

## FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN DE PLACAS CIRCULARES CON UNA MASA ADOSADA

Diana V. Bambill<sup>\*</sup>, Patricio A. A. Laura<sup>\*</sup>, Carlos A. Rossit<sup>\*</sup>, y Samanta J. Escanes<sup>†</sup>

<sup>\*</sup> Instituto de Mecánica Aplicada, Departamento de Ingeniería y Departamento de Física,  
Universidad Nacional del Sur,  
Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina  
e-mail: dbambill@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar>

<sup>†</sup> Departamento de Ingeniería,  
Universidad Nacional del Sur  
Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina

**Key words:** Circular plates, Vibrations, Concentrated masses

**Resumen.** *El estudio dinámico de elementos estructurales con presencia de masas adosadas asume gran interés por su variada gama de aplicaciones tecnológicas baste como ejemplo el caso de maquinarias apoyadas sobre losas. En el presente trabajo, se determina la frecuencia fundamental de vibración de placas delgadas circulares simplemente apoyadas y con vinculación elástica a rotación en su contorno, a las que se encuentra rígidamente adosada una masa considerada puntual en una ubicación genérica. Es de interés destacar el hecho de que en el caso de placas circulares con una masa puntual la solución analítica exacta con funciones de Bessel ha sido obtenida para el caso en que la masa está ubicada en el centro. Se utiliza para su resolución el método de Rayleigh-Ritz optimizado, aproximando la solución mediante funciones coordenadas polinómicas que satisfacen las condiciones de borde. Los valores obtenidos evidencian una muy buena aproximación con casos particulares disponibles en la literatura*

## 1 INTRODUCCION

Es conocido el interés investigativo volcado al estudio del comportamiento dinámico de elementos estructurales con la presencia de masas adosadas, dada la multiplicidad de aplicaciones tecnológicas de tal situación.

Sin embargo, en el caso de placas circulares, se conocen soluciones exactas, para el caso de una masa puntual adosada en el centro geométrico, cuando el contorno se encuentra libre o empotrado<sup>1</sup>; las que se expresan en términos de funciones de Bessel. En el caso de una perturbación no centrada, merece destacarse la investigación experimental realizada por Delaplane y Kerlin<sup>2</sup>, en mediciones de impedancia en placas circulares empotradas.

En el presente trabajo, se analiza la incidencia de una masa considerada puntual, rígidamente solidaria a ella, en una ubicación genérica cualquiera. Las condiciones de vínculo consideradas en el contorno de la placa son vinculación elástica a rotación y apoyo rígido transversal. Ver figura 1.

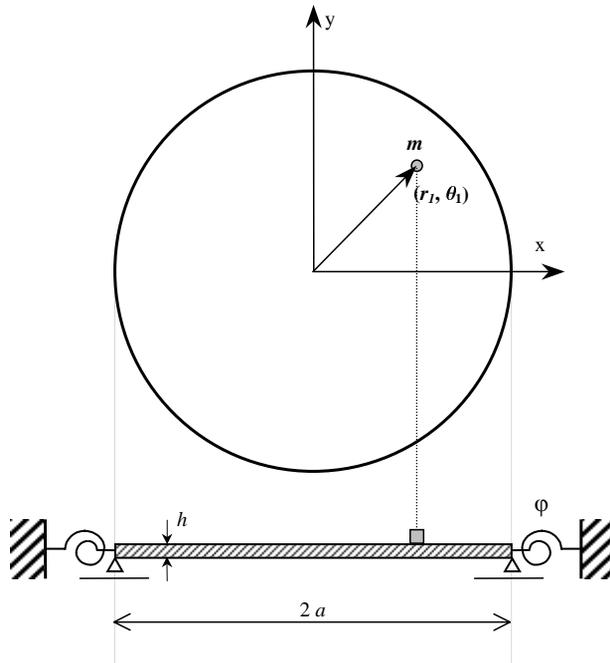


Figura 1: Placa circular vibrante

En la solución del problema se utiliza el método variacional de Rayleigh-Ritz optimizado.

Como aproximación del desplazamiento transversal se proponen funciones coordenadas polinómicas que satisfacen las condiciones de borde tanto esenciales como naturales. Se recurre a dicha aproximación en virtud de los excelentes resultados obtenidos en trabajos previos en dominios similares<sup>3,4</sup>.

