

DEFINICIÓN DE MALLA ÓPTIMA EN REFINAMIENTO H-ADAPTATIVO PARA MÚLTIPLES CASOS DE CARGA

Francisco J. Fuenmayor^{*}, Félix O. Payares[†]

^{*} Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (ETSII)
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España
e-mail: ffuenmay@mcm.upv.es

[†] Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Oriente (UDO)
Av. Alternativa Barcelona – Pto. La Cruz. Pto. La Cruz, Anzoátegui, Venezuela.
e-mail: fpayares@upvnet.upv.es

Palabras clave: Estimación de error, malla óptima, refinamiento h-adaptativo.

Resumen. *En el análisis mediante el método de los elementos finitos (MEF) de componentes estructurales bajo condiciones de carga múltiple, estas son estudiadas por separadas con el fin de obtener la respuesta estructural individual de cada una de las ellas. En un proceso de análisis h-adaptativo estándar se generarían mallas diferentes con cada una de las cargas aplicadas y por lo tanto sería necesario un análisis extenso para obtención de la matriz de rigidez de cada caso. Una solución a este planteamiento se fundamenta en obtener una malla que pueda ser utilizada para todos los casos y que a su vez permita al usuario alcanzar el error deseado.*

En este trabajo se describe un procedimiento práctico que permite obtener la malla óptima en problemas de refinamiento estáticos lineales para casos de carga múltiple, considerando las relaciones de tamaño de los elementos y las expresiones que relacionan los errores estimados entre mallas sucesivas. El método propuestos es validado numéricamente a través de ejemplos bidimensionales

1 INTRODUCCIÓN

En el análisis de problemas en ingeniería estructural es frecuente encontrar casos en los cuales cada uno de los componentes de un sistema esta sometido a múltiples condiciones de carga. Cuando el estudio se hace por el método de los elementos finitos (*MEF*), estas cargas son separadas en diferentes casos para obtener la respuesta estructural individual de cada una de ellas. En un análisis lineal esto implicaría un pequeño incremento en el costo computacional debido al hecho de que la misma malla de elementos finitos puede ser usada para todos los casos de carga. Sin embargo, en un proceso de análisis *h*-adaptativo estándar se generarían mallas diferentes con cada una de las cargas aplicadas y por lo tanto sería necesario un análisis extenso para la obtención de la matriz de rigidez de cada caso. Una solución a este planteamiento se fundamenta en obtener una malla que pueda ser utilizada para todos los casos y que a su vez permita al usuario alcanzar el error de deseado.

El tema de la adaptatividad de la malla en las soluciones del método de los elementos finitos ha sido tratado ampliamente en los últimos años y se han desarrollado procedimientos de generación de mallas óptimas para un caso de carga en problemas estáticos [1,2] que hoy en día se emplean como herramientas prácticas. La idea básica de estos procedimientos consiste en generar mallas óptimas aplicando iterativamente criterios de distribución uniforme del error de discretización, [3] o técnicas que buscan minimizar el número de grados de libertad en la nueva malla. Pero, aunque los criterios de adaptatividad están bien definidos cuando se considera un caso de carga estático, no ocurre lo mismo cuando se consideran varios casos de carga [4].

En este trabajo se describe un procedimiento práctico que permite obtener la malla óptima en problemas de refinamiento estáticos lineales para múltiples casos de carga a partir de las relaciones de tamaño de los elementos y las expresiones que relacionan los errores estimados entre mallas sucesivas.

Antes de la descripción del procedimiento se presenta una revisión de los conceptos de estimación del error de discretización, efectividad del estimador del error y definición del proceso *h*-adaptativo, los cuales forman parte fundamental de los pasos previos a la aplicación del procedimiento desarrollado. Una vez explicado el proceso de obtención de la malla óptima, se presentan los resultados de un ejemplo seleccionado para mostrar la validación numérica de la formulación desarrollada.

2 ESTIMACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

Existen algunos procedimientos que permiten hacer una estimación del error para determinar la calidad de la solución de elementos finitos, uno de estos es el estimador de error Zienkiewicz-Zhu [5] basado en la mejora de la solución del *MEF*. Este estimador se fundamenta en utilizar dentro de la expresión del error en la norma energética, un campo de tensiones mejorado obtenido a partir del campo de tensiones del *MEF*. A partir del estimador de Zienkiewicz-Zhu se puede obtener la norma energética del error estimado, $\|e_{es}\|$, como

$$\|\mathbf{e}_{es}\|^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) d\Omega \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^*$ y $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$ representan los campos de tensiones mejorado y de elementos finitos, respectivamente. La matriz \mathbf{D} corresponde a las constantes elásticas.

El error estimado relativo, η_{es} , se obtiene a partir de la relación

$$\eta_{es} = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{u}_{es}\|} \cdot 100 \quad (2)$$

donde $\|\mathbf{u}_{es}\|^2$ es una estimación de la energía de deformación que se puede obtener aprovechando las propiedades de la norma energética

$$\|\mathbf{u}_{es}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 + \|\mathbf{e}_{es}\|^2 \quad (3)$$

siendo $\|\mathbf{u}_{ef}\|^2$ la energía de deformación de la solución del *MEF*.

