

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FENÓMENO DE INTRUSIÓN SALINA EN ACUÍFEROS BASADA EN EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

Mario Durán*, José Muñoz†, Patricio Toledo*

*Centro de Minería,
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, Chile.
email: mduran@ing.puc.cl, patoledo@ing.puc.cl

†Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental,
Pontificia Universidad Católica de Chile,
Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile.
email: jfmunoz@puc.cl

Palabras Clave: Intrusión Salina, Contaminación de Aguas, Volúmenes Finitos, Advección, Difusión.

Resumen. *Se presenta una simulación computacional basada en el método numérico de Volúmenes Finitos para el flujo saturado bidimensional en un acuífero confinado que presenta una descarga vertical al mar sobre una cuña salina difusa que ha intruido en el acuífero. Se exhiben y discuten los resultados tanto en régimen transiente como en estado estacionario. De acuerdo a estos, que coinciden muy bien con los modelos estándar, el método se muestra eficiente en tratar no linealidades y gradientes localizados*

1. INTRODUCCIÓN

Muchos fenómenos naturales en los cuales interactúan flujos subterráneos y contaminantes son importantes en la actualidad, ya sea en abastecimiento de agua potable, en prospección y explotación minera o en manejo de residuos. El flujo miscible en medio poroso con énfasis en el transporte de soluto por advección-difusión, tiene una gran aplicación aquí. Sin embargo, la imposibilidad de obtener soluciones exactas, ha retrasado la comprensión de los sistemas de aguas subterráneas sometidos a estos fenómenos. Por este motivo, se hace necesario recurrir a herramientas numéricas y computacionales con objeto de obtener resultados desde los modelos sin recurrir a excesivas simplificaciones en estos.

Uno de los fenómenos más interesantes en este campo, es la dinámica a la cual está sometido el Salar de Atacama, en el norte de Chile¹. Recientemente, el Salar ha sido sometido a estudio numérico, principalmente por medio de un método de diferencias finitas^{2,3}, en este contexto el avance hacia un modelo numérico de mayor sofisticación matemática y geoquímica es deseable, de modo de poder capturar más y mejor heterogeneidades, anisotropía y características transientes propias de estos sistemas.

El desafío de resolver las ecuaciones que rigen estos sistemas dinámicos, es abordado por medio del esquema de volúmenes finitos en el espacio y por un δ -esquema en el tiempo. Las principales dificultades numéricas se presentan en las dependencias entre densidad y concentración, las mismas que inducen cambios en los patrones de flujo. Esta problemática, se traduce en no linealidad en las ecuaciones y es enfrentada por medio de un algoritmo de punto fijo.

Los resultados que se presentan corresponden a una primera etapa de desarrollo y consisten en la validación del modelo con respecto al muy conocido problema de intrusión salina de Henry, transiente y estacionario.

2. INTERACCIÓN ENTRE DIFERENTES TIPOS DE AGUA: MARCO TEÓRICO

Por más de veinte años, muchos autores han estudiado cómo desarrollar códigos numéricos que simulen la intrusión salina. Existen principalmente dos enfoques, uno relativamente simple que consiste en suponer una interfaz abrupta entre agua dulce y salada y otro más completo y riguroso que supone una zona de transición o mezcla entre ambos tipos de agua⁴. La decisión entre uno u otro enfoque depende de las condiciones hidrogeológicas del lugar en estudio, pero es aceptado que una zona de transición debe aplicarse en el caso que exista heterogeneidad y dispersión⁵.

En la zona de transición, la densidad del agua es una función del espacio y del tiempo y depende de la distribución barométrica así como de la concentración salina. Las ecuaciones que pueden describir este fenómeno son leyes de conservación hiperbólicas y se tratarán en su forma integral. Esta manera de ver el problema es intrínseca al método numérico escogido y garantiza el respeto al principio físico subyacente que es el balance de las propiedades extensivas del sistema.

Un modelo conceptual consta de dos partes a saber: una dinámica propiamente tal, compuesta por la ley de Darcy y la conservación de la masa en forma de ecuación de continuidad

más una parte geoquímica que incluye una ley de estado y una ecuación de continuidad para el soluto. La ley de estado describe la forma en la cual se acopla densidad y concentración y a fin de cuentas, establece la fuerza con la cual se representa la no linealidad del fenómeno de intrusión. Cuando se trata con fluctuaciones en la concentración del orden del 5 % una ley de estado lineal es suficiente. En el Salar de Atacama las variaciones son del orden de un 13 %, por lo tanto será necesario cambiar este modelo ligeramente en una segunda etapa.

