

## **SOBRE EL EFECTO DE PERTURBACIONES GEOMÉTRICAS EN EL CONTORNO EN EL CASO DE PLACAS CIRCULARES VIBRANTES**

**Raúl E. Rossi, Patricio A. A. Laura y Roberto H. Gutiérrez**

Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamentos de Ingeniería y Física,  
Universidad Nacional del Sur, Avenida Alem 1253 – 8000 – Bahía Blanca,  
Argentina  
e-mail: [ima@criba.edu.ar](mailto:ima@criba.edu.ar)

**Key words:** placas, perturbaciones, vibraciones.

**Abstract.** *Es bien sabido el hecho de que “bordes empotrados” o “simplemente apoyados” constituyen condiciones idealizadas de contorno difíciles de lograr experimentalmente. Numerosos estudios han aparecido en la literatura técnico-científica sobre la cuestión considerando restricciones elásticas a la rotación y/o translación en vigas y placas. En cambio, menos tratada ha sido la situación en que los bordes de una placa o losa no definen una configuración geométrica perfectamente circular o rectangular. En este trabajo se presenta una reseña de investigaciones recientes realizadas en la UNS donde se consideran placas circulares empotradas y simplemente apoyadas con pequeñas perturbaciones geométricas periódicas en el contorno. El dominio en cuestión es transformable en un círculo unitario en otro plano y el autovalor fundamental es determinado mediante la combinación transformación conforme–método variacional. Las funciones coordenadas contienen a su vez un parámetro exponencial de optimización que permite minimizar numéricamente el coeficiente de frecuencia fundamental. Por otra parte se obtiene una solución independiente mediante el método de elementos finitos.*

## 1 INTRODUCCION

En general puede decirse que las perturbaciones en las condiciones de borde de placas vibrantes son de dos tipos:

- a) mecánico: flexibilidad de los apoyos y posible variación de esta propiedad a lo largo del contorno, no linealidades etc.
- b) geométrico: desviaciones con respecto a una configuración ideal.

Diversos estudios han sido publicados sobre las perturbaciones del primer tipo<sup>1-4</sup> mientras que las perturbaciones de índole geométrica han recibido limitada atención.

En este trabajo se discuten los lineamientos generales desarrollados en un trabajo previo<sup>5</sup> y se estudia la variación de la frecuencia fundamental de vibración de placas circulares simplemente apoyadas y empotradas con variaciones periódicas en su contorno tal que la configuración física en el plano  $z$  es transformada en un círculo unitario en el plano  $\zeta$  mediante la función analítica:

$$z = f(\zeta) = \frac{a}{1+m}(\zeta + m\zeta^{n+1}) \quad , \quad m \leq \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

siendo  $n$  el número de ejes de simetría de la configuración.

Mediante la combinación transformación conforme–método variacional optimizado<sup>6-7</sup> se determinan los autovalores fundamentales y se demuestra un buen acuerdo con coeficientes de frecuencia obtenidos mediante el método de elementos finitos.

## 2 SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA.

Cuando la placa o losa ejecuta modos normales de vibración el problema es gobernado por la funcional:

$$J(W) = D \iint_p \left[ (W_{x^2} + W_{y^2})^2 - 2(1-\nu)(W_{x^2}W_{y^2} - W_{xy}^2) \right] dx dy - \rho h \omega^2 \iint_p W^2 dx dy \quad (2)$$

y las correspondientes condiciones de borde.

Expresando a (1) en la forma:

$$z = f(\zeta), \quad z = x + yi, \quad \zeta = \xi + \eta i \quad (3)$$

y substituyendo en (2) se obtiene:

$$J(W) = D \iint_c \left\{ \frac{1+\nu}{2} \frac{(W_{\xi^2} + W_{\eta^2})}{|f'(\zeta)|^4} + \frac{1-\nu}{2} \frac{|(W_{\xi^2} - W_{\eta^2} - 2W_{\xi\eta}i)f'(\zeta) - 2(W_{\xi} - W_{\eta}i)f''(\zeta)|^2}{|f'(\zeta)|^6} \right\} |f'(\zeta)|^2 d\xi d\eta - \rho h \omega^2 \iint_c W^2 |f'(\zeta)|^2 d\xi d\eta \quad (4)$$