A nivel de elemento se puede definir el error estimado relativo global como

$$\eta_{es}^{(e)} = \frac{\|\mathbf{e}_{es}^{(e)}\|}{\|\mathbf{u}_{es}\|} 100 \quad (4)$$

donde el superíndice (*e*) indica que la magnitud correspondiente se ha calculado en el elemento.

Para estudiar la fiabilidad de los estimadores del error se define el índice de efectividad, θ , como la relación entre los valores del error estimado y el error exacto

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{e}_{ex}\|} \quad (5)$$

El estimador del error se dice que es asintóticamente exacto si el índice de efectividad tiende a la unidad cuando el tamaño de los elementos tiende a cero [6]. Sin embargo, si el índice de efectividad tiende a un valor estable diferente de la unidad, es posible definir un factor de corrección, para el estimador, que mejore la calidad de la estimación. En los casos donde la solución exacta no es conocida esta se sustituye por una solución aproximada, obtenida a partir de una malla altamente refinada.

3 CONVERGENCIA EN EL PROCESO H-ADAPTATIVO

En el tema de la adaptatividad de la malla en problemas estáticos con un caso de carga, los criterios de definición de la malla óptima están ampliamente estudiados. A partir de ellos se han desarrollado procedimientos fundamentados básicamente en generar mallas óptimas aplicando iterativamente criterios de distribución uniforme del error de discretización, o mediante técnicas que buscan minimizar el número de grados de libertad en la nueva malla. Sin embargo, aún cuando lo anterior define lo bien establecido del refinamiento para problemas con un caso de carga no ocurre lo mismo cuando se consideran múltiples casos de

carga.

Cuando se considera una secuencia de mallas obtenidas a partir de un refinamiento h uniforme, el error exacto en la norma energética para cada caso de carga i en problemas $2D$, está acotado por

$$\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \| \leq C_{(i)} (h)^{\min(p,\mu)} \approx C_{(i)} (N)^{-\frac{1}{2}\min(p,\mu)} \quad (6)$$

siendo $\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \|$ el error exacto para el caso considerado, N es el número de grados de libertad, h el tamaño del elemento, p el grado del polinomio de la función de interpolación usada, $C_{(i)}$ es una constante positiva, y μ es una constante positiva que representa la intensidad de las singularidades. El exponente de N , se conoce con el nombre de velocidad asintótica de convergencia y depende de la malla de elementos finitos y de la suavidad de la solución.

Cuando la secuencia de mallas se obtiene de forma que el error absoluto se distribuye aproximadamente igual sobre los elementos, entonces se dice que la malla es casi óptima para el caso considerado y el error exacto está acotado por

$$\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \| \leq C_{(i)} (N)^{\frac{1}{2}p} \quad (7)$$

Dado que la constante $C_{(i)}$ es independiente de h , N y p , se puede establecer una relación aproximada entre los errores globales para un caso de carga y los grados de libertad o el tamaño de los elementos, correspondientes, para dos mallas sucesivas del refinamiento uniforme

$$\frac{\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \|_p}{\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \|_n} \approx \left[\frac{h_p}{h_{n(i)}} \right]^c \quad (8)$$

siendo $\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \|_p$ y $\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)} \|_n$ los errores globales en las mallas previa y nueva, respectivamente, h_p es el tamaño del elemento en la malla previa, $h_{n(i)}$ el nuevo tamaño del elemento, y $c = \min(p, \mu)$. En el desarrollo de las estrategias de refinamiento se supone que el valor de c es siempre igual a p , siempre y cuando no existan singularidades, y en caso de presentarse es aproximadamente cierto si el refinamiento se realiza en forma adaptativa.

Asumiendo que la ley de convergencia es también válida a nivel de elemento se tiene

$$\frac{\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)}^{(e)} \|_p}{\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)}^{(e)} \|_n} \approx \left(r_{(i)}^{(e)} \right)^c \quad (9)$$

donde $\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)}^{(e)} \|_p$ es el error exacto para un elemento de la malla previa, $\| \mathbf{e}_{\text{ex}(i)}^{(e)} \|_n$ el error total de todos los elementos nuevos contenidos en un elemento de la malla previa y $r_{(i)}^{(e)}$ la relación entre el tamaño previo del elemento y el tamaño nuevo, definido por

$$r_{(i)}^{(e)} = \frac{h_p^{(e)}}{h_{n(i)}^{(e)}} \quad (10)$$

El error total de todos los elementos nuevos contenidos en un elemento de la malla previa, $\|e_{ex(i)}^{(e)}\|_n$, está relacionado con los errores de cada uno de los nuevos elementos por la expresión

$$\|e_{ex(i)}^{(e)}\|_n^2 = \sum_{e=1}^{N_{n(i)}^{(e)p}} \|e_{ex(i)}^{(e)}\|_n^2 \quad (11)$$

siendo $\|e_{ex(i)}^{(e)}\|_n$ el error en un elemento de la malla nueva malla contenido en un elemento de la malla previa, y $N_{n(i)}^{(e)p}$, el número de elementos nuevos contenidos dentro de un elemento de la malla previa.