## 2 SOLUCIÓN APROXIMADA

El problema de la placa cuando vibra en uno de sus modos normales es gobernado por la siguiente funcional de energía.

$$\begin{aligned}
 J(W(r, \theta)) = & \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\
 & + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right) \\
 & \left. + 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r \, dr \, d\theta \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \rho b \int_0^{2\pi} \int_0^a (W(r, \theta))^2 r \, dr \, d\theta \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 m (W(r_1, \theta_1))^2
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$W(r, \theta)$ : función amplitud de desplazamiento,

$D = \frac{E b^3}{12(1-\mu^2)}$ : rigidez a flexión de la placa

$b$ : espesor de la placa

$E$ : módulo de elasticidad

$\rho$ : densidad

$\mu$ : coeficiente de Poisson del material de la placa

$m$ : magnitud de la masa puntual

$W(r_1, \theta_1)$ : amplitud del desplazamiento del punto donde se encuentra adosada la masa puntual

$\omega$ : frecuencia natural circular de vibración del sistema estructural placa – masa de la figura 1

Las condiciones de borde que rigen el problema son:

$$W(r, \theta)|_{r=a} = 0 \tag{2.a}$$

$$\left. \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = -\varphi D \left[ \left. \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial r^2} \right|_{r=a} + \mu \left( \left. \frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{1}{r^2} \left. \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right|_{r=a} \right) \right] \tag{2.b}$$

la ecuación (2.b) define el coeficiente de flexibilidad  $\varphi$ , del vínculo elástico rotacional de borde.

A los efectos de aplicar el conocido método de Rayleigh-Ritz optimizado, se aproxima la función amplitud de desplazamiento de la placa mediante una suma de funciones coordenadas polinómicas.

$$W(r, \theta) \equiv W_a(r, \theta) = A_0 f_0(r) + \sum_{j=1}^N A_j f_j(r) \cos(j \theta) \tag{3}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_0(r) &= 1 + r^\gamma \alpha_0 + r^2 \beta_0 \\ f_1(r) &= (1 + r^\gamma \alpha_1 + r^2 \beta_1) r^2 \\ f_2(r) &= (1 + r^\gamma \alpha_2 + r^2 \beta_2) r^3 \\ &\dots\dots\dots \\ f_j(r) &= (1 + r^\gamma \alpha_j + r^2 \beta_j) r^{j+1} \\ &\dots\dots\dots \\ f_N(r) &= (1 + r^\gamma \alpha_N + r^2 \beta_N) r^{N+1} \end{aligned}$$

$\gamma$ : es el parámetro de optimización de Rayleigh y los  $\alpha$ 's y  $\beta$ 's coeficientes que se determinan a partir de la verificación de las condiciones de borde (2.a,b) obteniéndose

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{a^\gamma} \frac{2 [1 + (1 + \mu)\varphi]}{(\gamma - 2) [1 + (1 + \mu + \gamma)\varphi]} \\ \beta_0 &= -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma [1 + (\gamma + \mu - 1)\varphi]}{(\gamma - 2) [1 + (1 + \mu + \gamma)\varphi]} \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_j &= \frac{1}{a^\gamma} \frac{2 [1 + (3 + \mu + 2j)\varphi]}{(\gamma - 2) [1 + (3 + \mu + \gamma + 2j)\varphi]} \\ \beta_j &= -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma [1 + (\gamma + \mu + 1 + 2j)\varphi]}{(\gamma - 2) [1 + (3 + \mu + \gamma + 2j)\varphi]} \end{aligned} \tag{4}$$

con  $j = 1, 2, \dots, N$

Al considerar los casos particulares de borde simplemente apoyados y empotrado se tiene:

- Placa simplemente apoyada ( $\varphi \rightarrow \infty$ )

$$\alpha_0 = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2(1+\mu)}{(\gamma-2)(1+\mu+\gamma)}$$

$$\beta_0 = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma(\gamma+\mu-1)}{(\gamma-2)(1+\mu+\gamma)}$$
(5)

$$\alpha_j = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2(3+\mu+2j)}{(\gamma-2)(3+\mu+\gamma+2j)} \quad \text{con } j=1, 2, \dots, N$$

$$\beta_j = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma(\gamma+\mu+1+2j)}{(\gamma-2)(3+\mu+\gamma+2j)}$$

- Placa empotrada ( $\varphi \rightarrow 0$ )

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_N = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2}{(\gamma-2)}$$

$$\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_N = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma}{(\gamma-2)}$$
(6)

El comportamiento estructural de la placa determina que la funcional (1) sea mínima. Al reemplazar (3) en la expresión (1) y minimizando con respecto a los coeficientes  $A_i$  se tiene:

$$\frac{\partial J(W_a)}{\partial A_i} = 0: i = 0, 1, 2, \dots, N$$
(7)

de donde resulta un sistema lineal y homogéneo, de  $N$  ecuaciones en los coeficientes  $A_i$ .

