

ANÁLISIS DINAMICO NO LINEAL DE PORTICOS Y TABIQUES

Pablo J. Sanchez^{*}, Victorio E. Sonzogni^{*}.

^{*} Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)
Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450
3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: psanchez@intec.unl.edu.ar , sonzogni@intec.unl.edu.ar .

Key words: Análisis dinámico, no linealidad material, pórticos, tabiques.

Resumen. *El análisis elástico lineal es ampliamente utilizado para determinar la respuesta estructural ante cargas de servicio. No obstante, para situaciones extremas, como por ejemplo sismos moderados o destructivos, un análisis no lineal ofrece una respuesta más realista. En este trabajo se estudia el comportamiento no lineal material de estructuras aporticadas en el plano que, sometidas a cargas dinámicas determinísticas, pueden experimentar deformaciones plásticas según la distribución instantánea de esfuerzos. Asumiendo que el comportamiento no lineal está restringido a deformaciones por flexión, se propone un elemento de viga compuesto por dos tramos extremos de longitud variable cuya rigidez flexional está asociada a una curva constitutiva propuesta no lineal (momento-curvatura), y un tramo central de comportamiento elástico. La discretización espacial se ha realizado mediante elementos finitos. La resolución numérica sigue un esquema Newton Raphson, utilizando un algoritmo implícito para integrar de las ecuaciones de equilibrio.*

1 INTRODUCCION

Para obtener la respuesta dinámica de una estructura sometida a excitaciones sísmicas severas es necesario formular modelos matemáticos que contemplen una serie de aspectos físicos en los esquemas de integración temporal, asociados a las características histeréticas del material, al comportamiento elasto plástico y a la degradación de las propiedades mecánicas en determinadas secciones críticas; en algunos casos puede ser conveniente tener en cuenta también no linealidad geométrica.

Todos estos factores tienen una importante influencia en la respuesta y a los efectos de estudiar el comportamiento global deben estar presentes en el modelo numérico.

Dependiendo del nivel de discretización adoptado, pueden formularse desde modelos muy simples, con escasa información en tensiones y deformaciones internas, a modelos complejos con gran refinamiento en los cuales puede incorporarse todo tipo de efecto físico. Los primeros destinados a evaluar el comportamiento global de la estructura, y los últimos restringidos generalmente al estudio en detalle de secciones críticas.

Para el caso de estructuras aporricadas los elementos de viga representan una solución económica, desde el punto de vista computacional, y de aceptable precisión. Un modelo de estas características, que incluye no linealidad física y geométrica puede encontrarse en las referencias ^{1,2}.

El presente trabajo describe brevemente la implementación de tres elementos de viga muy simples. La longitud deformable L de cada uno de ellos está compuesta por dos tramos extremos con rigidez flexional degradada y un tramo central de rigidez flexional elástica (fig1)

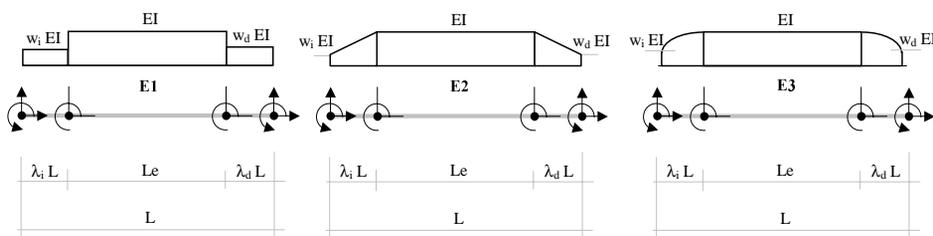


Figura 1: Elementos implementados

Los códigos actuales de diseño de estructuras sismorresistentes aceptan, para excitaciones severas, tanto el desarrollo controlado de deformaciones inelásticas irreversibles como la degradación de las propiedades mecánicas, en zonas especialmente diseñadas de la estructura dotadas de suficiente ductilidad. Si nos restringimos exclusivamente al caso de movimientos sísmicos, los máximos esfuerzos se presentarán indefectiblemente en los extremos de los elementos, por esta razón el daño o degradación de rigidez se origina allí inicialmente para propagarse hacia el interior hasta una cierta longitud (aquí denominada longitud de plastificación λL), a medida que se alcanza la tensión de fluencia del material.

