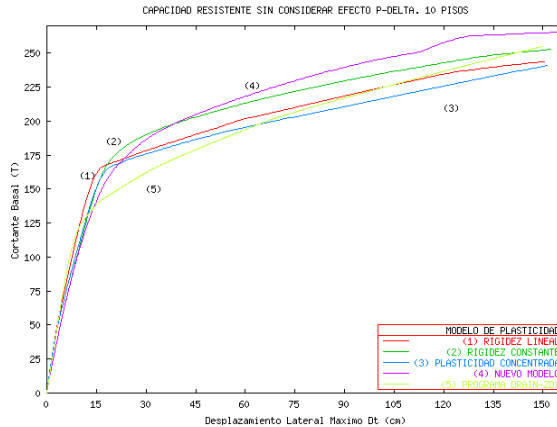


Figura 7 (c): Curvas de capacidad resistente que se obtienen con diferentes modelos de plasticidad en estructuras de 10 pisos. Análisis sin considerar efecto $P - \Delta$.

En la figura 7-b, se indican las curvas de capacidad que se obtienen en la estructura de 5 pisos. En forma general se aprecia que la dispersión es menor en relación a la estructura de 3 pisos. Por otra parte, la curva que se obtiene con el modelo de plasticidad propuesto se halla en la mitad de las curvas hasta el 2% de la altura del edificio, después de este valor se convierte en una cota superior; similar comportamiento se obtiene con la estructura de 10 pisos, cuyos resultados se indican en la figura 7-c.

La curva de capacidad que se encuentra con el modelo de plasticidad (2) que solo considera un escalón de inercia para deformaciones mayores al 2 % de la altura total del edificio presenta valores menores de resistencia en comparación con el modelo (4) que se propone en este estudio, lo cual era de esperarse por la forma del modelo.

9 CURVAS DE CAPACIDAD CONSIDERANDO EFECTO $P - \Delta$

En la técnica del pushover se aplican cargas laterales que se van incrementando, en una sola dirección. En consecuencia, el efecto $P - \Delta$, va a ser importante, cuando los desplazamientos laterales son considerables. En la referencia (3) se presenta el marco teórico respectivo, razón por la cual se indica a continuación, la forma como se calcula. Por ejemplo, para una estructura de tres pisos, como la indicada en la figura 8, en la cual se han concentrado las masas a nivel de cada piso. Sean m_1, m_2, m_3 , las masas totales de los pisos uno, dos y tres. Por otra parte, sean D_1, D_2, D_3 , los desplazamientos laterales de los respectivos pisos.

Finalmente a la derecha de la figura 8, se ha indicado una deformada lateral en los cuales los pesos W_1, W_2, W_3 , tienden a voltear a la estructura. Este efecto adicional se considera como un estado de cargas horizontales actuando en cada uno de los pisos, en la estructura deformada como se ilustra a la derecha de la figura 8. El vector de cargas generalizadas Q , para las coordenadas indicadas, en la figura 8, debido al efecto $P-\Delta$, resulta:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{W_1}{H_1} D_1 \\ \frac{W_2}{H_2} (D_2 - D_1) \\ \frac{W_3}{H_3} (D_3 - D_2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

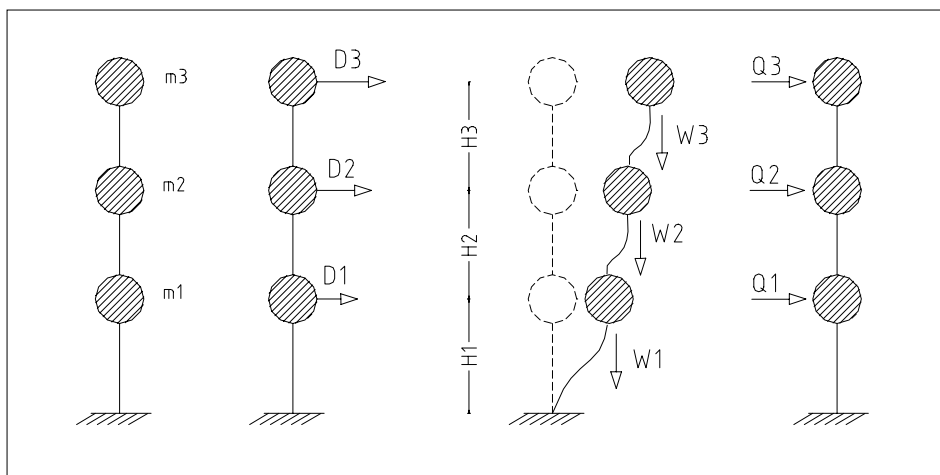


Figura 8: Nomenclatura utilizada y esquema de cálculo del efecto $P-\Delta$.