Si bien es posible aproximar a la función amplitud  $W$  mediante una relación que contenga sólo a la variable radial<sup>7</sup> se observan considerables mejoras si uno tiene en cuenta también a la variable azimutal<sup>6</sup>. Por esta razón se tomó, en el caso de una placa circular simplemente apoyada:

$$W_a = \sum_{j=1}^N C_j (1 - r^{p+j-1}) + C_{N+1} (1 - r^p) r^2 \cos n\theta \quad (5)$$

mientras que si la placa está empotrada:

$$W_a = \sum_{j=1}^N C_j (1 - r^{p+j-1})^2 + C_{N+1} (1 - r^p)^2 r^2 \cos n\theta \quad (6)$$

El exponente “ $p$ ” permite minimizar al autovalor buscado optimizándose así al mismo.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Las determinaciones fueron efectuadas tomando al coeficiente de Poisson igual a 0.30 y utilizándose 5 funciones coordenadas al emplear la formulación analítica. La implementación del método de elementos finitos<sup>8</sup> fue llevada a cabo utilizándose una malla de 3960 elementos para el dominio en cuestión (Figuras 1 y 2).

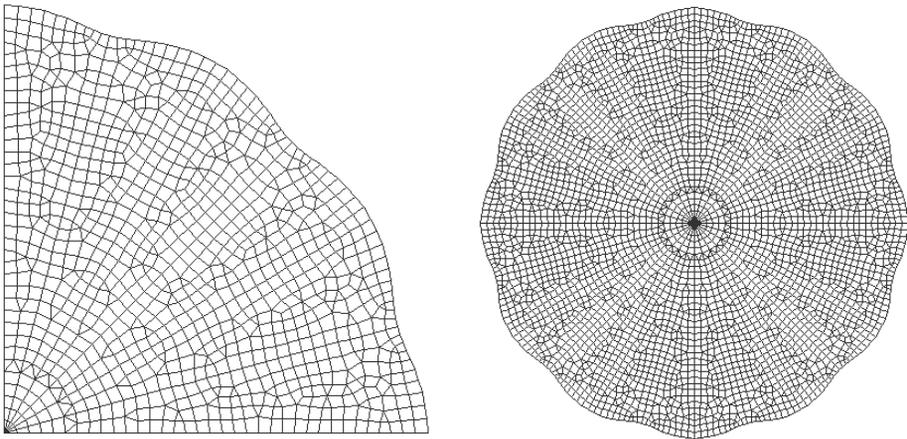


Figura 1: Cuadrante y dominio de la placa en estudio ( $n = 12$ ,  $m = 1/50$ ).

La Tabla 1 muestra una comparación entre los valores obtenidos del coeficiente de frecuencia fundamental mediante ambas metodologías. Puede apreciarse el hecho de que la concordancia es excelente en el caso de placas empotradas y muy buena cuando el borde es simplemente apoyado.

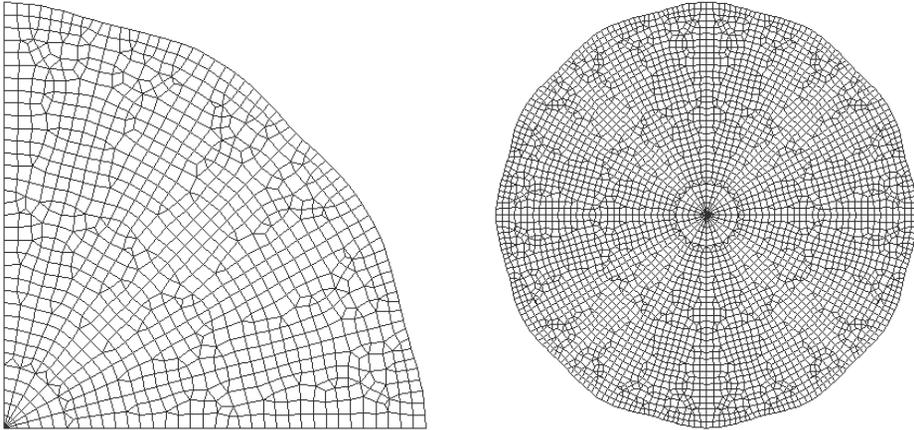


Figura 2: Cuadrante y dominio de la placa en estudio ( $n = 12$ ,  $m = 1/100$ ).