La condición de no trivialidad conduce a que el determinante de los coeficientes de dicho sistema sea nulo.

Se obtienen así los autovalores del problema que constituyen los coeficientes de frecuencias naturales del sistema:

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho b}{D} a^2}$$
(8)

que quedan expresados en función del parámetro de optimización  $\gamma$

$$\Omega_i = \Omega_i(\gamma)$$
(9)

Minimizando con respecto al parámetro  $\gamma$

$$\frac{\partial \Omega_j(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \tag{10}$$

se obtienen los valores mínimos de  $\Omega_j$ , que son los coeficientes de frecuencia natural.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han obtenido valores del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{\rho b / D} a^2$ , para distintas posiciones  $(r, \theta_1)$  de la masa puntual y diferentes valores de la magnitud  $m$ , expresados en relación a la masa propia de la placa  $m_p$ , con  $N=5$  en la expresión (3).

Por tratarse de un material isótropo, los resultados obtenidos son independientes del valor de la coordenada  $\theta_1$  del punto de aplicación de la masa.

En la tabla 1 se presentan los valores obtenidos para el caso de la placa empotrada.

$\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{\rho b / D} a^2$								
$M = \frac{m}{m_p} = \frac{m}{\pi a^2 b \rho}$								
$r_1/a$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00
0	9.0130 9.012 <sup>1</sup>	8.1127 8.111 <sup>1</sup>	6.8727	6.0548	5.0232	3.7595	3.1318	2.7402
0.10	9.0723	8.2133	7.0190	6.2201	5.1967	3.9185	3.2743	2.8696
0.20	9.2200	8.4513	7.3461	6.5801	5.5667	4.2528	3.5728	3.1403
0.30	9.4181	8.7668	7.7776	7.0561	6.0588	4.7019	3.9756	3.5067
0.40	9.6366	9.1227	8.2783	7.6170	6.6477	5.2451	4.4639	3.9511
0.50	9.8489	9.4875	8.8266	8.2536	7.3368	5.8878	5.0394	4.4722
0.60	10.0274	9.8201	9.3915	8.9634	8.1708	6.7050	5.7725	5.1332
0.70	10.1488	10.0652	9.8788	9.6672	9.1837	7.9237	6.9268	6.1945
0.80	10.2081	10.1892	10.1483	10.1031	9.9969	9.6131	9.0426	8.3896
0.90	10.2248	10.2235	10.2209	10.2181	10.2126	10.1977	10.1814	10.1634

Tabla 1 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular empotrada ( $\varphi = 0$ ) con una masa puntual adosada en posición  $r_1$ .

Para los dos primeros casos de la primera fila, la placa con la masa en el centro, con  $M=0.05$  y  $M=0.10$  se observa la concordancia con los resultados disponibles en la

literatura<sup>1</sup>.

En la tabla 2, se indican los valores obtenidos para la placa simplemente apoyada en el borde.

$\Omega_o = \omega_o \sqrt{\rho b / D} a^2$								
$M = \frac{m}{m_p} = \frac{m}{\pi a^2 b \rho}$								
$r_1/a$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00
0	4.5472	4.2320	3.7510	3.3993	2.9135	2.2550	1.9042	1.6784
0.10	4.5575	4.2501	3.7797	3.4342	2.9540	2.2927	1.9437	1.7153
0.20	4.5860	4.2988	3.8532	3.5207	3.0508	2.4931	2.0333	1.7983
0.30	4.6286	4.3706	3.9598	3.6451	3.1889	2.5297	2.1617	1.9160
0.40	4.6812	4.4597	4.0934	3.8021	3.3645	2.7048	2.3233	2.0675
0.50	4.7396	4.5611	4.2505	3.9905	3.5805	2.9252	2.5300	2.2601
0.60	4.7993	4.6688	4.4273	4.2114	3.8469	3.2112	2.8032	2.5165
0.70	4.8545	4.7733	4.6139	4.4604	4.1762	3.6070	3.1990	2.8966
0.80	4.8988	4.8610	4.7841	4.7060	4.5482	4.1654	3.8265	3.5403
0.90	4.9269	4.9175	4.8985	4.8792	4.8398	4.7366	4.6280	4.5153