Siendo H_1, H_2, H_3 , las alturas de los pisos uno, dos y tres. Por lo tanto, el efecto $P-\Delta$ lo que incrementa es el vector de cargas Q . Sin efecto $P-\Delta$, únicamente contiene las fuerzas laterales que se aplican a la estructura; con el efecto $P-\Delta$, estas fuerzas se incrementan por el producto del desplazamiento relativo de piso multiplicado por el peso de piso y dividido para la altura del entrepiso.

Existen algunas consideraciones especiales, que deben tomarse en cuenta en el efecto $P-\Delta$, las mismas que están descritas en referencia (2) con detalle, que se resumen a continuación:

- El vector que contiene las coordenadas de los nudos de la estructura debe actualizarse en cada incremento de carga lateral. Cuando no se considera el efecto $P-\Delta$, las coordenadas de los nudos permanecen constante. En el efecto $P-\Delta$, las coordenadas de los nudos cambian, a la posición de la estructura deformada.
- El cálculo del efecto $P-\Delta$, se realiza en forma incremental, al igual que todo el análisis no lineal estático.
- El Vector de cargas \mathbf{Q} , es igual al vector de cargas debido a las fuerzas horizontales, de la técnica del pushover, más el vector de cargas debido al efecto $P-\Delta$.

Cuando se considera el efecto $P-\Delta$, la resistencia de la estructura es menor. Como se aprecia en la figura 9 con relación a la figura 7.

En la parte superior de la figura 9, se tiene la curva de capacidad resistente de la estructura de 3 pisos pero considerando el efecto $P-\Delta$, en la parte central se tiene lo propio pero en la estructura de 5 pisos y en la parte inferior la curva de capacidad para la estructura de 10 pisos.

El comportamiento de las curvas indicadas en la figura 9, es similar al comportamiento que se obtuvo en las mismas estructuras pero sin considerar el efecto $P-\Delta$.

10 MODELO BILINEAL

En las figuras 7 y 9, se tienen las curvas de capacidad resistente, sin considerar y considerando el efecto $P-\Delta$. Ahora bien en el análisis tendiente a obtener la respuesta de la estructura ante una acción sísmica se acostumbra encontrar un modelo bilineal de la curva de capacidad resistente, de esta manera se simplifica el problema.

Existen varios criterios para encontrar el modelo bilineal, uno de ellos y es el que se utiliza en el presente artículo es el *criterio de iguales áreas*, que cumple con la condición de que el área bajo la curva de capacidad resistente es igual al área del modelo bilineal.

En la figura 10, se presenta a la izquierda los modelos bilineales, correspondientes a la estructura de 3 pisos, sin considerar el efecto $P-\Delta$ y a la derecha considerando dicho efecto. Nótese que en la figura de la derecha la resistencia es menor.

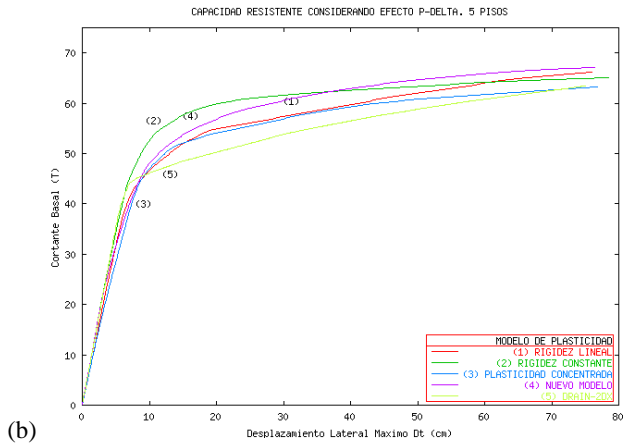
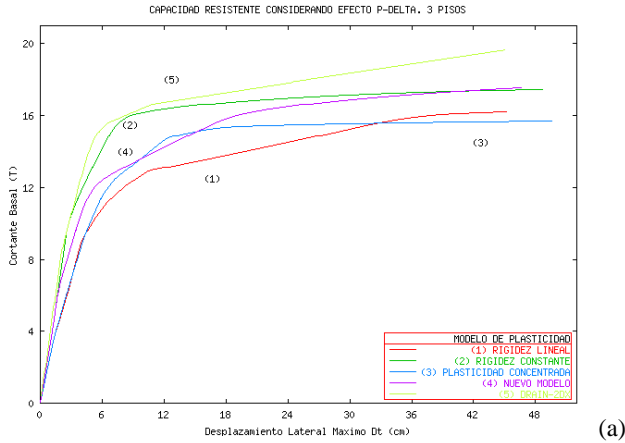