La ley de Darcy expresa la velocidad del flujo de agua subterránea por medio de la ecuación⁶⁻⁹:

$$m \vec{v} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (1)$$

en donde $\vec{v} (L/T)$ representa la velocidad promedio del fluido en el medio poroso, m la porosidad efectiva, $k (L^2)$ el tensor de permeabilidad intrínseca, $\mu (ML^{-1}T^{-1})$ la viscosidad del fluido, $\rho (M/L^3)$ la densidad del fluido, $g (L/T^2)$ la aceleración de gravedad, $p (M/LT^2)$ la presión de fluido y $z (L)$ la altura de referencia.

El balance de masa transiente en medio sólido incompresible (pero con matriz porosa compresible) sin considerar efectos de humedad y de compresibilidad del fluido se escribe⁵:

$$\rho \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right) \quad (2)$$

en donde $\alpha (LT^2/M)$ es el coeficiente de compresibilidad volumétrica del medio poroso que se llamará Ω . Usualmente en esta última expresión es utilizada la aproximación de Boussinesq, que establece que las variaciones en la densidad sólo serán consideradas en la ley de Darcy (1), reduciendo (2) a un balance volumétrico.

El transporte de un contaminante o soluto en medio poroso viene dado por una ecuación de advección-difusión de la forma^{4,5,7,8}:

$$\frac{\partial(m\rho C)}{\partial t} = \text{div} (m\rho(D(\vec{v})\nabla C - C\vec{v})) \quad (3)$$

donde los procesos de adsorción y daciaimiento han sido despreciados. C representa la fracción de masa del soluto (M/M) o la concentración de él (M/L^3) y $D (L^2/T)$ es el tensor de dispersión hidrodinámica, que contiene efectos de difusión y dispersión. Usualmente este es tratado como la suma de dos partes separadas, es decir, una componente de dispersión mecánica, que es función de la velocidad y otra constante que representa la difusión molecular. Esta representación es poco real conceptualmente, ya que los efectos de dispersión-difusión están íntimamente ligados y no pueden ser separados⁶.

Las variaciones de la densidad del fluido con respecto a la concentración en casos de salinidad moderada se representan por⁵:

$$\rho = \rho_0 + \gamma(C - C_0) \quad (4)$$

en donde C_0 y ρ_0 son concentraciones y densidades de referencia, usualmente se toma el valor de estas para el agua dulce, γ es la razón entre densidad y concentración.

3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Introduciendo el potencial piezométrico equivalente, la razón de referencia y la concentración relativa

$$H = \frac{p}{\rho_0 g} \quad \varepsilon = \frac{\rho_M - \rho_0}{\rho_0} \quad C_r = \frac{C - C_0}{C_M - C_0}$$

en donde ρ_M y C_M son las cotas máximas que alcanzan la densidad y la concentración, se puede obtener la formulación final del problema.

Se propone resolver las ecuaciones (5) para el caso isotrópico, homogéneo y no dispersivo en 2D considerando que la aproximación de Boussinesq es válida. Más exactamente, sea Ω un medio poroso regular, sea $T > 0$, se desea resolver para todo tiempo $t \in (0, T)$ y para todo punto $x \in \Omega$ el problema (P) dado por:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } (H, C, \vec{v}) : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tales que:} \\ m \vec{v} = -\frac{\rho_0 g k}{\mu} (\nabla H + \varepsilon C_r \nabla z) \quad \text{en } Q_T, \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{\mu \alpha} \operatorname{div} \left((1 + \varepsilon C_r) (\nabla H + \varepsilon C_r \nabla z) \right) \quad \text{en } Q_T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} (D_m \nabla C - C \vec{v}) \quad \text{en } Q_T. \end{array} \right. \quad (5)$$

Donde $Q_T = \Omega \times (0, T)$ es el cilindro espacio temporal. La aplicación de este sistema de ecuaciones a un sistema de aguas subterráneas en particular requiere del conocimiento acabado de toda la hidrogeología del sistema. Esto quiere decir, geometría, patrones de carga y descarga e influencias externas, usualmente debido a actividades humanas. Esto equivale a establecer condiciones iniciales y relaciones de frontera de primer, segundo y tercer tipo para H y C .