Reordenando los términos de la ecuación (9) la relación de convergencia a nivel de elemento viene dada por

$$\|e_{ex(i)}^{(e)p}\|_n = \|e_{ex(i)}^{(e)}\|_p \cdot (r_{(i)}^{(e)})^{-c} \quad (12)$$

Como los errores exactos no se conocen, en adelante se utilizarán los errores estimados y se asumirá que las relaciones previas sobre convergencia global, y a nivel de elemento, se cumplen también para los errores estimados.

Si se considera un refinamiento uniforme a nivel de elemento, el tamaño nuevo de los elementos que están contenidos en un elemento de la malla previa, $h_{p(i)}^{(e)}$, está definido como

$$(h_{p(i)}^{(e)})^2 \approx (h_{n(i)}^{(e)})^2 \cdot N_{n(i)}^{(e)p} \quad (13)$$

siendo $h_{n(i)}^{(e)}$ el tamaño nuevo de los elementos que están contenidos en un elemento previo y $N_{n(i)}^{(e)p}$ el número de elementos nuevos contenidos en un elemento de la malla previa.

El número de elementos nuevos con tamaño $h_{n(i)}^{(e)p}$ que están contenidos en un elemento previo, para un problema en dos dimensiones se puede expresar como

$$N_{n(i)}^{(e)p} \approx (r_{(i)}^{(e)})^2 \quad (14)$$

El número total de elementos en la nueva malla es la suma de elementos nuevos en todos los elementos de la malla previa

$$N_{n(i)} = \sum_{e=1}^{N_p} N_{n(i)}^{(e)p} \approx \sum_{e=1}^{N_p} (r_{(i)}^{(e)})^2 \quad (15)$$

donde N_p , es el número de elementos de la malla previa.

También es posible expresar el número total de elementos de la nueva malla en función de los elementos de la malla previa si se considera que a nivel global y para un refinamiento

uniforme, la relación entre el número de elementos es inversamente proporcional a la relación de tamaños (al cuadrado para problemas en dos dimensiones)

$$\frac{N_{n(i)}}{N_p} \approx \left[\frac{h_p}{h_{n(i)}} \right]^2 \quad (16)$$

y substituyendo la relación de tamaños de la ecuación (8), obtenida con base a la ley de convergencia a nivel global, se tiene

$$N_{n(i)} \approx N_p \left[\frac{\| \mathbf{e}_{es(i)} \|_p}{\| \mathbf{e}^{(i)} \|_d} \right]^{2/c} \quad (17)$$

El error absoluto estimado en la nueva malla se puede expresar en función de los errores en cada uno de los nuevos elementos como

$$\| \mathbf{e}_{es(i)} \|_n^2 = \sum_{e=1}^{N_n} \| \mathbf{e}_{es(i)}^{(e)} \|_n^2 \quad (18)$$

o utilizando la ecuación (11), se puede expresar también como

$$\| \mathbf{e}_{es(i)} \|_n^2 = \sum_{e=1}^{N_p} \| \mathbf{e}_{es(i)}^{(e)p} \|_n^2 \quad (19)$$

Reemplazando el valor de $\| \mathbf{e}_{es(i)}^{(e)p} \|_n$, de la ley de convergencia a nivel de elemento, ecuación (12), se obtiene el error absoluto estimado previsto para la nueva malla en función de la relación de tamaños.

$$\| \mathbf{e}_{es(i)} \|_n^2 = \sum_{e=1}^{N_p} \left(\| \mathbf{e}_{es(i)}^{(e)} \|_p^2 \cdot (r_{(i)}^{(e)})^{-2c} \right) \quad (20)$$

4 CRITERIO DE MALLA ÓPTIMA

Una malla de elementos finitos es óptima si se obtiene como resultado de aplicar ciertos criterios preestablecidos de forma que en su solución se logren los valores de error determinados previamente. Partiendo de diferentes criterios se pueden elaborar diferentes estrategias o procedimientos para obtener una malla óptima resultando que una malla que es óptima bajo ciertos criterios puede no serlo para otros.

4.1 Malla óptima para un caso de carga

El criterio tradicionalmente usado en problemas de elasticidad para un caso de análisis, (un caso de carga en el problema estático), es el de distribuir uniformemente la energía del error en la malla y esto se ha hecho de diferentes formas (considerando la malla previa o la nueva, utilizando, bien sea, el error relativo o el error absoluto). En trabajos recientes se ha demostrado que si se distribuye la energía absoluta del error en la nueva malla el resultado

que se obtiene es equivalente a minimizar el número de elementos en la nueva malla [7, 8].