Figura 9 (a) y (b): Curvas de capacidad resistente que se obtienen con diferentes modelos de plasticidad en estructuras de 3 y 5 pisos. Considerando efecto $P - \Delta$.

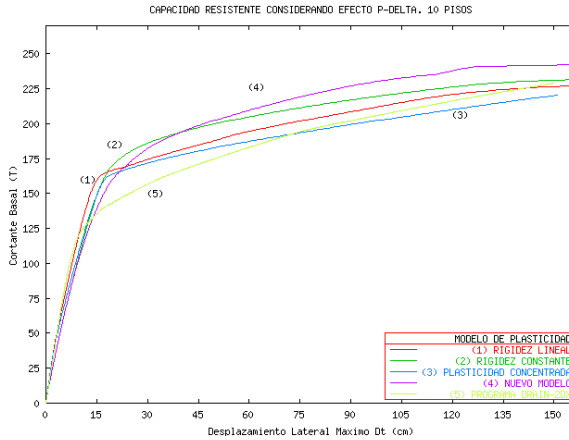


Figura 9 (c): Curvas de capacidad resistente que se obtienen con diferentes modelos de plasticidad en estructuras de 10 pisos. Considerando efecto $P - \Delta$.

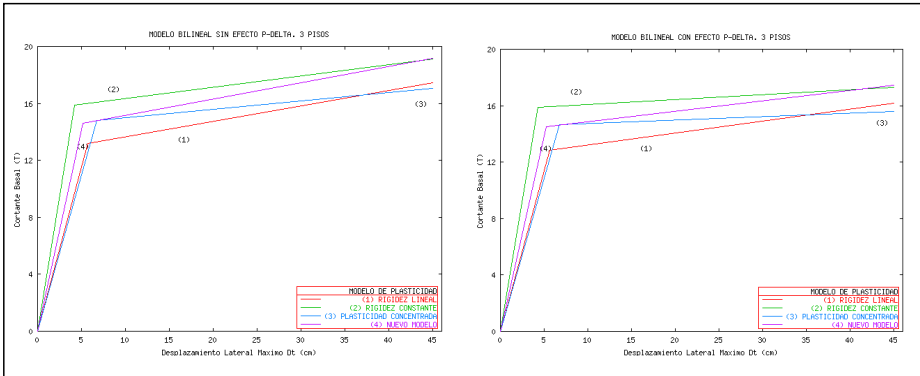


Figura 10: Modelos bilineales con diferentes modelos de plasticidad de la estructura de 3 pisos. Análisis sin efecto $P - \Delta$, a la izquierda y con efecto $P - \Delta$, a la derecha.

En la figura 11, se indican los modelos bilineales de las curvas de capacidad resistente de la estructura de 5 pisos y en la figura 12, de la de 10 pisos; en el mismo formato de presentación, a la izquierda sin efecto $P - \Delta$ y a la derecha con efecto $P - \Delta$.

Como los modelos bilineales se obtienen de las curvas de capacidad resistente, los comentarios que se pueden hacer con relación al nuevo modelo de plasticidad son los mismos que ya se han indicado.

