

## DINÁMICA DE ENTRAMADOS ESPACIALES DE VIGAS ANISÓTROPAS DE PAREDES DELGADAS

Marcelo T. Piovan\*, Víctor H. Cortínez\*, y Franco Dotti\*

\* Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos  
Universidad Tecnológica Nacional- FRBB,  
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina  
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar>

**Key words:** Vigas de Paredes delgadas anisótropas. Entramados espaciales. Acoplamientos elásticos.

**Abstract.** *En este trabajo se presentan estudios tendientes a analizar el efecto de acoplamientos constitutivos selectivos (provocados por el tipo de material compuesto) en la dinámica de entramados espaciales de vigas anisótropas de paredes delgadas. Para ello se emplea la formulación numérica de elementos finitos del caso de vigas rectas derivado de un modelo general de vigas anisótropas introducido por los autores. Como objetivo secundario el esquema de elementos finitos es programado en una plataforma numérica y simbólica como Mathematica, la cual permite indistintamente su aplicación a fines netamente prácticos como académicos.*

## 1 INTRODUCTION

Los modelos de vigas de paredes delgadas han prestado una utilidad fundamental, en el análisis de estructuras reticulares de entramados planos y espaciales <sup>[1]</sup>. En virtud de la necesidad de aligerar peso y mejorar la respuesta estructural, en términos generales, paulatinamente se están empleando vigas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos <sup>[2]</sup>. Muchos modelos matemáticos de vigas de paredes delgadas se han empleado en el análisis de problemas dinámicos de entramados espaciales <sup>[3]</sup>, sin embargo, la mayoría de estos modelos o bien no contemplan efectos de deformabilidad por corte o bien contemplan tales efectos en forma parcial. Se ha comprobado <sup>[4,5]</sup> que la deformabilidad por corte debida al alabeo no uniforme tiene una influencia sustancial en la dinámica de vigas abiertas de paredes delgadas, tanto para materiales isotropos como compuestos laminados.

Autores como Batoz y colaboradores<sup>[6]</sup>, enfocaron el estudio de entramados espaciales sustentando su análisis en modelos con flexibilidad por corte parcial debida solamente a flexión pero no por alabeo no uniforme. Estos autores emplearon un esquema numérico basado en el método de elementos finitos, contemplando la flexibilidad adicional de las uniones ponderadas por medio de constantes de resorte. En tales estudios sobre la respuesta estática y la inestabilidad de miembros estructurales isotropos, se ha observado que las cargas de pandeo son muy sensibles a los cambios en la flexibilidad de las uniones. Shen y colaboradores<sup>[2]</sup> analizaron diferentes formas de ensamblar vigas cajón construidas con materiales compuestos laminados, con el objetivo de formar entramados o bien estructuras compactas y fáciles de transportar, las cuales pueden ser empleadas como puentes o plataformas.

Entre las diferentes formas de construcción de perfiles estándar como las secciones cajón o los perfiles H, U, etc, se encuentra el método de pultrusion, que permite ubicar refuerzos de fibras en diversos ángulos simétricos y opuestos. En este sentido, la confección estructural (del inglés “structural tailorig”) de los laminados seccionales, es de fundamental importancia establecer la o las secuencia de laminación que permitan acotar la respuesta de una estructura, entre patrones determinados.

El interés de este artículo reside en evaluar diferentes aspectos modelación en la dinámica de entramados espaciales construidos con vigas anisótropas de perfiles cerrados o abiertos, atendiendo a la forma de los laminados y de los acoplamientos elásticos selectivos que se pueden predisponer en los laminados para favorecer determinada respuesta. Se establecen las características de laminación que favorecen los acoplamientos extensionales-torsionales y flexionales-torsionales en secciones cajón y perfiles H, describiendo apropiadamente sus expresiones constitutivas

Para llevar a cabo este estudio se emplea un esquema de cálculo de elementos finitos basado en una teoría de vigas rectas anisótropas deformables por corte desarrollada por los autores<sup>[7]</sup>. La teoría de vigas anisótropas que contempla el efecto de corte flexional y el torsional, se introduce sucintamente junto con la formulación de entramados espaciales con el método de elementos finitos, para lo cual se utiliza un elemento sin bloqueo por corte. La implementación del método de elementos finitos se ha efectuado sobre el programa de matemática simbólica y numérica “*Mathematica*”, con el fin de poder utilizar las facilidades

de programación y representación. Finalmente se efectúan estudios de la variación de las frecuencias de acuerdo al tipo de laminado que se emplee, junto con las formas de vibración que se suscitan al emplear acoplamientos elásticos selectivos.