Usualmente el tratamiento de este tipo de ecuaciones es por medio de esquemas de diferencias finitas o de elementos finitos, siendo estos últimos los más populares y de mayor prestigio. Sin embargo, diferentes autores han reportado problemas en la aplicación de esquemas de elementos finitos a los sistemas de aguas subterráneas^{4,5,7} debido a la violación de la conservación de la masa.

El método de volúmenes finitos es especialmente apropiado para tratar fluidos, al ser su formulación conservativa^{10,11}. El método en sí, no resuelve la ecuaciones diferenciales parciales, sino que las expresiones integrales de (5) que representan los balances de masa en el dominio de interés. En ese sentido, es diferente a los métodos clásicos como las diferencias finitas, a pesar de compartir las fórmulas de derivación numérica. Es un esquema muy estable, ya que hace uso de la grilla traslapada introducida por Harlow and Welch¹², lo que evita la interpolación en los bordes del volumen finito reduciendo la oscilación¹³, pero aún así los problemas pueden aparecer debido a la existencia de convección-difusión que presenta el transporte de soluto. De modo de minimizar la oscilación no física, un esquema de derivación numérica *upwind*¹¹ debe ser utilizado para discretizar los términos convectivos. Es bien conocido que esta ocurre cuando el número de Peclet nodal supera el valor 2, por tanto lo que en efecto se utiliza es un

esquema híbrido que cambie la derivada numérica centrada por un esquema *upwind* de acuerdo a lo dictaminado por el número de Peclet. Con respecto a la evolución en el tiempo, como es usual se utiliza una combinación convexa o δ -esquema, que engloba los esquemas implícitos, explícitos y de Crank-Nicolson. La precisión global de un esquema como este de orden uno, si se utiliza un esquema de Crank-Nicolson se puede alcanzar precisión local de orden dos. Es posible implementar esquemas *upwind* de precisión cuadrática como QUICK¹¹, pero al costo de tener que lidiar con inestabilidad.

Con respecto al tratamiento de las no linealidades estas son abordadas por medio de un esquema de punto fijo. Más precisamente, en primer lugar se debe pasar desde el problema en Q_T a uno en Ω , para ello consideremos la sucesión $\{H^n, C^n, \vec{v}^n\}_{n>0} = \{H(\cdot, t_n), C(\cdot, t_n), \vec{v}(\cdot, t_n)\}_{n>0}$ definida por el δ -esquema (P^n):

$$(P^n) \left\{ \begin{array}{ll} m \vec{v}^n = -\frac{\rho_0 g k}{\mu} (\nabla H^n + \varepsilon C_r^n \nabla z) & \text{en } \Omega, \\ H^n - H^{n-1} = \delta \Delta t \frac{k}{\mu \alpha} \operatorname{div} \left((1 + \varepsilon C_r) (\nabla H + \varepsilon C_r \nabla z) \right)^n + \\ \quad (1 - \delta) \Delta t \frac{k}{\mu \alpha} \operatorname{div} \left((1 + \varepsilon C_r) (\nabla H + \varepsilon C_r \nabla z) \right)^{n-1} & \text{en } \Omega, \\ C^n - C^{n-1} = \delta \Delta t \operatorname{div} \left(D_m \nabla C - C \vec{v} \right)^n + \\ \quad (1 - \delta) \Delta t \operatorname{div} \left(D_m \nabla C - C \vec{v} \right)^{n-1} & \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

Evidentemente, cuando $n = 1$ se requiere de un esquema explícito, ya que sólo la condición inicial es conocida a priori. Naturalmente se requiere cumplir la condición de consistencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\{H^n, C^n, \vec{v}^n\} - \{H(\cdot, t_n), C(\cdot, t_n), \vec{v}(\cdot, t_n)\}\| = 0 \tag{6}$$