Partiendo de una distribución uniforme de la energía en la nueva malla el error estimado para cada uno de sus elementos estará definido por

$$\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)} \right\|_n^2 = \frac{\left\| \mathbf{e}_{(i)} \right\|_d^2}{N_{n(i)}} \quad (21)$$

y siendo constante el valor de la energía del error en el elemento de la nueva malla, la ecuación (11) puede escribirse como

$$\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)p} \right\|_n^2 = N_{n(i)}^{(e)p} \cdot \left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)} \right\|_n^2 \quad (22)$$

substituyendo la ecuación (21) en la ecuación (22) se tiene

$$\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)p} \right\|_n^2 = N_{n(i)}^{(e)p} \cdot \frac{\left\| \mathbf{e}_{(i)} \right\|_d^2}{N_{n(i)}} \quad (23)$$

El número de elementos nuevos en la malla y en un elemento previo, $N_{n(i)}$, $N_{n(i)}^{(e)p}$ respectivamente, se han definido en las ecuaciones (14) y (17) y haciendo la substitución correspondiente en la ecuación (23) se llega a la relación

$$\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)p} \right\|_n^2 = \left(r_{(i)}^{(e)} \right)^2 \cdot \frac{\left\| \mathbf{e}_{(i)} \right\|_d^2}{N_p \left[\frac{\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)} \right\|_p}{\left\| \mathbf{e}_{(i)} \right\|_d} \right]^{2/c}} \quad (24)$$

Finalmente, substituyendo el valor de $\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)p} \right\|_n$ en la ley de convergencia a nivel de elemento, ecuación (12), y resolviendo para la relación de tamaños, se obtiene:

$$r_{(i)}^{(e)} = \left[\frac{\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)} \right\|_p}{\left\| \mathbf{e}_{(i)} \right\|_d} \right]^{1/c} \cdot \left(N_p \right)^{1/2(c+1)} \cdot \left[\frac{\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)} \right\|_p}{\left\| \mathbf{e}_{\text{es}(i)}^{(e)} \right\|_p} \right]^{1/c(c+1)} \quad (25)$$

Una vez conocido el valor de la relación de tamaños para todos los elementos, los nuevos tamaños se encuentran directamente utilizando la ecuación (10).

4.2 Malla óptima para varios casos de carga

La ecuación (25) define la malla óptima para cada caso de carga, pero naturalmente, la malla que es óptima para un caso no tiene que serlo para los demás, esto se ilustra en la figura 1 donde se muestra el comportamiento del error relativo estimado en función del número de elementos para dos casos de carga. Las líneas A_1-B_1 y A_2-B_2 representan la relación entre los errores y el número de elementos para las mallas óptimas de cada caso de carga. Las

pendientes de estas líneas representan las máximas velocidades de convergencia que se pueden tener considerando cada caso en forma aislada.

La malla óptima considerando sólo el caso de carga 1, *CC1*, permite reducir el error para dicho caso, siguiendo la línea A_1-B_1 y en el punto C_1 se tendría un error igual al deseado con un número de elementos igual a $N_{n(1)}$. El error para el *CC2* no se ha controlado y corresponderá a un punto D_2 por encima de la línea A_2-B_2 de máxima convergencia. Igual que para el caso anterior, si se refina considerando el *CC2* el resultado es análogo.

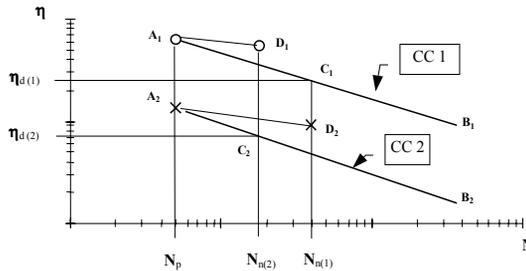


Figura 1. Velocidad máxima de convergencia del error para varios casos de carga.

Cuando se consideran más de dos casos de carga, es posible que la malla óptima para la combinación de todos los casos se pueda obtener sin considerar algunos de ellos, es decir que al refinar la malla considerando algunos casos, los errores para los restantes casos estén por debajo de los valores deseados. Esto se puede comprender mejor si se analiza la situación para dos casos de carga.

Cuando se quiere determinar la malla óptima considerando dos casos de carga pueden presentarse dos situaciones dependiendo de que esta coincida o no con la malla óptima de uno de los casos considerado aisladamente.

En el caso de coincida es posible que al refinar teniendo en cuenta sólo un caso de carga, se tenga un error estimado para el otro caso, menor o igual que el deseado. En la figura 2 se representa esta situación. Al refinar con el *CCI* se obtiene la malla óptima en el punto C_1 , el número de elementos, en estas condiciones es $N_{n(1)}$, y el error estimado para el *CC2* esta representado por el punto D_2 , y aunque no se haya tenido en cuenta a *CC2* para el refinamiento, se satisface la condición de que el error sea menor o igual que el deseado. Obsérvese que si se trata de conseguir un error estimado en el caso dos igual a $\eta_{d(2)}$ manteniendo el error estimado en el caso uno igual a $\eta_{d(1)}$ esto se conseguiría en los puntos E_1 y E_2 incrementándose el número de elementos.

