

APROXIMACIÓN NUMÉRICA A LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA NO CLÁSICO DE CONDUCCIÓN DEL CALOR

María C. Sanziel

Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario (CIUNR)

Inst. de Matemática “B.Levi”, Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250
2000 Rosario, Argentina
e-mail: sanziel@fceia.unr.edu.ar

Key words: Conducción del calor, Problema no-clásico, Análisis Numérico

Resumen. *La modelización de sistemas de regulación de temperatura en medios isotrópicos puede realizarse a través del denominado "problema del termostato". Este es un problema no-clásico de conducción del calor en el que aparece un término fuente, que determina un efecto de calentamiento o de enfriamiento. Se sabe que, bajo determinadas condiciones para los datos, la solución del problema tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Más aún, tiende a cero más rápidamente que la solución de un problema similar sin término fuente. En el presente trabajo se aborda la simulación numérica del problema del termostato. Utilizando el método de líneas, se verifican los resultados obtenidos analíticamente y se obtienen resultados similares para otras condiciones de la fuente y del dato inicial.*

1 INTRODUCCIÓN

Se considera el siguiente problema no-clásico de conducción del calor:

$$\begin{aligned}
 & u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = -F(u_x(0, t)) \quad x > 0 \quad t > 0 \\
 \text{(P)} \quad & u(0, t) = 0 \quad t > 0 \\
 & u(x, 0) = h(x) \quad x > 0
 \end{aligned}$$

Este tipo de problema aparece en la modelización de sistemas de regulación de temperatura en medios isotrópicos. Se lo suele denominar *problema del termostato*.

El término fuente, $-F(u_x(0, t))$, determina un efecto de calentamiento o de enfriamiento, según sean las propiedades de F , relacionadas con la evolución del flujo de calor $u_x(0, t)$.

Con hipótesis adecuadas, se demuestra la existencia de solución, así como la unicidad y dependencia continua de dicha solución respecto de los datos^{1, 2}.

Se supone que la función F , llamada *función de control*, satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad & v F(v) \geq 0 \\
 \text{(B)} \quad & F(0) = 0
 \end{aligned}$$

las que intuitivamente significan que el control tiende a estabilizar el proceso en todo tiempo.

Bajo estas hipótesis (A) y (B) para la función F , y suponiendo además que la temperatura inicial h es no negativa, resulta que la solución $u(x, t)$ del problema (P) tiende a cero cuando el tiempo t tiende a infinito^{1, 2}.

Por otra parte, si se designa con $u_0(x, t)$ a la solución del problema (P) en ausencia del control F , se han probado los siguientes resultados que comparan la velocidad con la que las soluciones $u(x, t)$ y $u_0(x, t)$ se aproximan a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ³:

Lema : Si $F(v) = \lambda v$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{u_0(x, t)} = 0 \tag{1.1}$$

Más aún, valen las siguientes estimaciones

$$\frac{1}{\pi \lambda^2 t} \leq \frac{u(x, t)}{u_0(x, t)} \leq \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi t}} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.2}$$

Teorema : Si $F(v) = \lambda v$ (con $\lambda > 0$) y $h(x) \equiv h_0 > 0$, entonces:

$$i) \quad u(x, t) = h_0 \exp(\lambda^2 t) \left[\operatorname{erfc}(\lambda \sqrt{t}) - \exp(\lambda x) \operatorname{erfc}\left(\lambda \sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right] \tag{1.3}$$

$$\text{ii) } \frac{u(x,t)}{u_0(x,t)} \approx 1/(2\lambda^2 t) \quad (1.4)$$

cuando $t \rightarrow \infty$, uniformemente en $x > 0$.

Teorema : Si la función F es una función continua que verifica

$$(A) \quad v F(v) \geq 0 \quad (1.5)$$

$$(B) \quad F(0) = 0 \quad (1.6)$$

$$(C) \quad F \text{ convexa en } (0, +\infty) \quad (1.7)$$

$$(D) \quad F'(0^+) = \lambda \quad (1.8)$$

entonces la solución del problema **(P)** con $h(x) \equiv h_0$, $x > 0$, satisface el siguiente comportamiento asintótico

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x,t)}{u_0(x,t)} = 0. \quad (1.9)$$

En el presente trabajo se aborda la simulación numérica del problema del termostato, verificándose los resultados obtenidos analíticamente y obteniéndose resultados similares para otras diferentes condiciones de la fuente y del dato inicial.