Tabla 2 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular simplemente apoyada ( $\varphi \rightarrow \infty$ ) con una masa puntual adosada en posición  $r_1$ . ( $\mu = 0.30$ ).

Asimismo, la tabla 3 reseña los valores de frecuencia fundamental que se obtuvieron para la placa vinculada elásticamente a rotación en el borde, que corresponde a un caso de empotramiento elástico:  $\varphi D/a = 0.05$ .

De la observación de los resultados mostrados en las tablas surge claramente que, como era de esperar, la disminución del coeficiente de frecuencia fundamental, aumenta con la magnitud de la masa y su cercanía al centro de la placa.

En la figura 2, se muestra esa tendencia para el caso de empotramiento elástico analizado cuando se cambia la posición de las masas desde el centro hasta el borde exterior, lugar donde dejan de tener influencia. El valor  $\Omega_o = 8.391$  es el coeficiente de frecuencia fundamental de la placa elásticamente empotrada sin masa.

$$\Omega_o = \omega_o \sqrt{\frac{\rho b}{D}} a^2$$

$$M = \frac{m}{m_p} = \frac{m}{\pi a^2 b \rho}$$

$r_1/a$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00
0	7.5948	6.9584	6.0175	5.3595	4.4948	3.3965	2.8392	2.4886
0.10	7.6201	7.0040	6.0913	5.4489	4.5965	3.4968	2.9315	2.5736
0.20	7.6903	7.1256	6.2753	5.6631	4.8301	3.7197	3.1347	2.7598
0.30	7.7936	7.2991	6.5286	5.9534	5.1429	4.0168	3.4005	3.0080
0.40	7.9181	7.5065	6.8299	6.2981	5.5138	4.3667	3.7237	3.2993
0.50	8.0520	7.7347	7.1705	6.6932	5.9427	4.7705	4.0860	3.6281
0.60	8.1820	7.9969	7.5471	7.1150	6.4590	5.2639	4.5266	4.0248
0.70	8.2902	8.1803	7.9378	7.6730	7.1254	5.9685	5.1733	4.6174
0.80	8.3559	8.3246	8.2465	8.1559	7.9228	7.2266	6.4986	5.7026
0.90	8.3875	8.3830	8.3738	8.3642	8.3435	8.2821	8.2001	8.0920

Tabla 3 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular elásticamente empotrada ( $\varphi D/a = 0.05$ ) con una masa puntual adosada en posición  $r_1$ . ( $\mu = 0.30$ ).

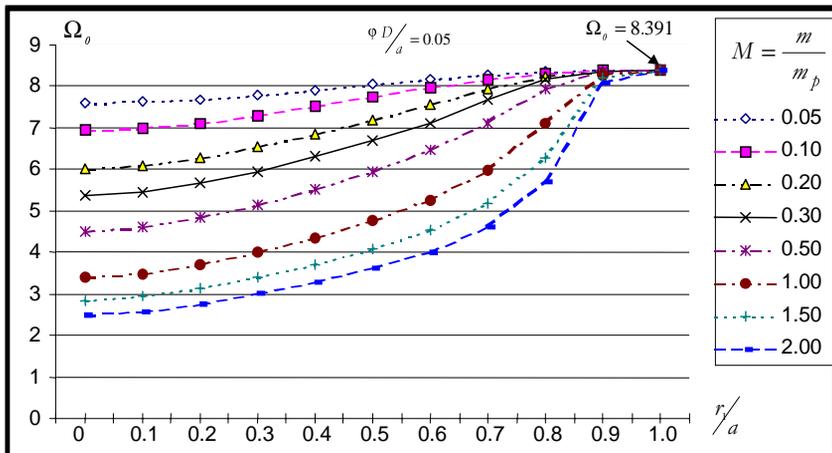


Figura 2 Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular elásticamente empotrada