

## VIBRACIONES LIBRES DE UNA PLACA RECTANGULAR: INFLUENCIA DE UNA MASA ADOSADA

Daniel H. Felix<sup>\*</sup>, Diana V. Bambill<sup>\*†</sup> y Carlos A. Rossit<sup>\*†</sup>

<sup>\*</sup> Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur.

<sup>†</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas ( CONICET )  
Universidad Nacional del Sur, Avenida Alem 1253 8000 Bahía Blanca Argentina  
e-mail: dhfelix@criba.edu.ar

**Palabras clave:** Placa, vibraciones, masa concentrada, energía.

**Resumen.** *Es un hecho conocido en la teoría de vibraciones mecánicas que la presencia de masas adosadas altera las frecuencias naturales de vibración de elementos estructurales, así como sus modos normales. En el caso de una placa delgada rectangular isótropa con sus bordes simplemente apoyados, la presencia de una masa considerada puntual, rígidamente adosada en el centro de la placa no modifica los valores de frecuencias naturales cuyas formas modales presentan una línea nodal que contienen al punto de aplicación de la masa. En cambio las frecuencias naturales cuyas formas modales producen desplazamiento en dicho punto, modifican sus valores con la magnitud de la masa. En el presente trabajo se analizan las variaciones de las frecuencias naturales y formas modales por incidencia de la magnitud de la masa, evidenciándose en algunos casos permutaciones en el orden de las frecuencias correspondientes a determinados modos de vibración, al incrementarse el valor de la masa. Los valores de frecuencias naturales se determinaron utilizando métodos variacionales, aproximando la solución mediante conjuntos de funciones viga, llegando a un determinante-ecuación de 400 x 400 elementos. Los resultados se han verificado mediante códigos de elementos finitos que a su vez fueron utilizados para establecer las formas modales correspondientes.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El elemento estructural que se propone analizar consiste en una placa delgada rectangular de material isótropo, simplemente apoyada en sus cuatro bordes, en la que se considera la existencia de una masa puntual concentrada rígidamente vinculada a ella, según se indica en la figura 1.

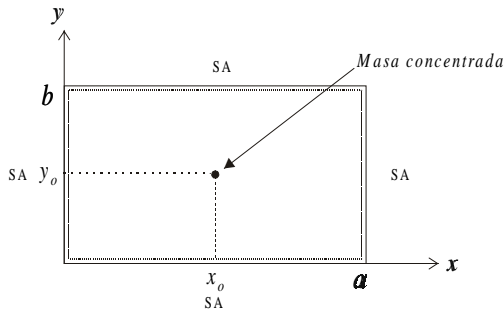


Figura 1: Placa rectangular isótropa simplemente apoyada con una masa concentrada en el centro de la misma. ( $x_0 = a/2$ ,  $y_0 = b/2$ ).

El efecto de la masa concentrada adosada a la placa puede deberse a la presencia de un motor o maquinaria sobre la placa estructural o bien en una placa de circuito impreso a algún dispositivo electrónico adherido a ella.

Cualquiera sea el tipo de aplicación de este modelo se observará una marcada modificación en el comportamiento dinámico del sistema <sup>1,2</sup>

Si bien el ejemplo propuesto para materiales isótropos admite solución exacta la misma es dificultosa de implementar, y el problema principal es que dicha solución no puede extenderse a casos más generales tales como placas que incluyan simultáneamente huecos o inclusiones y masas concentradas, características anisotrópicas del material o diferentes condiciones de borde.

El trabajo presente cumple con dos finalidades: La primera es desarrollar una metodología basada en la energía, implementada a través de un planteo matricial original del problema y la segunda consiste en realizar el análisis del comportamiento dinámico particular que presenta el modelo propuesto. La idea de analizar en esta primera etapa un modelo relativamente sencillo permite comprender cabalmente el fenómeno y generar las bases para el estudio de sistemas más complejos, como los mencionados anteriormente.