2 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

Para aproximar numéricamente el problema **(P)** se considera el siguiente problema no-clásico de conducción del calor planteado en un dominio acotado, el que se designará por **(P_L)**

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = -F(u_x(0,t)) \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$u(0,t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$u_x(L,t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$u(x,0) = h(x) \quad x > 0 \quad (2.4)$$

Para obtener la solución aproximada del problema **(P_L)** se utiliza el llamado *método de líneas*^{4,5}.

Se realiza una discretización en el espacio del problema, manteniendo continua la variable temporal.

$$\text{Sea } n \quad \Delta x = \frac{L}{N} \text{ el paso espacial, } x_i = i \Delta x, \quad U_i(t) \equiv u(x_i, t), i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

La ecuación (2.1) se expresa por:

$$\frac{\partial U_i(t)}{\partial t} = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{\Delta x^2} - F\left(\frac{U_i}{\Delta x}\right) \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

en tanto que las condiciones (2.2), (2.3) y (2.4) se traducen respectivamente en:

$$U_0(t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.6)$$

$$U_N(t) = U_{N-1}(t) \quad t > 0 \quad (2.7)$$

$$U_i(0) = h(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

se obtiene entonces el siguiente sistema matricial de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\mathbf{V}' = \mathbf{M} \mathbf{V} + \mathbf{S} \quad (2.9)$$

donde

$$\mathbf{V} = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N-1}(t))^T \quad \mathbf{S} = -F\left(\frac{U_i(t)}{\Delta x}\right)\mathbf{e} \quad \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$$

son vectores N-1 dimensionales y M es la matriz cuadrada de dimensión N-1

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Para resolver el sistema (2.4) se aplica un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden. Los programas se escriben usando el software matemático MATLAB. Los resultados obtenidos se muestran gráficamente en la siguiente sección.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1 Comparación con la solución exacta

A fin de testear la bondad del método empleado, en la Figura N° 1 se ha representado con línea verde la solución exacta presentada en la ecuación (1.3) y con línea azul la solución del problema (\mathbf{P}_L) obtenida con el método de líneas, para 5 líneas de tiempo: 10 seg, 20 seg, 30 seg, 40 seg y 50 seg.

Se supone

$$h(x) \equiv h_0 = 10^\circ, \quad F(v) = \lambda v \text{ con } \lambda = 1, \quad \Delta t = 0.1 \text{ seg.}, \quad \Delta x = 0.5 \text{ m}$$

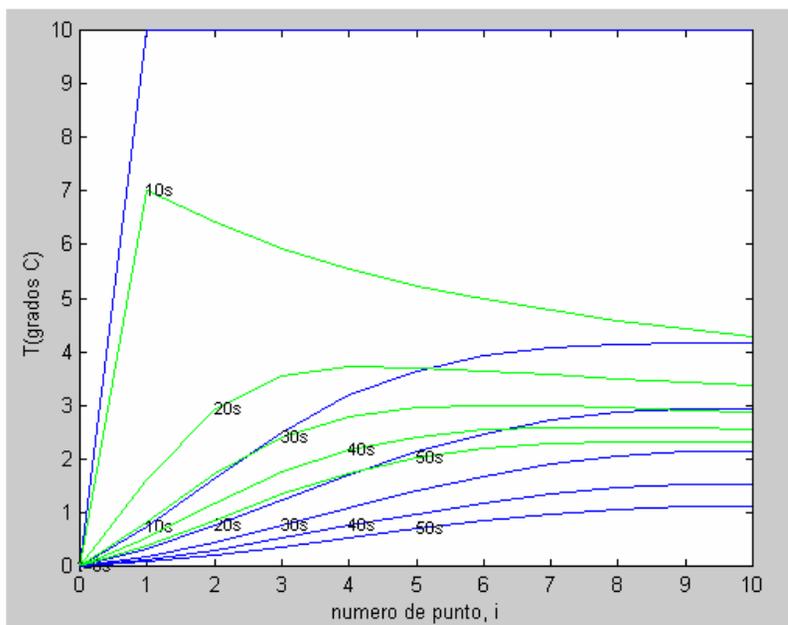


Figura N° 1

3.2 Problema con fuente de calor lineal y temperatura inicial constante

En la figura N° 2 se ha representado el cociente $\frac{U_N^\lambda}{U_N^0}$ en función del tiempo t . Se designa