Los elementos implementados postulan una distribución de rigidez flexional constante,

lineal y cuadrática en la zona de plastificación extrema, como se indica en la figura 1.

Cada elemento está formado por tres subelementos de viga que tienen en cuenta deformaciones axiales, flexionales, cortantes e inercia rotacional (elemento de viga de Timoshenko en el plano). La matriz de rigidez del elemento se obtiene por condensación de los grados de libertad internos de los subelementos.

A la longitud flexible o deformable L es posible agregarle zonas extremas rígidas mediante simples correcciones geométricas, posibilitando el modelado no sólo de elementos de pórticos, sino también de tabiques con la simplicidad de los modelos de viga-columna.

La función que proporciona la variación de rigidez en los tramos extremos depende de dos parámetros que se actualizan en cada instante del análisis. Uno de ellos es la longitud de plastificación que se calcula en función de la distribución actual de momentos flectores, el otro es la rigidez w de la secciones de control (secciones extremas, en este caso) la cual satisface una ecuación constitutiva no lineal predefinida en términos de momentos y curvaturas.

2 DISCRETIZACION ESPACIAL VIA MEF

Para la solución numérica vía elementos finitos, es necesario formular el problema en términos de un número finito de grados de libertad. El concepto básico del MEF consiste en reemplazar la función solución en desplazamientos $u(x,t)$ del problema dinámico continuo por una solución aproximada obtenida como combinación lineal de funciones de forma conocidas y parámetros incógnitas que varían en el tiempo, tal función puede expresarse:

$$\tilde{u}_{(x,t)} = \underline{f}_{(x)}^T \underline{a}_{(t)} \quad (1)$$

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico para el elemento de viga bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones adoptan la siguiente forma:

- para desplazamientos transversales

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q \quad (2)$$

- para desplazamientos longitudinales

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p \quad (3)$$

Sustituyendo la función aproximada propuesta en las ecuaciones diferenciales, aplicando Galerkin e integración por partes, es posible obtener fácilmente la ecuación semidiscreta de movimiento del elemento:

$$\underline{\underline{K}}_L^E \underline{U}_L^E + \underline{\underline{M}}_L^E \ddot{\underline{U}}_L^E = \underline{P}_{EQ}^E \quad (4)$$

Cada término a nivel elemental está expresado en coordenadas locales y tiene el siguiente significado:

- vector de desplazamientos del elemento:

$$\underline{\underline{U}}_L^E = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T \quad (5)$$

- matriz de rigidez del elemento (desplazamientos transversales):

$$\underline{\underline{K}}_L^E = EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \underline{\underline{f}}_F}{\partial x^2} g_{(x)} \frac{\partial^2 \underline{\underline{f}}_F^T}{\partial x^2} \right) dx \quad (6)$$

- matriz de rigidez del elemento (desplazamientos longitudinales):

$$\underline{\underline{K}}_L^E = AE \int_0^L \left(\frac{\partial \underline{\underline{f}}_A}{\partial x} g_{(x)} \frac{\partial \underline{\underline{f}}_A^T}{\partial x} \right) dx \quad (7)$$

- matriz de masa consistente elemental:

$$\underline{\underline{M}}_L^E = \rho A \int_0^L (\underline{\underline{f}} \underline{\underline{f}}^T) dx \quad (8)$$

- vector de cargas nodales equivalentes del elemento:

$$\underline{\underline{P}}_{EQ}^E = \int_0^L (\underline{\underline{f}} p) dx \quad (9)$$

Como se ha mencionado anteriormente se asume que existe una distribución continua de la degradación de las propiedades mecánicas en la longitud de plastificación (en este caso sólo el módulo de elasticidad longitudinal) que se tiene en cuenta mediante la función $g_{(x)}$ (constante, lineal y cuadrática para los extremos de \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 y \mathbf{E}_3 respectivamente). Para los subelementos centrales la función $g_{(x)}$ es unitaria.