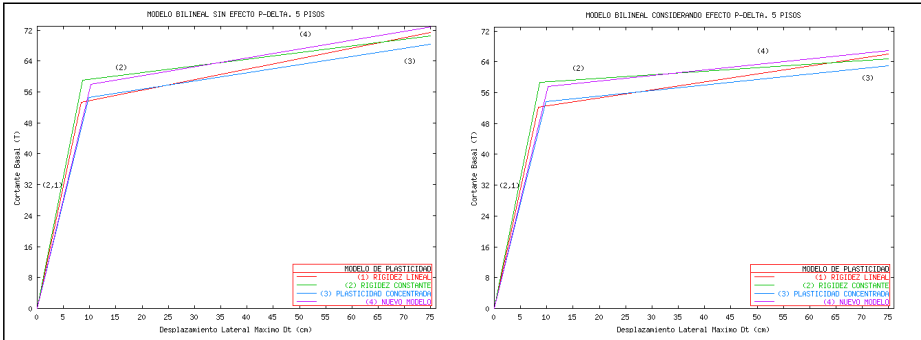


Figura 11: Modelos bilineales con diferentes modelos de plasticidad de la estructura de 5 pisos. Análisis sin efecto $P - \Delta$, a la izquierda y con efecto $P - \Delta$, a la derecha.

En base a los modelos bilineales, se determinan los parámetros que están indicados en la tablas 3 a 5, con los cuales se realiza el estudio estadístico. En base a todos los datos se ha determinado el valor medio, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

La nomenclatura utilizada para el estudio estadístico es la siguiente: D_{fy} es el desplazamiento a nivel de fluencia de la estructura, V_y y V_u son los cortantes basales a nivel de fluencia y de capacidad última, K_{elas} es la rigidez elástica de la estructura y finalmente K_{plas} es la rigidez post fluencia de la estructura.

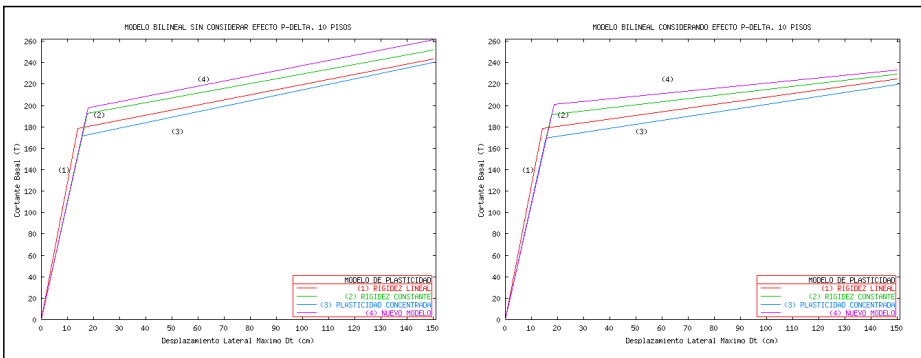


Figura 12: Modelos bilineales con diferentes modelos de plasticidad de la estructura de 10 pisos. Análisis sin efecto $P - \Delta$, a la izquierda y con efecto $P - \Delta$, a la derecha.

Tabla 3: Valores obtenidos en edificio de 3 pisos y parámetros estadísticos.

Modelo	Sin efecto $P - \Delta$					Con efecto $P - \Delta$				
	D_{ty}	V_y	V_u	K_{elas}	K_{plas}	D_{ty}	V_y	V_u	K_{elas}	K_{plas}
	(cm.)	(T.)	(T.)	(T/m.)	(T/m.)	(cm.)	(T.)	(T.)	(T/m.)	(T/m.)
1	5.72	13.18	17.45	230.47	10.89	5.65	12.82	16.18	226.83	8.54
2	4.23	15.88	19.12	375.70	7.94	4.27	15.90	17.32	372.04	3.48
3	6.67	14.82	17.06	222.46	5.82	6.71	14.67	15.59	218.57	2.40
Propuesto	5.18	14.61	19.19	281.95	11.52	5.22	14.50	17.43	277.66	7.36
Media	5.45	14.62	18.21	277.65	9.04	5.46	14.47	16.63	273.78	5.45
Desviac.	0.88	0.96	0.96	61.04	2.30	0.88	1.10	0.78	61.08	2.57
Coef. Var.	0.16	0.07	0.05	0.22	0.25	0.16	0.08	0.05	0.22	0.47

Tabla 4: Valores obtenidos en edificio de 5 pisos y parámetros estadísticos.