## 2. SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA

Cuando la placa efectúa uno de sus modos normales de vibración la funcional de energía gobernante del problema es:

$$J[W(x, y)] = \frac{1}{2} D \iint [W_{xx}^2 + 2\nu W_{xx} W_{yy} + W_{yy}^2 + 2(1-\nu)W_{xy}^2] dx dy - \frac{1}{2} \rho \omega^2 h \iint W^2 dx dy - \frac{1}{2} m_o \omega_o^2 W_o^2 \quad (1)$$

Donde  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  es la rigidez a flexión de la placa;  $E$  su módulo de elasticidad;  $W$  la función desplazamiento de la placa;  $\rho$  es la densidad del material;  $m_o$  la magnitud de la masa adosada y  $W_o$  la amplitud del desplazamiento del punto de aplicación de la masa.

A los efectos de aplicar el conocido método de Rayleigh-Ritz se aproxima la función desplazamiento de la placa mediante un conjunto de funciones viga, que satisfacen las condiciones esenciales de borde.

$$W_a(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2)$$

Siendo  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$  las respectivas funciones viga en las direcciones  $x$  e  $y$  de la placa;  $A_{mn}$  los coeficientes a determinar y los parámetros  $M$  y  $N$  definen el número de términos con que se aproxima la función de forma.

En este caso las funciones viga se expresan en la siguiente forma: <sup>3</sup>

$$X_m(x) = \text{Sen}(m\pi x/a) \quad (3)$$

$$Y_n(y) = \text{Sen}(n\pi y/b) \quad (4)$$

El sistema se comportará de modo que la funcional de energía expresada por la eq.(1) sea mínima. Siendo posible establecer la condición de extremo al imponer que la primera variación de la funcional sea nula.

$$\delta J[W] = 0 \quad (5)$$

Reemplazando la eq. (2) en la eq.(1) y minimizando respecto a los coeficientes  $A_{mn}$  se obtiene el sistema:

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (6)$$

Por ser el sistema de ecuaciones (6) lineal y homogéneo, para obtener una solución distinta de la trivial deberá ser el determinante de los coeficientes del mismo igual a cero, lo que conduce a obtener los autovalores del problema:  $\Omega_{mn} = \sqrt{\rho h/D_1} a^2 \omega_{mn}$ , que constituyen los coeficientes de frecuencia naturales del sistema.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se resolvieron diferentes modelos estructurales definidos por la relación  $\lambda = a / b$  entre los lados de la placa y la relación  $m_o/m_p$  entre la masa concentrada y la masa de la placa, ubicando la masa en el centro de la placa. En todos los casos se utilizó  $M=N=15$  para el número de términos de la función desplazamiento de la placa.

La tabla 1 muestra las modificaciones en las primeras cuatro frecuencias conforme aumenta la relación  $m_o/m_p$  para diferentes valores de  $\lambda$ .

Como ejemplo puede apreciarse en la tabla 1 para la relación de lados  $\lambda = 1/2$  que el primer coeficiente de frecuencia en la placa sin masa concentrada tiene un valor  $\Omega_1 = 12,337$ , mientras que con la misma relación de lados, cuando  $m_o/m_p = 0.3$  el coeficiente de frecuencia es  $\Omega_1 = 7.992$ ; con lo cual se produce una disminución del orden del 35 % .