## 2 DESCRIPCION DEL MODELO TEORICO

En la Figura 1.a se describe el elemento estructural con el sistema de referencia dextrógiro en tanto que en la Figura 1.b se describen los desplazamientos generalizados ubicados en el sistema de referencia principal  $\{C:x,y,z\}$  ubicado en el centroide geométrico de la sección. De manera que  $u_{xc}$ ,  $u_{yc}$  y  $u_{zc}$  son los desplazamientos del centroide,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  son las rotaciones flexionales,  $\phi_x$  es la rotación torsional y  $\theta_x$  es una magnitud de intensidad de alabeo. Nótese que la rotación  $\theta_y$  se ha definido opuesta respecto de su eje, esto se ha hecho deliberadamente, para poder condensar rutinas de cálculo en *Mathematica*.

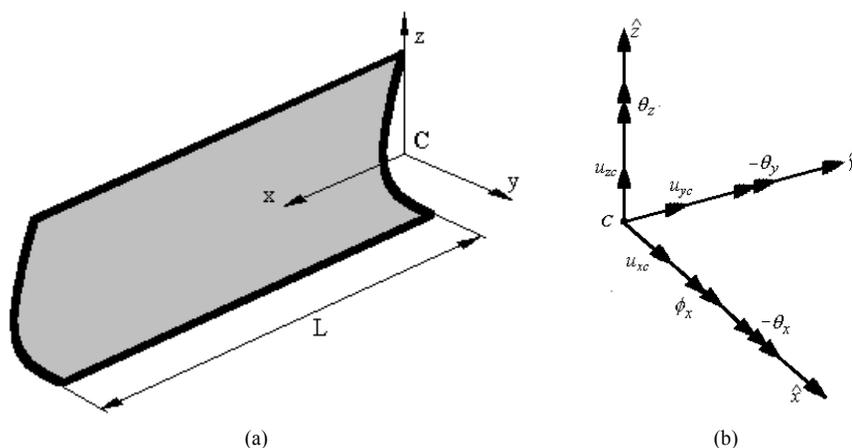


Figura 1. Descripción del modelo estructural y de sus sistemas de referencia

El modelo de viga se basa en las siguientes suposiciones:

- (1) la sección es indeformable en su plano.
- (2) La sección se considera compuesta por una sucesión de placas.
- (3) La función de alabeo consta de dos componentes de alabeo: primario y secundario.
- (4) Se supone que la densidad  $\rho$  es la misma para todas las láminas de la sección.

Bajo estas prerrogativas, la expresión del principio de trabajos virtuales para canalizar problemas de dinámica en una viga recta deformable por corte, viene representada de acuerdo con la siguiente forma<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} = & \int \left( \mathbf{Q}_x \delta u'_{xc} - \mathbf{M}_Y \delta \theta'_y - \mathbf{M}_Z \delta \theta'_z - \mathbf{B} \delta \theta'_x + \mathbf{T}_{SV} \delta \phi'_x \right) dx + \\
 & + \int \left[ \mathbf{Q}_Y \delta (u'_{yo} - \theta_z) + \mathbf{Q}_Z \delta (u'_{zo} - \theta_y) + \mathbf{T}_W \delta (\phi'_x - \theta_x) \right] dx + \\
 & + \int \left[ \mathbf{J}_{11}^p (\ddot{u}_{yc} \delta u_{yc} + \ddot{u}_{zc} \delta u_{zc} + \ddot{u}_{xc} \delta u_{xc}) + \mathbf{J}_{00}^p \ddot{\phi}_x \delta \phi_x + \mathbf{J}_{44}^p \ddot{\theta}_x \delta \theta_x \right] dx + \\
 & + \int \left[ \mathbf{J}_{22}^p \ddot{\theta}_y \delta \theta_y + \mathbf{J}_{33}^p \ddot{\theta}_z \delta \theta_z + \mathbf{J}_{23}^p (\ddot{\theta}_y \delta \theta_z + \ddot{\theta}_z \delta \theta_y) \right] dx \\
 & + \int \left[ \mathbf{J}_{24}^p (\ddot{\theta}_y \delta \theta_x + \ddot{\theta}_x \delta \theta_y) + \mathbf{J}_{34}^p (\ddot{\theta}_z \delta \theta_x + \ddot{\theta}_x \delta \theta_z) \right] dx = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