Modelo	Sin efecto $P - \Delta$					Con efecto $P - \Delta$				
	D_{ty}	V_y	V_u	K_{elas}	K_{plas}	D_{ty}	V_y	V_u	K_{elas}	K_{plas}
	(cm.)	(T.)	(T.)	(T/m.)	(T/m.)	(cm.)	(T.)	(T.)	(T/m.)	(T/m.)
1	8.38	53.25	71.41	635.34	27.25	8.33	52.28	66.00	627.64	20.58
2	8.62	59.08	70.56	685.68	17.29	8.65	58.71	64.73	678.56	9.07
3	9.80	54.64	68.29	557.45	20.94	9.78	53.73	63.04	549.56	14.27
Propuesto	10.17	58.05	72.89	571.08	22.89	10.21	57.54	66.98	563.37	14.56
Media	9.24	56.26	70.79	612.38	22.09	9.24	55.62	65.19	604.78	14.62
Desviac.	0.76	2.39	1.67	51.53	3.59	0.78	2.68	1.47	51.79	4.08
Coef. Var.	0.08	0.04	0.02	0.08	0.16	0.08	0.05	0.02	0.09	0.28

Tabla 5: Valores obtenidos en edificio de 10 pisos y parámetros estadísticos.

Modelo	Sin efecto $P - \Delta$					Con efecto $P - \Delta$				
	D_{ty}	V_y	V_u	K_{elas}	K_{plas}	D_{ty}	V_y	V_u	K_{elas}	K_{plas}
	(cm.)	(T.)	(T.)	(T/m.)	(T/m.)	(cm.)	(T.)	(T.)	(T/m.)	(T/m.)
1	13.93	178.20	243.51	1279.01	48.00	14.12	178.55	224.86	1264.3	34.08
2	17.59	192.68	251.65	1095.11	44.53	17.70	191.33	228.97	1081.2	28.45
3	15.44	171.72	240.20	1112.49	50.89	15.45	169.56	219.83	1097.2	37.36
Propuesto	17.98	197.47	261.17	1098.05	48.25	18.61	201.28	233.08	1081.5	24.20
Media	16.23	185.02	249.13	1146.17	47.92	16.47	185.18	226.68	1131.1	31.06
Desviac.	1.65	10.45	8.103	76.98	2.26	1.78	12.09	4.91	77.20	5.06
Coef. Var.	0.10	0.06	0.03	0.07	0.05	0.11	0.07	0.02	0.07	0.16

En la tabla 3, se observa que los coeficientes de variación que se obtienen con todos los datos para la estructura de 3 pisos, es menor a 0.10 para los cortantes a nivel de fluencia y de

capacidad última. Estos valores son menores en la estructura de 5 pisos como se aprecia en la tabla 4. A nivel de rigidez los coeficientes de variación obtenidos en la estructura de 10 pisos son los menores.

Tabla 6: Comparación entre el modelo propuesto y otros modelos de plasticidad indicados en figura 1.

3 PISOS								
Modelos	Sin efecto $P - \Delta$				Con efecto $P - \Delta$			
	D_{ty}	V_y	V_u	$\frac{K_{plas}}{K_{elas}}$	D_{ty}	V_y	V_u	$\frac{K_{plas}}{K_{elas}}$
	(cm.)	(T.)	(T.)		(cm.)	(T.)	(T.)	
1,2 y 3	5.54	14.63	17.88	0.031	5.54	14.46	16.36	0.016
Propuesto	5.18	14.61	19.19	0.041	5.22	14.50	17.43	0.027
Diferencia (%)	6.95	0.14	6.83	24.39	6.13	0.28	6.14	40.74
5 PISOS								
Modelos	Sin efecto $P - \Delta$				Con efecto $P - \Delta$			
	D_{ty}	V_y	V_u	$\frac{K_{plas}}{K_{elas}}$	D_{ty}	V_y	V_u	$\frac{K_{plas}}{K_{elas}}$
	(cm.)	(T.)	(T.)		(cm.)	(T.)	(T.)	
1,2 y 3	8.93	55.66	70.09	0.035	8.92	54.91	64.59	0.024
Propuesto	10.17	58.05	72.89	0.040	10.21	57.54	66.98	0.026
Diferencia (%)	12.19	4.12	3.84	12.5	12.63	4.57	3.57	7.69
10 PISOS								
Modelos	Sin efecto $P - \Delta$				Con efecto $P - \Delta$			
	D_{ty}	V_y	V_u	$\frac{K_{plas}}{K_{elas}}$	D_{ty}	V_y	V_u	$\frac{K_{plas}}{K_{elas}}$
	(cm.)	(T.)	(T.)		(cm.)	(T.)	(T.)	
1,2 y 3	15.65	180.87	245.12	0.042	15.76	179.81	224.55	0.029
Propuesto	17.98	197.47	261.17	0.044	18.61	201.28	233.08	0.022
Diferencia (%)	12.96	8.41	6.15	4.55	15.31	10.67	3.66	31.82