El vector $\underline{\underline{f}}$, en las expresiones anteriores, está compuesto por $\underline{\underline{f}}_F$ y $\underline{\underline{f}}_A$ (vectores de funciones de forma para desplazamientos por flexión y por sollicitación axial respectivamente).

3 FUNCIONES DE FORMA

Las funciones de forma utilizadas, para tener en cuenta el efecto de las deformaciones por esfuerzo constante y la inercia de rotación de la sección transversal, son las siguientes [3]:

$$\underline{\underline{f}}_F = [\underline{\underline{f}}_R \quad \underline{\underline{f}}_T] \quad (10)$$

Aquí \underline{f}_R y \underline{f}_T son vectores que contienen las funciones de forma para incluir la rotación de la sección y los desplazamientos normales de la misma con respecto al eje neutro respectivamente. Sus expresiones analíticas se indican a continuación:

$$\underline{f}_R = \frac{1}{1+\varphi} \begin{bmatrix} 6\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)\eta \\ \left[-1 + 4\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2} - \left(1 - \frac{x}{L}\right)\varphi\right]L\eta \\ 6\left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right)\eta \\ \left(2\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\varphi\right)L\eta \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{f}_T = \frac{1}{1+\varphi} \begin{bmatrix} -6\frac{x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3} + \frac{1}{L}\varphi \\ \left[\frac{1}{L} - 4\frac{x}{L^2} + 3\frac{x^2}{L^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L} - 2\frac{x}{L^2}\right)\varphi\right]L \\ 6\frac{x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3} + \frac{1}{L}\varphi \\ \left[-2\frac{x}{L^2} + 3\frac{x^2}{L^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L} - 2\frac{x}{L^2}\right)\varphi\right]L \end{bmatrix} \quad (12)$$

definiendose además:

$$\varphi = \frac{12EI}{GAL^2} \chi \quad ; \quad \eta = \frac{y}{L} \quad (13)$$

χ : factor de forma de la sección.

y : distancia al eje neutro de la sección

Con respecto a los desplazamientos en la dirección del eje del elemento son suficientes, en la mayoría de los casos, funciones de variación lineal:

$$\underline{f}_A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Definidas las expresiones analíticas de las funciones de interpolación es posible evaluar las ecuaciones (6), (7), (8) y (9) para cada subelemento.

4 CARACTERISTICAS GENERALES DEL ELEMENTO FINITO

4.1 Elemento lineal

Es un elemento de interpolación cúbica en desplazamientos que incluye los efectos de la inercia de rotación y las deformaciones por corte.

Los segmentos AC y DB (figura 2) son infinitamente rígidos con el objeto de representar conexiones de dimensión finita.

El tramo central CD es rectilíneo, con propiedades mecánicas y físicas constantes, admite un comportamiento elástico capaz de deformarse debido a flexión, corte y esfuerzo normal.

Con respecto a las propiedades inerciales, la masa del elemento se tiene en cuenta mediante la formulación de una matriz de masa consistente. Es posible agregar masa no estructural concentrándola en cualquier grado de libertad.

El elemento admite cargas estáticas y dinámicas de variación lineal en sentido normal y/o tangencial a su eje, en toda o una fracción del tramo flexible.

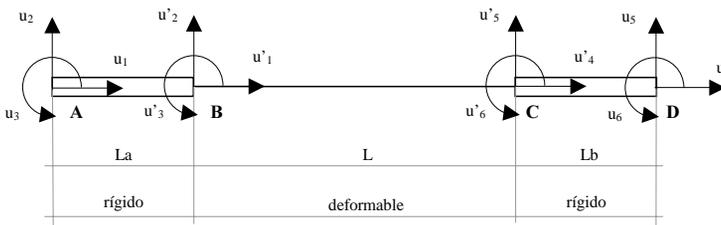


Figura 2: Modelo mecánico del elemento lineal

4.2 Elemento no lineal

Nuestro mayor interés en estudiar elementos con comportamiento no lineal material radica en el análisis dinámico ante excitaciones severas, que originan deformaciones plásticas en los componentes estructurales.