Notemos que las ecuaciones en (P^n) son no lineales, para tratar tal problema, consideremos un esquema de punto fijo, para ello se requiere generar una sucesión $\{H^{n,j}, C^{n,j}, \vec{v}^{n,j}\}_{n>0, j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \{H^{n,j}, C^{n,j}, \vec{v}^{n,j}\} = \{H^n, C^n, \vec{v}^n\}$$

y donde los $\{H^{n,j}, C^{n,j}, \vec{v}^{n,j}\}_{n>0, j \in \mathbb{N}}$ son solución de un problema lineal. La formulación linealizada se escribe de la siguiente manera: conocidas las funciones $\{H^{n,j}, C^{n,j}, \vec{v}^{n,j}\}_{n>0} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ se

determinan las $\{H^{n,j+1}, C^{n,j+1}, \vec{v}^{n,j+1}\}_{n>0} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ que resuelvan el problema $(P^{n,j})$

$$(P^{n,j}) \begin{cases} m \vec{v}^{n,j+1} = -\frac{\rho_0 g k}{\mu} (\nabla H^{n,j+1} + \varepsilon C_r^{n,j+1} \nabla z) & \text{en } \Omega, \\ H^{n,j+\frac{1}{2}} - H^{n-1,j+\frac{1}{2}} = \delta \Delta t \frac{k}{\mu \alpha} \operatorname{div} \left((1 + \varepsilon C_r^{n,j}) (\nabla H^{n,j+\frac{1}{2}} + \varepsilon C_r^{n,j} \nabla z) \right) + \\ \quad (1 - \delta) \Delta t \frac{k}{\mu \alpha} \operatorname{div} \left((1 + \varepsilon C_r^{n-1,j}) (\nabla H^{n-1,j+\frac{1}{2}} + \varepsilon C_r^{n-1,j} \nabla z) \right) & \text{en } \Omega, \\ C^{n,j+\frac{1}{2}} - C^{n-1,j+\frac{1}{2}} = \delta \Delta t \operatorname{div} \left(D_m \nabla C^{n,j+\frac{1}{2}} - C^{n,j+\frac{1}{2}} \vec{v}^{n,j+1} \right) + \\ \quad (1 - \delta) \Delta t \operatorname{div} \left(D_m \nabla C^{n-1,j+\frac{1}{2}} - C^{n-1,j+\frac{1}{2}} \vec{v}^{n-1,j+1} \right) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

la actualización real de las variables se realiza por medio de un método de relajación heurística, de modo de amortiguar la oscilación, en efecto, dados $0 \leq \omega \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 1$ se actualiza mediante:

$$H^{n,j+1} = \omega H^{n,j+\frac{1}{2}} + (1 - \omega) H^{n,j}, \tag{7}$$

$$C^{n,j+1} = \theta C^{n,j+\frac{1}{2}} + (1 - \theta) C^{n,j}. \tag{8}$$

Cada una de estas ecuaciones lineales del problema $(P^{n,j})$ se discretiza por medio de volúmenes finitos, alcanzándose dos sistemas lineales, que se pueden resolver por métodos iterativos como GMRES¹⁴, BICGSTAB¹⁵ o por algún método directo como LU¹⁶. Una vez alcanzada la convergencia, es posible ejecutar la siguiente iteración en el tiempo.

4. EXPERIMENTO NUMÉRICO

4.1. El problema de Henry

El problema de Henry es la prueba clásica que se ha de resolver con objeto de probar la habilidad del modelo para tratar con situaciones en que la densidad varía. Sin embargo, Voss and Souza⁷ destaca, que no es suficiente la verificación con este problema, y se han sugerido otros problemas, como el de Elder^{7,17} o el transporte de un trazador en una dimensión^{18,19} del que se conoce una solución exacta como pruebas más completas. El problema de Henry consiste en el flujo saturado bidimensional, en un acuífero confinado que presenta una descarga vertical al mar sobre una cuña difusa que ha intruído en el acuífero. Una solución analítica aproximada fue entregada por Henry²⁰, no se conocen modelos numéricos que hallan dado cuenta de ella^{3,7}, pero muchos esquemas basados en metodologías muy diferentes han entregado resultados similares^{3-5,7,18,21,22}. Se ha sugerido que esta imprecisión probablemente se debe a pérdida de exactitud en la solución original debido a las aproximaciones introducidas⁷.