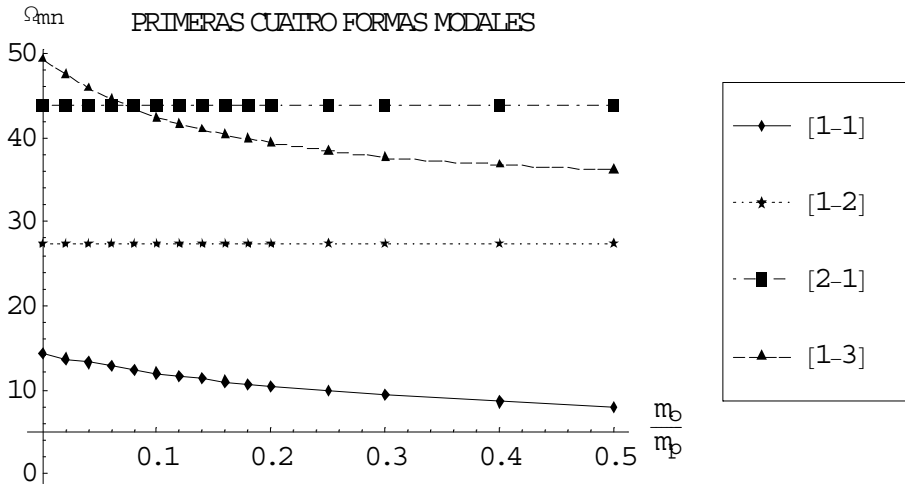
La disminución en el valor del coeficiente de frecuencia de vibración es también significativo, aún cuando la relación entre la masa concentrada y la masa de la placa es sensiblemente menor. Si se toman como ejemplo los valores obtenidos en la tabla 1 para el caso en que la relación de lados es  $\lambda = 2/3$ , la tabla 1 indica para la placa sin masa concentrada que el primer coeficiente de frecuencia  $\Omega_1 = 14,256$  y para la placa con una relación  $m_o/m_p = 0.1$  que  $\Omega_1 = 11,962$ , lo cual muestra una disminución del coeficiente de frecuencia del orden del 16 %.

Con el objeto de apreciar más detalladamente como varía el comportamiento dinámico de la placa, conforme aumenta la masa concentrada, se construyó el gráfico de la figura 2 para el caso en que  $\lambda = 2/3$ . En las ordenadas se indican las cuatro primeras frecuencias, y en las abscisas la relación  $m_o/m_p$ , con lo cual cada línea vertical en el gráfico define una estructura.

A partir de los resultados obtenidos graficados en la figura 2 pueden señalarse las características principales del comportamiento dinámico del modelo analizado.

En primer lugar se observa que los valores de frecuencia que se corresponden con las formas modales identificadas con (1-2) o (2-1) no alteran su valor con el crecimiento de la magnitud de la masa. Ello se debe a que dichas formas modales tienen una línea nodal central que contiene al punto de aplicación de la masa.

En segundo lugar se observa que las formas modales identificadas habitualmente como (1-1) y (1-3) disminuyen al aumentar la relación  $m_o/m_p$  y lo hacen en forma significativa según se detalló en párrafos anteriores. Esto se debe a que en estas formas modales la masa concentrada estará en movimiento incrementando la energía cinética del sistema. El comportamiento descrito genera una alteración en el orden de los valores de las frecuencias naturales que se corresponden con las formas modales identificadas como (2-1) y (1-3) a medida que se incrementa la magnitud de la masa concentrada. En efecto para valores menores a  $m_o/m_p = 0,075$  la tercer frecuencia natural corresponde a la forma modal (2-1) ( es decir dos ondas en sentido de las abscisas y una en sentido de las ordenadas). A partir del valor  $m_o/m_p = 0,075$  se invierte tal relación como indica la figura 2.