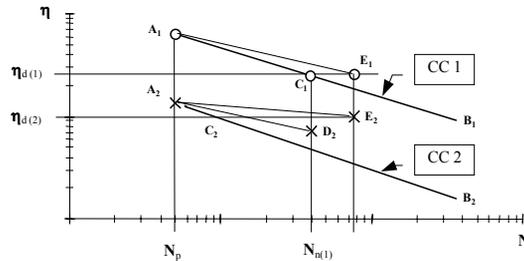


Figura 2. Malla óptima para dos casos que coinciden con la malla óptima de uno de los casos considerado aisladamente.

En el caso más general, la malla óptima para la combinación no coincide con las mallas óptimas de ninguno de los casos refinados independientemente figura 3. La malla de N_n elementos permite obtener errores relativos estimados iguales a los deseados en los puntos E_1 y E_2 para los casos uno y dos respectivamente. Las pendientes de las líneas A_1-E_1 y A_2-E_2 son menores que las máximas pendientes de los errores en los casos considerados aisladamente, líneas A_1-B_1 , y A_2-B_2 .

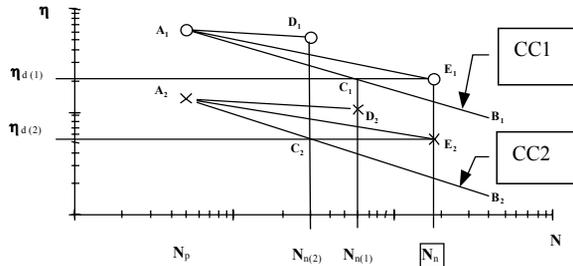


Figura 3. Malla óptima para dos casos de carga que no coincide con las mallas óptimas de los casos considerados aisladamente.

Un criterio utilizado en la práctica para definir el refinamiento con varios casos de carga consiste en calcular la relación de tamaño local considerando aisladamente cada caso y luego tomar el valor máximo

$$r^{(e)} = \max(r_i^{(e)}) \quad (26)$$

donde en este caso $r^{(e)}$ corresponde a la relación de tamaño de elemento para la malla nueva. Aún cuando este es un método práctico que permite superar los valores preestablecidos, presenta la desventaja de que estos valores van más allá de los errores deseados aumentando innecesariamente el tiempo de computación. Esto se debe principalmente a que una malla con estas características estaría refinando elementos con relaciones de tamaño más grande que las necesarias para el caso de carga considerado.

Una solución a este planteamiento consiste en acotar el tamaño de los elementos, derivados de la ecuación (20), con un factor obtenido a partir de los valores deseados para la malla nueva. Introduciendo este factor, la ecuación (20) queda expresada como

$$\|e_{es(i)}\|_n^2 = \sum_{e=1}^{N_p} \left(\|e_{es(i)}\|_p^2 \cdot (\rho_{(i)} r_{(i)}^{(e)})^{-2c} \right) \tag{27}$$

donde $\rho_{(i)}$ corresponde al factor de corrección de relación de tamaño para cada caso de carga. Resolviendo para $\rho_{(i)}$, se tiene

$$\rho_{(i)} = \left[\frac{\sum_{e=1}^{N_p} \left(\|e_{es(i)}\|_p^2 \cdot (r_{(i)}^{(e)})^{-2c} \right)}{\|e_{es(i)}\|_n^2} \right]^{-2c} \tag{28}$$

De los valores obtenidos de la ecuación (28) se toma el máximo y el criterio para definir la malla óptima se puede expresar como

$$r_{opt}^{(e)} = \rho_{max} \cdot r^{(e)} \tag{29}$$

donde $r_{opt}^{(e)}$ representa la relación de tamaño óptimo del elemento, los nuevos tamaños de elementos para la malla nueva se obtienen a partir de

$$h_n^{(e)} = \frac{h_p^{(e)}}{r_{opt}^{(e)}} \tag{30}$$

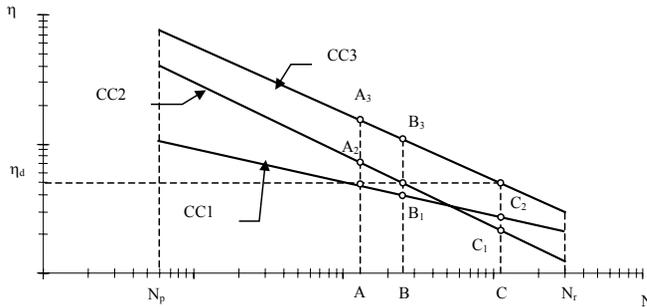


Figura 4. Malla óptima para los tres casos de carga

En la figura (4) se observa la relación entre el error relativo y el número de elementos en un proceso de refinamiento para 3 casos de carga, la líneas a trazos N_p y N_r indican el número de elementos en la malla previa y una malla con una relación de tamaño de elemento obtenida a partir de la ecuación (27), las líneas A, B y C son obtenidas modificando la relación de