La geometría se presenta en la figura 1, en conjunto con las condiciones de borde. Los bordes superior e inferior representan zonas impermeables, luego les corresponden condiciones de Neumann sobre la carga hidráulica y sobre la concentración. El borde derecho representa una zona de recarga de agua fresca, luego le corresponden condiciones de Neumann no homogéneas

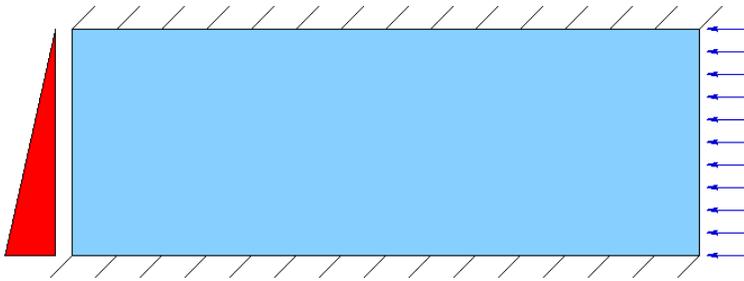


Figura 1: Definición de la intrusión salina de Henry. Los bordes inferior y superior representan superficies impermeables, el borde lateral derecho representa una zona de recarga de agua fresca, el borde izquierdo representa una zona de descarga vertical hacia el mar, correspondiente a un gradiente hidrostático, adicionalmente ocurre la intrusión del agua marina.

sobre la carga y condiciones de Dirichlet sobre la concentración. Si se escoge una concentración nula de soluto, esta relación se escribe como una condición de Dirichlet homogénea. El borde izquierdo corresponde a la zona de salida al mar, por ello se prescribe la carga hidráulica con un perfil hidrostático a modo de condición de Dirichlet no homogénea. La condición sobre la concentración ha sido fruto de debate, Henry²⁰ y Pinder and Cooper¹⁸ utilizaron con éxito una condición de Dirichlet, pero en el contexto de un modelo de elementos finitos Segol et-al.²¹ decidieron reemplazarla por una relación dinámica que permitiera mayor flexibilidad en términos de la capacidad de cálculo en la cuña, que de lo contrario sería muy abrupta, estableciendo una relación de Neumann sobre la concentración (flujo dispersivo) si el fluido sale del dominio y una ecuación de Dirichlet si el fluido entra al dominio. Este tipo de división no se conoce a priori y es necesario implementarla dentro de un contexto iterativo. Tejada et-al.², Durán et-al.³, Toledo²³ hacen uso de otra variante, que es la ocupada en este trabajo, que indica una relación de Robbins si el flujo entra, lo que se interpreta como dos efectos combinados sobre el soluto, a la vez que este hace ingreso por advección, también se produce dispersión. A juicio de los autores este último enfoque resume mucho mejor la dinámica de la cuña salina. En la tabla 1 se resumen los valores de los parámetros ocupados con motivo de este experimento, cuyos resultados pasamos a discutir.

4.2. Resultados

Las pruebas fueron realizadas en un dominio de 20×30 nodos equidistantes. En la figura 2 se observa la distribución de las principales variables de interés en el estado estacionario, arriba se aprecian las líneas de flujo en conjunto con el módulo de la velocidad, en el borde izquierdo se encuentra la descarga al mar que presenta dos zonas claras, un ingreso de agua de mar en la parte inferior del acuífero que es desacelerada debido al encuentro con el agua dulce, evidentemente cuando el agua salada no puede avanzar más, sólo le resta elevarse producto de la boyancia que le confiere su menor peso debido a la mezcla difusiva, que se observa claramente en el gráfico

Cuadro 1: Parámetros ocupados en la modelación del problema de Henry de acuerdo con Voss and Souza⁷.

Parámetro	valor	Parámetro	valor
μ	$1,30 \times 10^{-3}$ kg m/s	g	9,8 m/s ²
D_m	$6,6 \times 10^{-5}$ m ² /s	k	$1,02 \times 10^{-9}$ m ²
ρ_M	1024,99 kg/m ³	C_M	0,0357 kg _s /kg
ρ_0	1000 kg/m ³	C_0	0 kg _s /kg
recarga	$6,6 \times 10^{-4}$ m/s	m	0,35
Largo	2 m	Altura	1 m
α	$1,00 \times 10^{10}$ m s ² /kg		