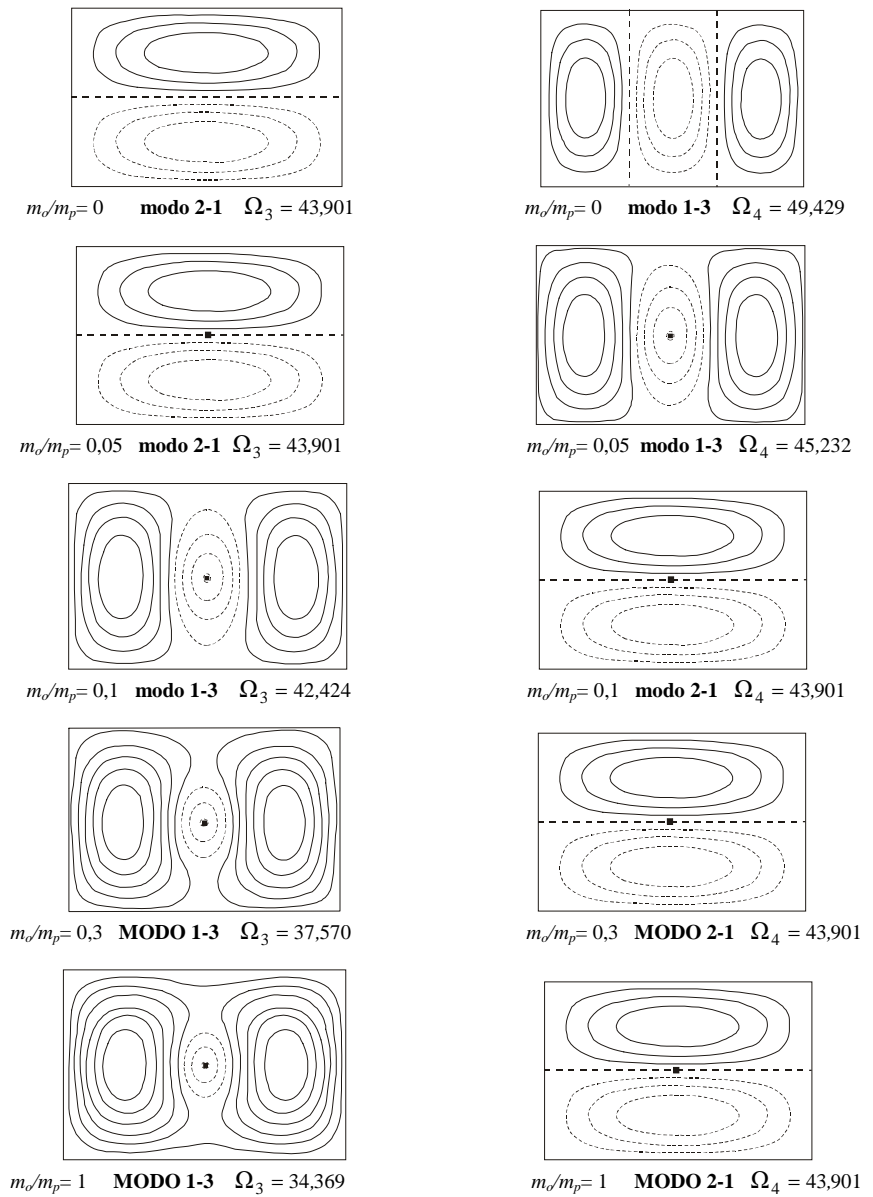
**Figura 2:** Primeras cuatro frecuencias en una placa S.A. con una masa concentrada ubicada en el centro de la misma, conforme varía la relación  $m_o/m_p$ , obtenidas para  $\lambda = a/b = 2/3$ . Cada curva corresponde respectivamente a las formas modales 1-1, 1-2, 2-1 y 1-3

Utilizando un algoritmo de elementos finitos <sup>4</sup> se determinaron las formas modales correspondientes a algunas de las diferentes configuraciones que define el gráfico de la figura 2. La figura 3 muestra comparativamente cómo la masa concentrada afecta en función de la relación  $m_o/m_p$  la forma modal resultante. Puede apreciarse el cambio en el orden de las formas modales que presentan la 3<sup>ra</sup> y 4<sup>ta</sup> frecuencias en éstos casos, así como a partir de cierto valor de  $m_o/m_p$  se curvan las líneas nodales, llegando incluso a transformarse en una curva cerrada (figura 3  $m_o/m_p=1$ ).