El elemento está formulado para cargas dinámicas nodales exclusivamente, originadas por ejemplo, por movimientos laterales del terreno de fundación. En este caso los esfuerzos de flexión más importantes se presentarán en los extremos de los elementos. Este motivo justifica la característica principal del modelo elasto-plástico que se describe.

El elemento no lineal está formulado utilizando como base al elemento lineal. La diferencia está asociada a la posibilidad de desarrollo de zonas extremas de menor rigidez simulando la formación de rotulas plásticas de longitud variable conforme varía la distribución de momentos flectores durante la respuesta transitoria. Al decir zonas extremas nos referimos siempre al tramo deformable (figura 3).

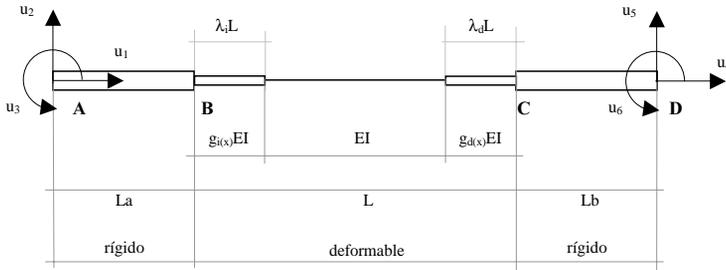


Figura 3: Modelo mecánico del elemento no lineal

La degradación de rigidez en la zona de plastificación viene dada por la función $g(x)$. En particular se tendrá:

$$\begin{aligned}
 g_i(x) &= w_i ; \text{ para } x = 0 \\
 g_i(x) &= 1 ; \text{ para } x = \lambda_i L \\
 g_d(x) &= 1 ; \text{ para } x = \lambda_d L \\
 g_d(x) &= w_d ; \text{ para } x = L
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

El parámetro w está asociado a la rigidez flexional de las secciones de control (extremas) y se evalúa en cada instante de tiempo.

Como primer aproximación proponemos, para tales secciones de control, una ecuación constitutiva elasto-plástica bilineal, con una ley de endurecimiento cinemático (figura 4).

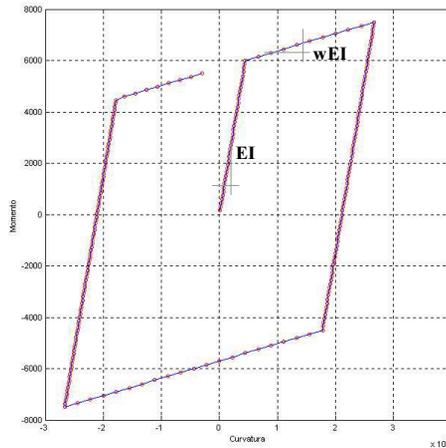


Figura 4: Relación constitutiva momento-curvatura

5 ANALISIS TRANSIENTE NO LINEAL

El procedimiento de cálculo para obtener la respuesta transiente consiste en someter a la estructura a incrementos de carga que dependen de la discretización temporal adoptada.

El equilibrio global para un incremento en particular se logra mediante un esquema iterativo en el cual se modifica la rigidez de cada elemento en función de los parámetros constitutivos y la correspondiente longitud de plastificación variable. Cuando se satisface el criterio de convergencia se aplica el próximo incremento de carga hasta completar el análisis.

En líneas generales se sigue el esquema Newton Raphson utilizando un método implícito (Newmark) para la integración numérica de las ecuaciones de movimiento.

6 AMORTIGUAMIENTO

Se asume un mecanismo de disipación de energía homogéneo en toda la estructura y la existencia de proporcionalidad entre fuerzas no conservativas y velocidad (amortiguamiento viscoso equivalente).