con $\mathbf{U}^\lambda = (U_0^\lambda, U_1^\lambda, \dots, U_N^\lambda)$ a la solución del problema (\mathbf{P}_L) con $F(v) = \lambda v$ y con \mathbf{U}^0 a la solución del problema (\mathbf{P}_L) con $F(v) = 0$. Se considera la temperatura inicial constante $h(x) \equiv 10^\circ$. Con línea azul se ha dibujado la gráfica para $\lambda = 0.5$ y con línea roja la gráfica para $\lambda = 2.5$.

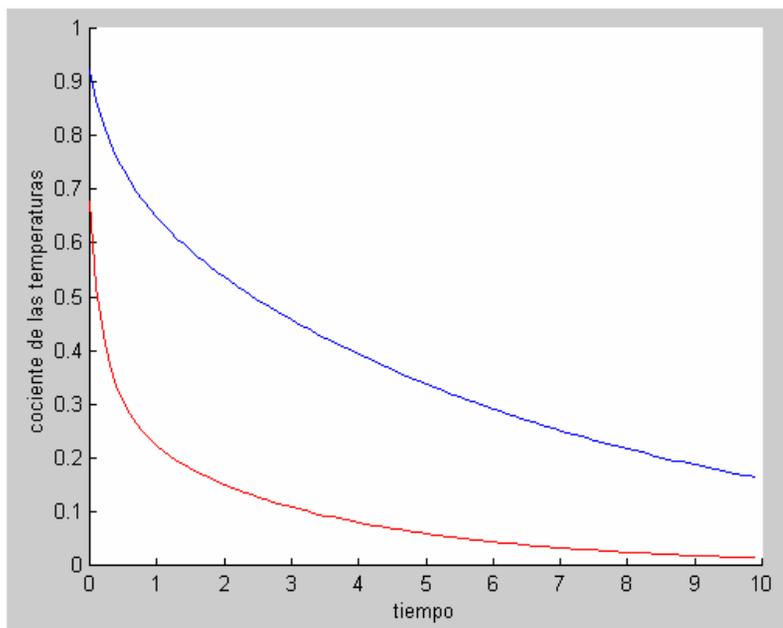


Figura N° 2

En la Figura N° 3 se presentan soluciones del problema (\mathbf{P}_L) considerando un término fuente lineal, es decir $F(v) = \lambda v$ y la temperatura inicial $h(x) \equiv 10^\circ$. Con línea verde se dibuja la solución con $\lambda = 0$, con línea azul la solución con $\lambda = 0.5$ y con línea roja la solución con $\lambda = 2.5$, para 5 líneas de tiempo: 10 seg, 20 seg, 30 seg, 40 seg y 50 seg.