tamaño con los factores de corrección $\rho_{(i)}$ correspondiente a cada caso de carga. Como se observa, los valores alcanzados para un número de elementos igual a N_r están por debajo del valor deseado η_d , aún cuando el valor deseado es alcanzado este se ve superado innecesariamente incrementando el tiempo computacional. En el caso de la línea a trazos A esta se obtiene acotando la relación de tamaños con el factor de corrección $\rho_{(1)}$ del caso de carga 1, $CC1$, en este caso los errores relativos de los casos $CC2$ y $CC3$, puntos A_2 y A_3 respectivamente, no alcanzan el error deseado. Para la línea a trazos B correspondiente al número de elementos obtenidos con una relación de tamaño acotada por el factor de corrección del caso de carga $CC2$, aún cuando el caso $CC1$ logra superar el valor deseado en el punto B_1 , no ocurre lo mismo para el caso $CC3$, punto B_3 . En la línea a trazos C , obtenida con el respectivo factor de acotamiento, se observa que el caso $CC3$ alcanza el valor deseado y que los casos $CC1$ y $CC2$ superan el error deseado con un incremento menor que el obtenido con el número de elementos N_r , puntos C_1 y C_2 respectivamente.

4.3 Desarrollo del procedimiento

En los cálculos precedentes al proceso de refinamiento se estiman los errores en la malla previa para cada uno de los casos de carga (globales y a nivel de elemento) de la solución del *MEF* y se establecen los errores globales deseados para la malla nueva.

La malla óptima con la formulación propuesta se puede obtener a través del siguiente procedimiento

- 1. Calcular el tamaño de elementos considerando cada caso de carga.
- 2. Determinar la relación de tamaño máximo para cada elemento.
- 3. Calcular el factor de corrección de la relación de tamaño de elementos para cada caso de carga.
- 4. Determinar el factor de corrección .
- 5. Calcular la relación de tamaño óptimo del elemento.
- 6. Calcular el tamaño de elemento para la malla nueva.

5 EJEMPLO NUMÉRICO

La formulación propuesta fue validada a través de varios ejemplos en los cuales se logró alcanzar resultados satisfactorios.

En la figura 5 se presentan la geometría y los datos de uno de estos ejemplos. En ella se observa un componente estructural sometido a tres casos de carga.

Para el estudio se han definido cuatro procesos h-adaptativos, tres corresponden a la obtención del error deseado considerando cada caso de carga aisladamente y el cuarto empleando el método de refinamiento propuesto. Para la obtención de las secuencias de mallas, se calculan previamente los errores estimados y los índices de efectividad para todos los casos entre mallas sucesivas.

En el cálculo del índice de efectividad la solución “exacta” se estimó a partir de una malla muy fina de elementos triangulares y con un error estimado menor al 0.5 %. Se estableció como objetivo alcanzar un 5 % de error para los tres casos de carga, ($\eta_{d(1)} = \eta_{d(2)} = \eta_{d(3)}$), en

cuatro etapas.

En el modelo de análisis se utilizan elementos triangulares lineales. La malla inicial se ilustra en la figura 6.

Como resultado se presentan las gráficas del error estimado relativo y de los índices de efectividad del estimador en función de los gdl , figuras 7 a 10. La línea gruesa en las gráficas (excepto figura 10) representa los resultados del caso de carga que esta controlando el proceso de refinamiento y las líneas delgadas los resultados de los casos restantes. La Fig. 11 ilustra, en orden descendente, las secuencias de mallas obtenidas para los tres casos de carga y para el método propuesto. Cada malla representa una etapa del proceso.

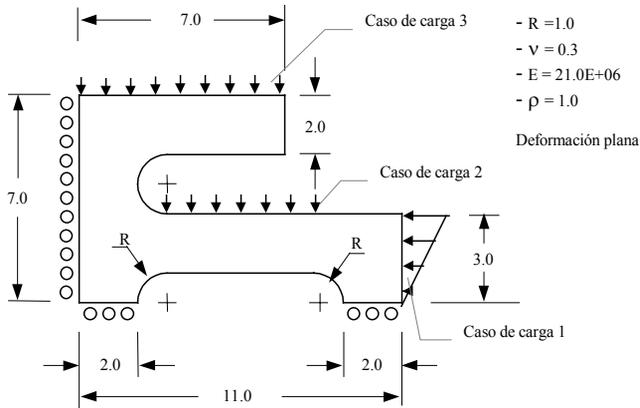


Figura 5. Geometría del ejemplo

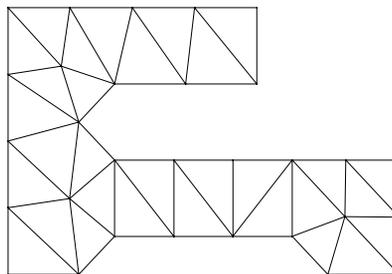


Figura 6. Malla inicial para elementos triangulares lineales .