11 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

En la tabla 6, se comparan los valores medios que se obtienen con los tres primeros modelos y los que se encuentran con el modelo propuesto. La comparación se realiza para el desplazamiento y cortante de fluencia, para el cortante último y para la relación de rigidez post fluencia con respecto a la rigidez elástica.

Con excepción de la relación entre la rigidez de post fluencia con respecto a la rigidez elástica, todos las restantes comparaciones entre el modelo propuesto y el promedio de los tres primeros modelos indicados en la figura 1, es menor al 16%. Lo cual demuestra que el modelo propuesto presenta valores cuya media se aproxima bastante bien a la media de los modelos anotados. La relación de rigidez presenta valores bastante bajos de tal forma que al considerar dos dígitos los valores obtenidos coinciden.

12 CONCLUSIONES

Se ha presentado la teoría de un nuevo modelo de plasticidad para encontrar la curva de capacidad resistente de una estructura empleando análisis estático no lineal. Posteriormente se han comparado las curvas de capacidad que se obtienen al utilizar el modelo propuesto con otros modelos de plasticidad y empleando dos programas de ordenador que son el CEINCI3 y el DRAIN-2DX. La comparación se ha realizado en estructuras de 3, 5 y 10 pisos considerando el efecto $P-\Delta$ y sin considerar dicho efecto.

Para el análisis estadístico se ha construido un modelo bilineal cuya área interior es igual al área de la curva de capacidad resistente. En este modelo se han comparado los desplazamientos y cortantes a nivel de fluencia, los cortantes últimos, la rigidez elástica y plástica y finalmente la relación de estas dos rigideces. De todo el estudio realizado se desprenden las siguientes conclusiones:

- El modelo propuesto presenta curvas de capacidad resistente que se aproximan muy bien a las obtenidas con otros modelos de plasticidad extendida. Por lo tanto es un modelo confiable para el análisis de estructuras compuestas por columnas y vigas sin muros de corte que es lo que se ha analizado en el presente artículo.
- El considerar cuatro niveles de inercia en la zona de daño modela de mejor forma el comportamiento sísmico del elemento en lugar de considerar un solo nivel de inercia.
- Es importante la incorporación del efecto $P-\Delta$, en el análisis sísmico debido a que la capacidad resistente disminuye en el rango inelástico. El comportamiento de las curvas de capacidad resistente que se obtienen con diferentes modelos de plasticidad es similar al que se halla al no considerar dicho efecto.

REFERENCIAS

1. Y. Park, A. Reinhorn and S. Kunnath, *IDARC: Inelastic damage analysis of reinforced concrete frame shear-wall structures*, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Technical Report **NCEER-87-0008**, (1987).
2. Y. S. Chung, M. Shinozuka and C. Meyer, *SARCF User's Guide: Seismic Analysis of Reinforced Concrete Frames*, National Center for Earthquake Engineering Research, Technical Report **NCEER-88-0044**, State University of New York at Buffalo, (1988).
3. R. Aguiar, *Sistema de computación CEINCI3 para evaluar daño sísmico en los Países Bolivarianos*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 302 p, Valle de los Chillos, Ecuador, (2002).
4. R. Aguiar, *Análisis Matricial de Estructuras*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 611 p, Segunda Edición, Valle de los Chillos, (1995).
5. R. Aguiar, M. Torres y S. Ruiz, *Influencia de distintos modelos de comportamiento plástico en el comportamiento estático no lineal de marcos estructurales planos*, Revista CIENCIA. Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, **5 (1)**, 73-95, Valle de los Chillos, Ecuador, (2002).
6. V. Prakash, G.H. Powell and S. Campbell, *DRAIN-2DX Base Program Description and User Guide*, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, (1993).