La matriz de amortiguamiento se formula a nivel global verificando ortogonalidad respecto a la matriz modal (amortiguamiento proporcional) mediante dos procedimientos³:

- amortiguamiento generalizado de Rayleigh (series numéricas de Caughey)
- evaluación modal directa (método de Wilson y Penzien)

7 CASOS DE PRUEBA

7.1 Analisis pseudo estático

Como primer ejemplo se verifica si el modelo no lineal propuesto, es capaz de recuperar la carga estática de colapso para la estructura indicada en la figura:

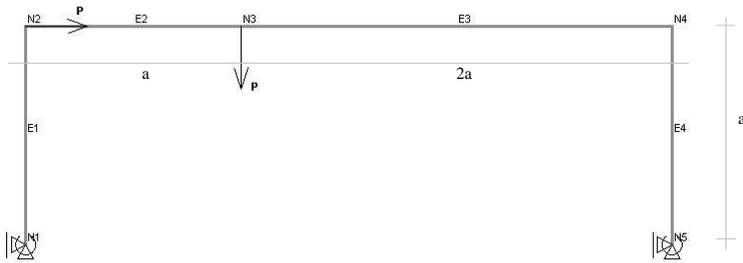


Figura 5: Pórtico sometido a carga pseudo-estática

Si los elementos tienen rigidez flexional constante, según la teoría de análisis límite, la carga última será⁵:

$$P_u = \frac{5}{2} \frac{M_p}{a} \quad (16)$$

En donde “ M_p ” es el momento de plastificación supuesto constante para todos los elementos, y “ a ” la longitud indicada en la figura anterior.

Para realizar el análisis no lineal, se ha utilizado el elemento **E1**, con longitudes de plastificación constantes del orden de un décimo de la longitud de cada elemento y una ecuación constitutiva elasto plástica perfecta a fin de simular la formación de rótulas plásticas concentradas en los nodos,

Tras realizar dicho análisis se ha recuperado el mecanismo real de colapso (figura 6) y la carga última con un error de 0.4% (figura 7) con respecto a la teórica ($P_u = 500$).

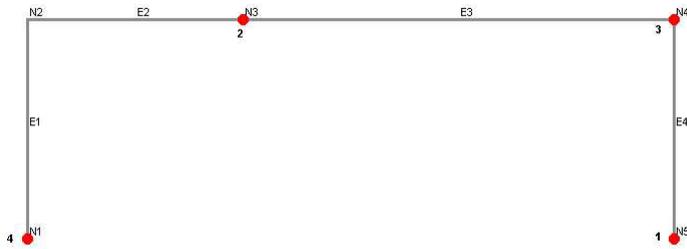


Figura 6: Mecanismo de generación de rótulas plásticas

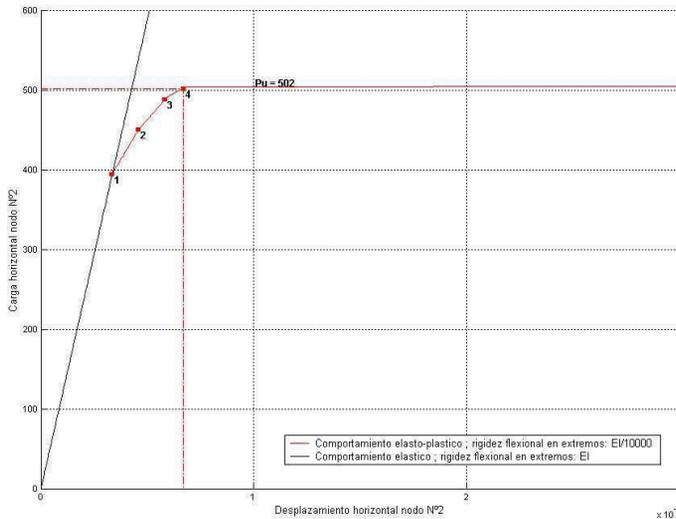


Figura 7: Diagrama carga desplazamiento

7.2 Analisis dinámico no lineal

Para validar la respuesta dinámica no lineal se han propuesto dos ejemplos.

El primero de ellos consiste en una viga perfectamente empotrada en uno de sus extremos y apoyada sobre un resorte elastoplástico en el borde opuesto el cual, a su vez, tiene el giro impedido, (figura 8-a).