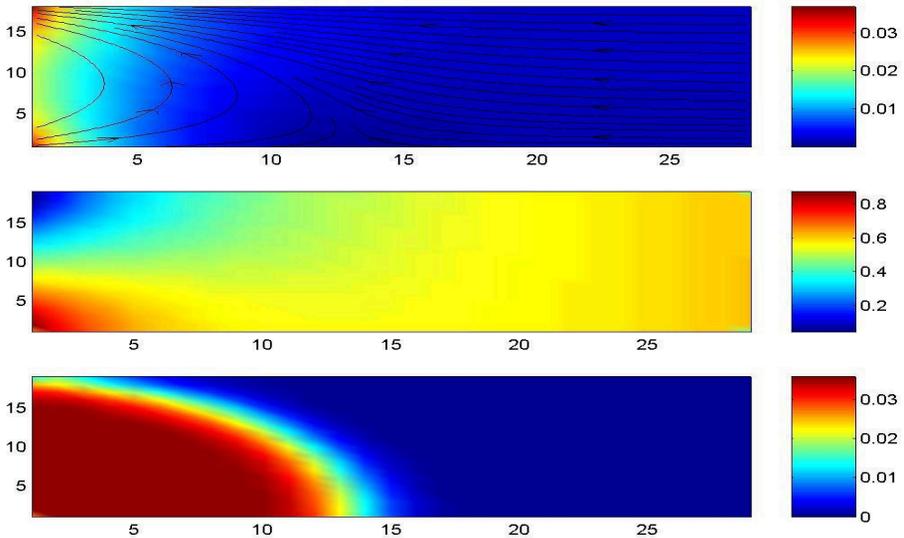


Figura 2: Distribución de las principales variables de interés en régimen estacionario. Ver el texto para la discusión.

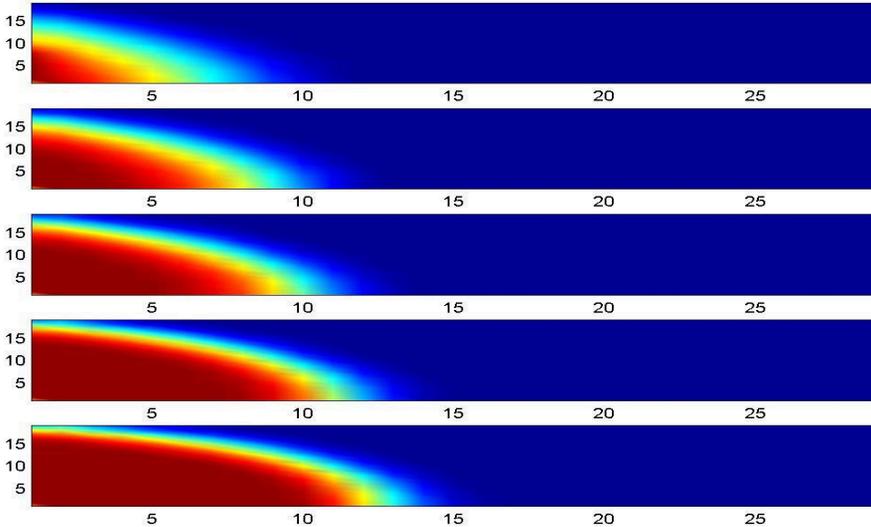


Figura 3: Distribución de las principales variables de interés en régimen transiente. Ver el texto para la discusión.

inferior, donde se presenta la distribución salina, producto de esto el flujo se revierte de dirección para salir por la parte superior formando la cuña salina. Es interesante notar que las isohipsas (líneas de igual carga hidráulica) de la figura central no son paralelas a las isohalinas (líneas de igual concentración salina) como era de esperarse debido a la presencia de difusión. La distribución salina se encuentra en acuerdo con los resultados de Tejeda et~al.², Durán et~al.³, Voss and Souza⁷, en especial la isohalina $C_r = 0,5$.