| $\lambda = a/b$ | $m_c/m_p$ | $\Omega_1$ |                       | $\Omega_2$ |            | $\Omega_3$ |                         | $\Omega_4$ |                        |
|-----------------|-----------|------------|-----------------------|------------|------------|------------|-------------------------|------------|------------------------|
| 1/2             | 0,0       | 1 1        | ^ 12,337<br>* 12,337  | 1 2        | ^ * 19,739 | 1 3        | ^ 32,076<br>* 32,076    | 2 1        | ^ * 41,946             |
|                 | 0,1       | 1 1        | ^ 10,307<br>** 10,305 |            |            | 1 3        | ^ 27,956<br>** 27,932   |            |                        |
|                 | 0,3       | 1 1        | ^ 7,992<br>** 7,986   |            |            | 1 3        | ^ 25,371<br>** 25,324   |            |                        |
| 2/3             | 0,0       | 1 1        | ^ 14,256<br>* 14,256  | 1 2        | ^ * 27,416 | 2 1        | ^ 43,865<br>* 43,865    | 1 3        | ^ 49,348<br>* 49,348   |
|                 | 0,1       | 1 1        | ^ 11,962<br>** 11,961 |            |            | 1 3        | ^ 42,385<br>** 42,338   | 2 1        | ^ 43,865<br>** 43,865  |
|                 | 0,3       | 1 1        | ^ 9,369<br>** 9,353   |            |            | 1 3        | ^ 37,571<br>** 37,478   | 2 1        | ^ 43,865<br>** 43,865  |
| 1,0             | 0,0       | 1 1        | ^ 19,739<br>* 19,739  | 1 2        | ^ * 49,348 | 2 1        | ^ * 49,348              | 2 2        | ^ 78,957<br>* 78,957   |
|                 | 0,1       | 1 1        | ^ 16,603<br>** 16,591 |            |            |            |                         | 2 2        | ^ 76,52<br>** 76,298   |
|                 | 0,3       | 1 1        | ^ 13,052<br>** 13,048 |            |            |            |                         | 2 2        | ^ 63,55<br>** 63,31    |
| 1,5             | 0,0       | 1 1        | ^ 32,076<br>* 32,076  | 2 1        | ^ * 61,685 | 1 2        | ^ 98,696<br>* 98,696    | 3 1        | ^ 111,033<br>* 111,033 |
|                 | 0,1       | 1 1        | ^ 26,915<br>** 26,912 |            |            | 3 1        | ^ 95,367<br>** 95,261   | 1 2        | ^ 98,696<br>** 98,696  |
|                 | 0,3       | 1 1        | ^ 21,081<br>** 21,072 |            |            | 3 1        | ^ 84,535<br>** 84,326   | 1 2        | ^ 98,696<br>** 98,696  |
| 2,0             | 0,0       | 1 1        | ^ 49,348<br>* 49,348  | 2 1        | ^ * 78,957 | 3 1        | ^ 128,305<br>* 128,305  | 1 2        | ^ * 167,783            |
|                 | 0,1       | 1 1        | ^ 41,228<br>** 41,220 |            |            | 3 1        | ^ 111,825<br>** 111,728 |            |                        |
|                 | 0,3       | 1 1        | ^ 31,968<br>** 31,944 |            |            | 3 1        | ^ 101,485<br>** 101,296 |            |                        |

**Tabla 1:** Primeras cuatro frecuencias  $\Omega_{mn}$  de una placa rectangular isotrópica simplemente apoyada con una masa concentrada en el centro de la misma, obtenidas en función de  $\lambda = a/b$  para relaciones.  $m_c/m_p = 0; 0.1$  y  $0.3$ .

**Referencias:** ^ Solución aproximada propuesta.  
 \* Solución exacta utilizando expresiones de Leissa.<sup>5</sup>  
 \*\* Solución exacta utilizando la formulación de Magrab.<sup>6</sup>



**Figura 3:** Formas modales de la tercera y cuarta frecuencia, para diferentes valores de la relación  $m_o/m_p$