El tramo AB está compuesto por tres elementos con comportamiento lineal, mientras que el tramo BC, en el modelo numérico, es un único elemento de viga no lineal que reemplaza al resorte elastoplástico con idéntica rigidez ante desplazamientos verticales (figura 8-b). Nuevamente, para evaluar la respuesta dinámica, el elemento con rigidez extrema constante fue utilizado: **E1**.

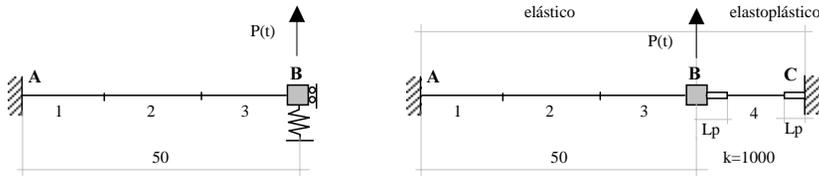


Figura 8: a) Modelo real b) Modelo numérico con elemento no lineal

En la tabla siguiente se indican las características físicas y mecánicas de la estructura en estudio:

	E1	E2	E3	E4
Longitud	16.66	16.66	16.66	30
Area	25	25	25	25
Inercia	13.0208	13.0208	13.0208	2.25
Módulo de Young	1e6	1e6	1e6	1e6
Densidad	7.8	7.8	7.8	0

Tabla 1: Propiedades de los elementos

Se adopta como longitud de plastificación del elemento 4 el 10% de su longitud total. El parámetro de reducción de rigidez, para este ejemplo es cero ($w=0$) para ambos extremos.

Las características mecánicas y físicas del elemento 4 (módulo de Young, área, inercia y momento de plastificación) se calcularon para restablecer el comportamiento elastoplástico del resorte ($k = 1000$; $F_p = 378.9$) ante desplazamientos verticales.

La sollicitación externa está compuesta por una carga impulsiva $P(t)$ de valor constante (1500) durante el periodo de análisis (12 segundos).

En la figura siguiente se comparan los resultados obtenidos en desplazamientos verticales del nodo B, con un modelo no lineal, desarrollado en un programa de placas sobre apoyos elastoplásticos. También se puede observar la solución dinámica lineal.

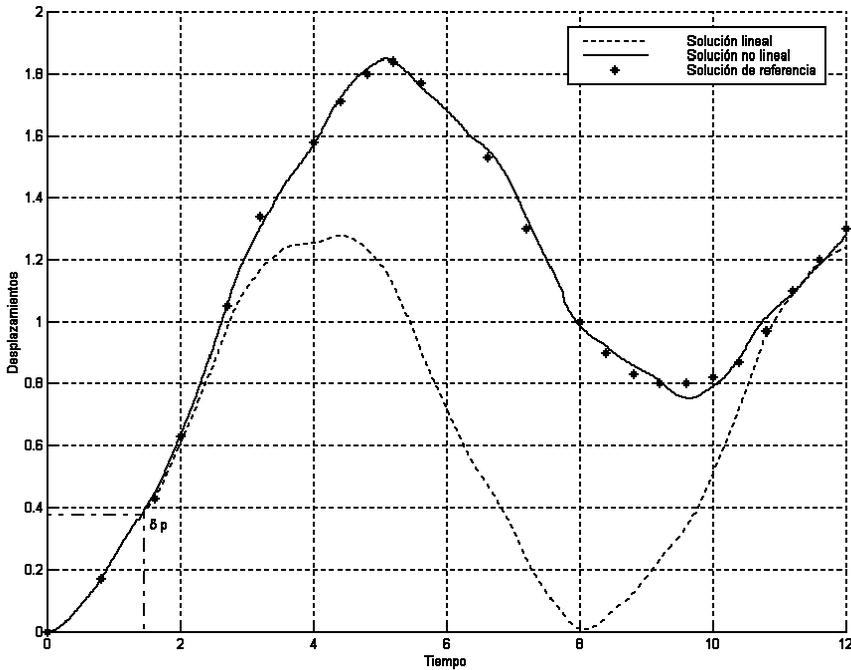


Figura 9: Solución modelo implementado (E1) vs solución de referencia

En el último ejemplo se estudia la performance de los tres elementos implementados. La estructura en cuestión se observa en la figura 10-b y se encuentra sometida al acelerograma indicado en la figura 11. El modelo numérico que se utilizó se muestra en la figura 10-a.