La figura 3 detalla la evolución temporal de la distribución salina para los tiempos Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, $5\Delta t$, $10\Delta t$ ($\Delta t = 2 \times 10^2/30$ s). Se aprecia un estado inicial muy disperso que evoluciona rápidamente en forma de onda de choque hasta alcanzar un estado invariante dado por el estado de equilibrio del sistema, a medida que avanza el tiempo (desde el gráfico superior al inferior) se observa una concentración cada vez más acotada de la zona de mezcla.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado la primera etapa en el desarrollo de un modelo numérico para el flujo miscible en acuíferos basado en Volúmenes Finitos. El esquema trata las no linealidades por medio de un algoritmo de punto fijo con relajación heurística. Las pruebas del modelo han sido llevadas a cabo con el Problema de Henry, para el cual se han obtenidos buenos resultados, tanto en estado estacionario como en régimen transiente. La formación de un pulso en forma de onda de choque es muy singular en este tipo de fenómenos y es el proceso que mayores

complicaciones trae a los modelos numéricos, debido a su carácter no lineal.

AGRADECIMIENTOS

Mario Durán y Patricio Toledo están financiados parcialmente por el proyecto Fondecyt #1000572.

REFERENCIAS

1. L. Mardones. Características geológicas e hidrogeológicas del Salar de Atacama. In G. Lagos, editor, *El Lito, un nuevo recurso para Chile*, pages 181–216. Editorial Universitaria, Santiago, 1986.
2. I. Tejada, R. Cienfuegos, J.F. Muñoz, and Durán M. Numerical modeling of saline intrusion in the salar de atacama. en prensa *Journal Hydrologic Engineering*, 2002.
3. M. Durán, J.F. Muñoz, and I. Tejada. Modelación del flujo de agua subterránea con densidad variable en salares. sometido a *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2002.
4. G. Carabin and A. Dessargues. Development of a coupled flow and transport 3D model for simulating sea-water intrusions in coastal aquifers. *Natuurwet. Tijdschr.*, 79:35–42, 1999.
5. G. Carabin and A. Dessargues. Modeling groundwater with ocean and river interaction. *Water Resources Research*, 35(8):2347–2358, 1999.
6. J. Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier Publishing Company Inc., 1972.
7. C. Voss and W. Souza. Variable density flow and solute transport simulation of regional aquifers containing a narrow freshwater-saltwater transition zone. *Water Resources Research*, 23(10):1851–1866, 1987.
8. C. Duffy and S. Al-Hassan. Groundwater circulation in a closed desert basin: Topographic scaling and climatic forcing. *Water Resources Research*, 24(10):1675–1688, 1988.
9. S.M. Hassanizadeh and T. Leijnse. On the modeling of brine transport in porous media. *Water Resources Research*, 24(3):321–330, 1988.
10. S. V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, Taylor and Francis Group, New York, 1980.
11. H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. Longman Group Ltd., London, 1995.
12. F. Harlow and M. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.

13. C.A.J Fletcher. *Computational techniques in fluid dynamics*, volume 2 of *Computational Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
14. Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM, J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
15. H. Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM, J. Sci. Stat. Comput.*, 13:631–664, 1992.
16. D.J. Higham and N.J. Highan. *MATLAB guide*. SIAM, Philadelphia, 2000.
17. L. Bergamaschi, A. Mazzia, and M. Putti. A time splitting technique for the solution of density dependent flow and transport in groundwater. Technical report, XIII Int. Conf. Comp. Meth in Wat. Resources, 2000.
18. G.F. Pinder and H.H.Jr. Cooper. A numerical technique for calculating the transient position of the saltwater front. *Water Resources Research*, 6(3):875–882, 1970.
19. A. Mazzia, L. Bergamaschi, and M. Putti. A time-splitting technique for advection-dispersion equation in groundwater. *J. Comp. Phys.*, 157(1):181–198, 2000.
20. H. Henry. Salt intrusion into fresh-water aquifers. *Journal of Geophysical Research*, 64 (11):1911–1919, 1959.
21. G. Segol, G.F. Pinder, and G. Gray. A Galerkin-Finite elements technique for calculating the transient position of the salt water front. *Water Resources Research*, 11(2):343–347, 1975.
22. C. Voss. SUTRA: A finite element simulation model for saturated-unsaturated fluid density-dependent ground water flow with energy transport or chemical-reactive single-species solute transport. Water Resour. Invest. Report 84-4369, U. S. Geol. Surv., 1984.
23. P. Toledo. Modelación y simulación numérica del fenómeno de intrusión salina en acuíferos basada en el método de volúmenes finitos. Memoria para optar al Título de Geólogo, Universidad de Chile, 2002.