En las figuras 7,8 y 9 se observa como el error deseado es alcanzado solo por el caso de carga que es considerado para el refinamiento y no así para los casos restantes. El índice de efectividad del estimador tiende a converger a la unidad para el caso considerado. Un detalle a destacar se obtiene de la figura 7, donde con el refinamiento considerando el caso de carga 1 casi logra alcanzar el objetivo para el caso de carga 2. Un comportamiento similar, pero al contrario, se observa en la figura 8. Esto se explica debido a que los casos de carga 1 y 2 tienen influencia sobre la misma área de la estructura (parte inferior), las secuencias de mallas para estos casos de carga, figura 11, ilustran como el refinamiento se va extendiendo sobre esta área en cada etapa, localizando más elementos hacia la zona de influencia de cada carga. La secuencia de mallas para el caso de carga 3 evidencia con claridad el motivo por el cual el refinamiento considerando este caso de carga no permite alcanzar el objetivo para los casos restantes.

De la figura 10 se observa como se consigue el objetivo conjunto de todos los casos empleando el método propuesto en este trabajo. En la secuencia de mallas, correspondiente a este procedimiento, destaca como las mallas obtenidas en cada etapa son producto de la combinación de todas las áreas afectadas por las cargas, observándose como el refinamiento se hace más denso simultáneamente en aquellas zonas donde es requerido.

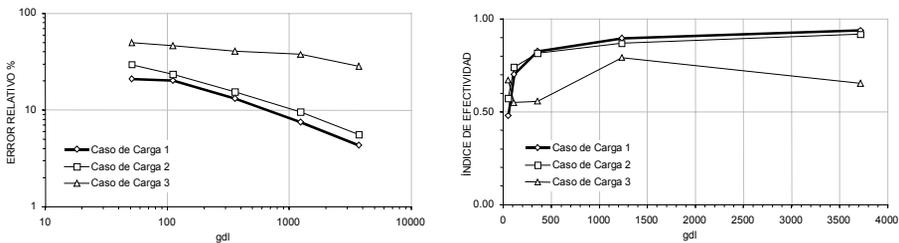


Figura 7. Convergencia e índice de efectividad en función de los gdl para el caso de carga 1

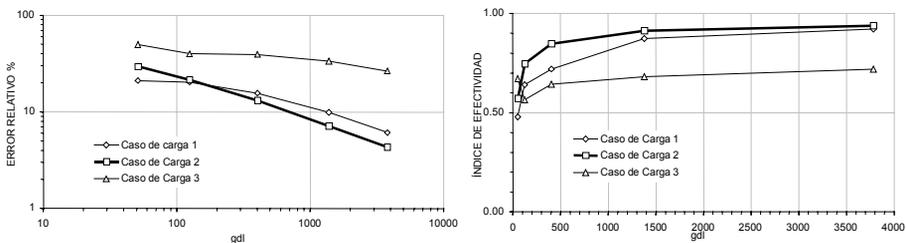


Figura 8. Convergencia e índice de efectividad en función de los gdl para el caso de carga 2

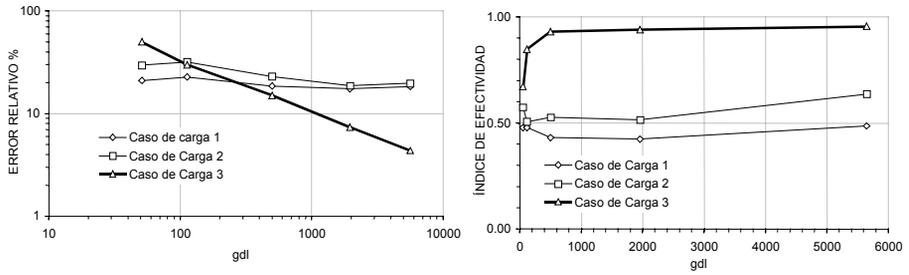


Figura 9. Convergencia e índice de efectividad en función de los gdl para el caso de carga 3

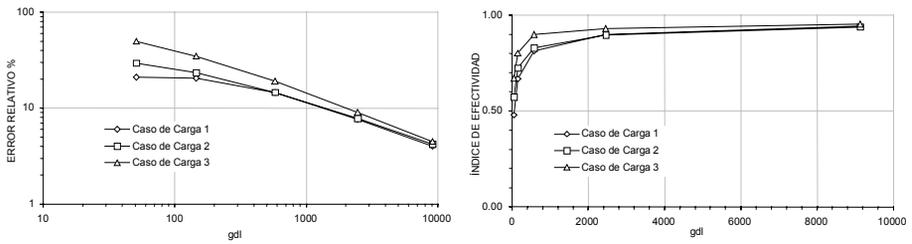


Figura 10. Convergencia e índice de efectividad en función de los gdl generando mallas óptimas