Se supone en este caso que los elementos verticales, de gran rigidez, permanecen elásticos durante el análisis, mientras que los miembros flexibles que los unen pueden incursionar en el campo inelástico conforme la distribución instantánea de esfuerzos, verificando una ley constitutiva con reducción de rigidez en ambos extremos: $0.1 * EI$ ($w_i = 0.1$; $w_d = 0.1$).

La tabla siguiente resume las características y las propiedades mecánicas de cada elemento.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Area [m ²]	0.30	0.30	0.30	0.08	0.08	0.08	0.30	0.30	0.30
Inercia [m ⁴]	0.0562	0.0562	0.0562	1.06e-3	1.06e-3	1.06e-3	0.0562	0.0562	0.0562
Factor χ	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
E [N/m ²]	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10
G [N/m ²]	12.5e9	12.5e9	12.5e9	12.5e9	12.5e9	12.5e9	12.5e9	12.5e9	12.5e9
ρ [kg/m ³]	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400

Tabla 2: Propiedades físicas y mecánicas de los elementos

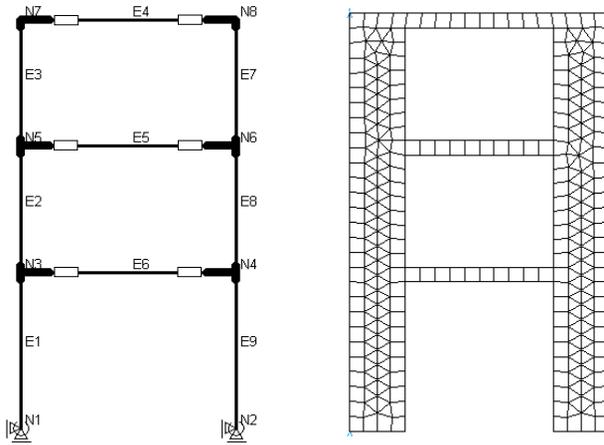


Figura 10: a) Modelo numérico b) Modelo real

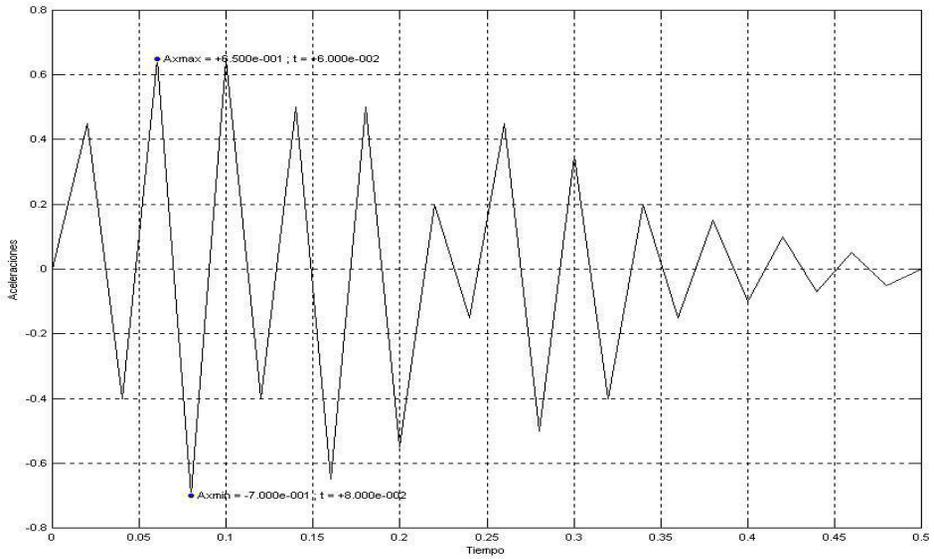


Figura 11: Acelerograma impuesto.

La figura 12 muestra la respuesta en desplazamientos horizontales del nodo número 8 para los tres elementos en estudio.