CONDICIÓN DE BORDE				
$n = 12$	Simplemente Apoyada		Empotrada	
$m$	Elementos Finitos	Método Analítico	Elementos Finitos	Método Analítico
1/50	5.784	5.91	10.677	10.67
1/100	5.194	5.23	10.435	10.43

**TABLA 1:** Comparación de valores de  $\Omega_1 = \sqrt{\rho h / D} \omega_1 a^2$ , donde  $a$ : radio del círculo que circunscribe la configuración en estudio.

La Tabla 2 contiene las seis primeras frecuencias naturales de las configuraciones en cuestión, obtenidas con elementos finitos. Los autovalores son superiores a los de placas circulares ideales en todos los casos.

Los coeficientes de frecuencia  $\Omega_1$  y  $\Omega_4$  corresponden a modos de cuasi-axisimetría. En la Tabla 2 se dan también los autovalores de placas perfectamente circulares ( $n=\infty$ ,  $m=0$ ).

Es de interés puntualizar el hecho de que las perturbaciones poseen considerablemente más efecto en el caso de bordes simplemente apoyados que cuando están empotrados. Para  $m=1/50$  es 4 veces mayor y para  $m=1/100$  casi 2 veces, cuando se comparan los autovalores con los de las placas ideales.

$n$	$m$	Borde	$\Omega_1^*$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4^*$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
12	1/50	Simplemente Apoyada	5.784	15.026	27.163	31.421	42.028	50.866
		Empotrada	10.677	22.206	36.412	41.520	53.251	63.456
12	1/100	Simplemente Apoyada	5.194	14.312	26.253	30.443	40.881	49.561
		Empotrada	10.435	21.774	35.626	40.629	52.133	62.121
$\infty$	0	Simplemente Apoyada	4.935	13.898	25.613	29.72	39.957	48.479
		Empotrada	10.216	21.26	34.88	39.77	51.04	60.82

**TABLA 2:** Primeros Seis Coeficientes de Frecuencia Natural de Placas Circulares con Contorno Ondulado y Placas Circulares Ideales.

\* Corresponden a modos cuasi-axisimétricos para las placas con perturbaciones de borde y axisimétricos en el caso de placas circulares ideales.

#### 4 AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET, la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y TECHINT.

#### 5 REFERENCIAS

- [1] A.W. Leissa, *Vibration of Plates*. NASA SP160, (1969).
- [2] P.A.A. Laura, L.E. Luisoni y C.P. Filipich, "A note on the determination of the fundamental frequency of vibration of thin, rectangular plates with edges possessing different rotational flexibility coefficients", *Journal of Sound and Vibration* 55; 327-333, (1977).
- [3] A.W. Leissa, P.A.A. Laura y R.H. Gutiérrez, "Transverse vibrations of circular plates having non- uniform edge constraints", *The Journal of the Acoustical Society of America* 55, 180-184, (1979).
- [4] A.W. Leissa, P.A.A. Laura y R.H. Gutiérrez, "Vibrations of rectangular plates with non-uniform edge supports", *Journal of Applied Mechanics (ASME)* 47, 891-895, (1980).
- [5] R.H. Gutiérrez, P.A.A. Laura y R.E. Rossi, "Transverse vibrations of clamped and simply supported circular plates of deformed boundaries". *Journal of Sound and Vibration* 250, 575-578, (2002).
- [6] P.A.A. Laura, K. Nagaya y G. Sánchez Sarmiento, "Numerical experiments on the determination of cutoff frequencies of waveguides of arbitrary cross section", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique MTT* 28, 568-572, (1980).
- [7] R. Schinzinger y P.A.A. Laura, *Conformal Mapping: Methods and Applications* ELSEVIER, Amsterdam, (1991).
- [8] ALGOR Inc., *Linear Stress and Vibration Analysis Processor Reference Manual*, Part N° 6000.501 Revision 5.00. Pittsburgh, PA, USA (1999).