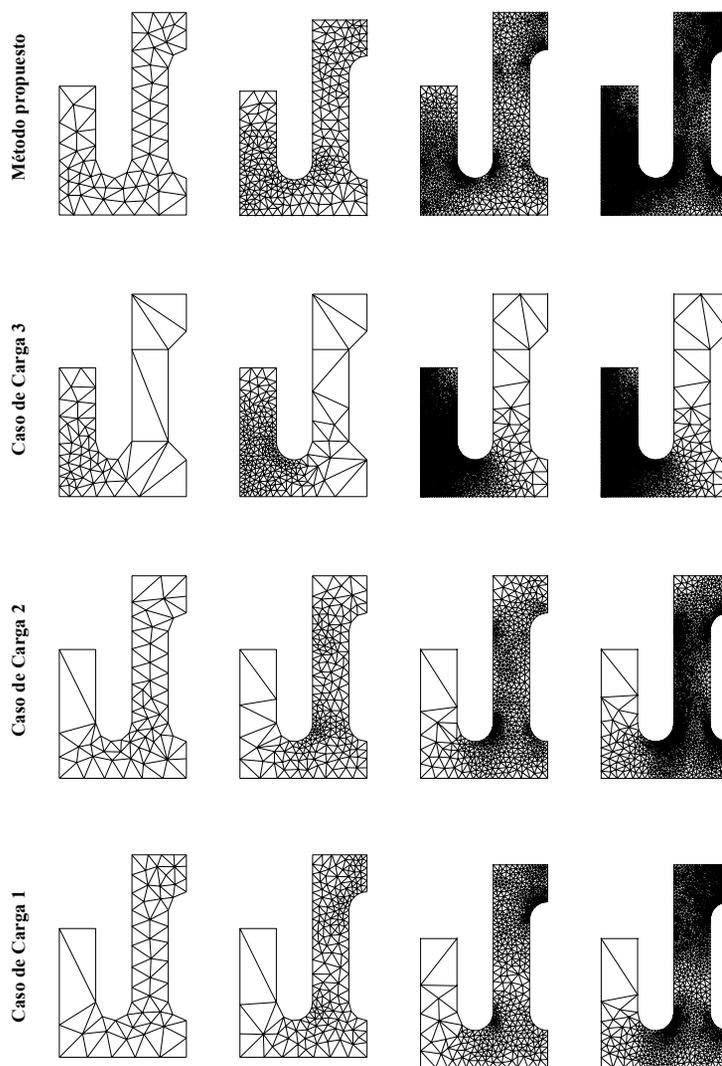


Figura 11. Secuencia de mallas h -adaptativas para elementos lineales

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un método para definir un procedimiento h -adaptativo para resolver problemas estáticos en dos dimensiones con casos de carga múltiple.

El método propuesto se fundamentó en la adaptación del criterio práctico del tamaño mínimo de elementos definido por los diferentes casos de carga, sujeto al concepto de malla óptima. Este esquema permite determinar la malla óptima en procesos h -adaptativos para problemas de cargas múltiples con un número mínimo de elementos, alcanzando a su vez un error menor o igual a un valor preestablecido para todos los casos.

El procedimiento es computacionalmente realizable e integrable dentro del proceso h -adaptativo ya que puede ser intercalado como un módulo entre dos etapas secuenciales del proceso h -adaptativo.

El método propuesto ha sido validado numéricamente de los cuales se ha presentado uno en el presente trabajo.

7 REFERENCIAS

- [1] O.C. Zienkiewicz. y Taylor R L. *El Método de los Elementos Finitos*, McGraw-Hill, Vol. 1, (1994).
- [2] A. Mar y M. Hicks, "A benchmark computational study of finite element error estimation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **39**, 3969-3983, (1996).
- [3] F.J.Fuenmayor y J.L.Oliver, "Criteria to achieve optimal meshes in the h -adaptive finite element method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **39**, 4039-4061, (1996).
- [4] M.S.Shephard, "An algorithm for defining a single near optimun mesh for multipl-load-case problems", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **15**, 617-625, (1980).
- [5] O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "A simple error estimator an adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **36**, 3759-3779, (1993).
- [6] I. Babuska, R. Duran, y R. Rodriguez, "Anaysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular elements" *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**, 947-964, (1992).
- [7] L.Y. Li y P. Bettes, "Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations", *Commun. Numer. Meth. Eng.*, **11**, 911-915, (1995).
- [8] L.Y. Li, P. Bettes, y Y. Applegarth Y., "Theoretical formulations for adaptive finite element computations", *Commun. Numer. Meth. Eng.*, **11**, 857-868, (1995).