Como se esperaba, se observa una pequeña elongación del período fundamental para el elemento **E1**, ya que éste es el de mayor flexibilidad global.

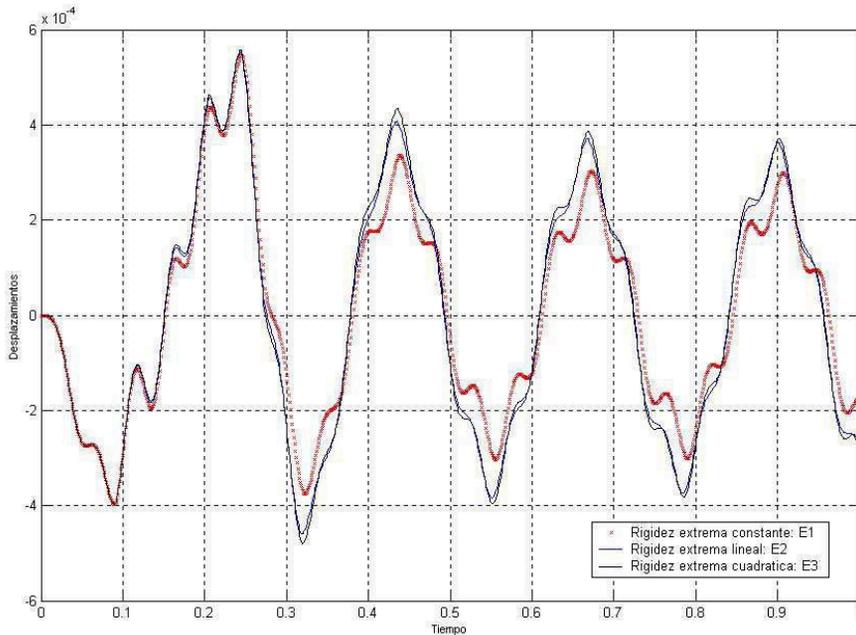


Figura 12: Desplazamientos horizontales nodo 8 para los elementos implementados

8 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un elemento de viga elasto-plástico que posee un tramo central de rigidez elástica y tramos extremos de rigidez flexional degradada en una longitud finita de plastificación. La variación de rigidez extrema se tiene en cuenta mediante una función continua $g(x)$ supuesta constante, lineal y cuadrática. El parámetro fundamental “w” que gobierna el comportamiento global del elemento se obtiene de una ley constitutiva con endurecimiento cinemático que corresponde a la relación momento curvatura de las secciones de control.

Si bien el modelo no lineal está aun en etapa de desarrollo, es capaz de recuperar con gran exactitud la carga y el mecanismo de colapso en análisis estáticos no lineales bajo carga monótonica, y en relación a la respuesta dinámica, ha mostrado un comportamiento satisfactorio frente a soluciones de referencia.

No se observan diferencias considerables en la respuesta en desplazamientos entre el elemento con rigidez extrema lineal y aquel con rigidez cuadrática.

Las investigaciones futuras estarán orientadas al estudio e implementación de leyes constitutivas que representen de forma más real el comportamiento histerético del material y a la aplicación práctica de estos modelos para optimizar criterios de diseño en estructuras sismorresistentes.

9 REFERENCIAS

- [1] O. Möller, J. G. Etse y M. Rubinstein, “Análisis Computacional no lineal para pórticos sismorresistentes”, *Mecánica Computacional*, AMCA, VOL.XVII, 405-414, (1997).
- [2] O. Möller, J. G. Etse, A. P. Giuliano y M. Rubinstein, “Computational analysis of non linear dynamic behavior of reinforced concrete frames”, *Computational Mechanics: New Trends and Applications* (E. Oñate, S. Idelsohn and E. Dvorkin Eds.) Part II, Section 5, Title 9, CIMNE, IACM, (1998).
- [3] J. S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw Hill, 1968.
- [4] J. M. Canet and A. H. Barbat, *Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Cálculo por ordenador.*, CIMNE, 1988.
- [5] J. Courbon, *Tratado de Resistencia de Materiales II*, Aguiar, 1969