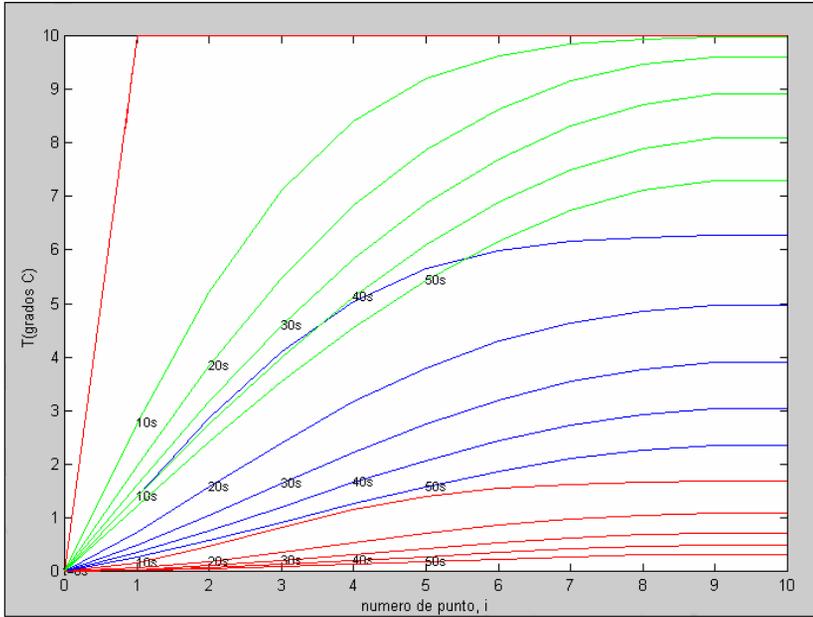


Figura N° 3

3.2 Problema con fuente de calor no-lineal

En la Figura N° 4 se presentan las gráficas de las soluciones del problema (P_L) suponiendo una temperatura inicial variable, $h(x) = 10x$. Con línea verde se presenta la solución del problema sin fuente de calor y con línea azul la solución del problema con fuente de calor de la forma $F(v) = v^3$.

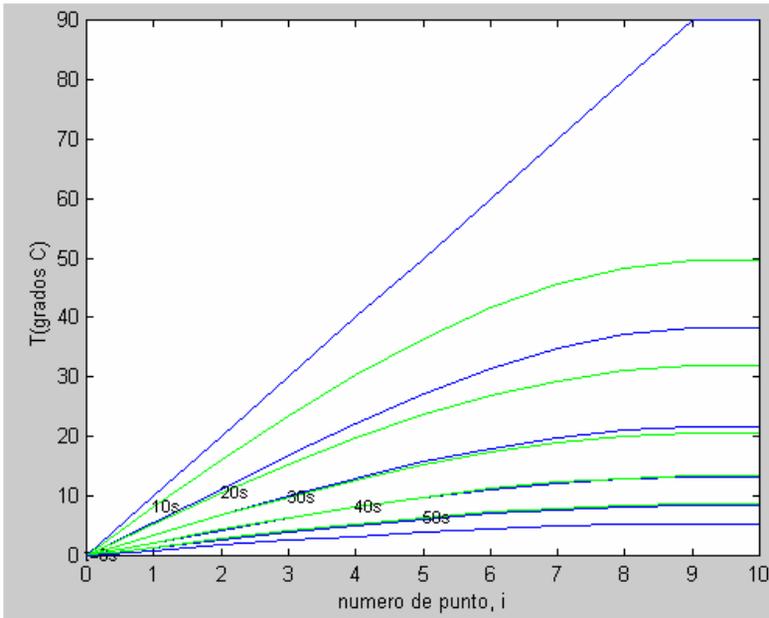


Figura Nº 4

4 CONCLUSIONES

Se ha simulado numéricamente el problema del termostato para el caso unidimensional, empleando el *método de líneas*.

Los resultados obtenidos ratifican las propiedades demostradas analíticamente, en los casos en que los datos verifican las hipótesis utilizadas para las demostraciones.

La simulación permite observar el comportamiento de las soluciones para aquellos casos en los que no se tienen resultados analíticos, pudiendo así adecuar el término que representa a la fuente de calor para lograr que la solución se aproxime a cero en el tiempo deseado.

REFERENCIAS

- [1] L.T. Villa, "Problemas de control para una ecuación unidimensional del calor", *Rev. Un. Mat. Argentina*, **32**, 166-169 (1986)
- [2] D.A. Tarzia y L.T. Villa, "Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non uniform heat source", *Rev. Un. Mat. Argentina*, **41**, 99-114 (1998)

- [3] L.R. Berrone, D.A. Tarzia y L.T. Villa, "Asymptotic behaviour of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material", *Math. Meth. Appl. Sci.*, **23**, 1161-1177 (2000)
- [4] H. O. Kreiss y H.U. Busenhardt, *Time-dependent partial differential equations and their numerical solution*, Birkhäuser Verlag, (2000)
- [5] S. Nakamura, "*Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab*", Prentice Hall Hispanoamericana S.A. (1996).