En la expresión (1), las primas significan derivación respecto de la variable espacial y los dos puntos significan derivadas temporales.  $\mathbf{Q}_x$  es el esfuerzo normal.  $\mathbf{Q}_Y$  y  $\mathbf{Q}_Z$  son los esfuerzos de corte.  $\mathbf{M}_Y$  y  $\mathbf{M}_Z$  son los momentos flectores.  $\mathbf{B}$  es el bimomento.  $\mathbf{T}_W$  y  $\mathbf{T}_{SV}$  son los momentos flexotorsor y de torsión de Saint Venant, respectivamente. Las  $\mathbf{J}_{ij}^p$ ,  $i, j = 2, 3, 4$  son inercias rotatorias flexionales, de alabeo y de acoplamiento, en tanto que  $\mathbf{J}_{11}^p$  y  $\mathbf{J}_{00}^p$  son las inercias de translación y de rotación, respectivamente. Los esfuerzos vienen descriptas con las siguientes expresiones generales para una viga anisótropa:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{M}_Y \\ \mathbf{M}_Z \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{Q}_Y \\ \mathbf{Q}_Z \\ \mathbf{T}_W \\ \mathbf{T}_{SV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{11} & \mathbf{J}_{12}^{11} & \mathbf{J}_{13}^{11} & \mathbf{J}_{14}^{11} & \mathbf{J}_{15}^{16} & \mathbf{J}_{16}^{16} & \mathbf{J}_{17}^{16} & \mathbf{J}_{18}^{16} \\ & \mathbf{J}_{22}^{11} & \mathbf{J}_{23}^{11} & \mathbf{J}_{24}^{11} & \mathbf{J}_{25}^{16} & \mathbf{J}_{26}^{16} & \mathbf{J}_{27}^{16} & \mathbf{J}_{28}^{16} \\ & & \mathbf{J}_{33}^{11} & \mathbf{J}_{34}^{11} & \mathbf{J}_{35}^{16} & \mathbf{J}_{36}^{16} & \mathbf{J}_{37}^{16} & \mathbf{J}_{38}^{16} \\ & & & \mathbf{J}_{44}^{11} & \mathbf{J}_{45}^{16} & \mathbf{J}_{46}^{16} & \mathbf{J}_{47}^{16} & \mathbf{J}_{48}^{16} \\ & & & & \mathbf{J}_{55}^{66} & \mathbf{J}_{56}^{66} & \mathbf{J}_{57}^{66} & \mathbf{J}_{58}^{66} \\ & & & & & \mathbf{J}_{66}^{66} & \mathbf{J}_{67}^{66} & \mathbf{J}_{68}^{66} \\ & & & & & & \mathbf{J}_{77}^{66} & \mathbf{J}_{78}^{66} \\ & & & & & & & \mathbf{J}_{88}^{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{xc} \\ -\theta'_y \\ -\theta'_z \\ -\theta'_x \\ u'_{yc} - \theta_z \\ u'_{zc} - \theta_y \\ \phi'_x - \theta_x \\ \phi'_x \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Los elementos de la matriz (2) constitutiva de los esfuerzos y las inercias se obtienen con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{J}_{ij}^{kh} = \int \overline{A}_{kh} \left( \overline{g}_i^{(b)} \overline{g}_j^{(b)} \right) ds + \int \overline{B}_{kh} \left( \overline{g}_i^{(b)} \overline{g}_j^{(d)} + \overline{g}_i^{(d)} \overline{g}_j^{(b)} \right) ds + \int \overline{D}_{kh} \left( \overline{g}_i^{(d)} \overline{g}_j^{(d)} \right) ds \tag{3}$$

$$\mathbf{J}_{ij}^p = \int_{\mathcal{S}_s} \rho \overline{g}_i^{(d)} \overline{g}_j^{(d)} dA \tag{4}$$

donde los  $\overline{g}^{(j)}$  se definen a continuación:

$$\bar{g}^{(a)} = \left\{ 1, Z, Y, \omega_p, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \psi, \psi \right\}, \quad \bar{g}^{(b)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dZ}{ds}, -\frac{dY}{ds}, -l(s), 0 \right\} \quad (5)$$

$$\bar{g}^{(c)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, 1, -2 \right\}, \quad \bar{g}^{(d)} = \left\{ 1, Z + n \frac{dY}{ds}, Y - n \frac{dZ}{ds}, \omega \right\} \quad (6)$$

En la expresión (3) los coeficientes de elasticidad del laminado:  $\bar{A}_{ij}$ ,  $\bar{B}_{ij}$  y  $\bar{D}_{ij}$  de acuerdo a la Referencia [8], suponiendo estado plano de tensiones. En (5),  $\{Y, Z\}$  son las coordenadas de un punto que yace sobre la línea media de la pared seccional, donde la coordenada  $n=0$ .  $\omega$  es la función de alabeo completa, que se define con dos partes: alabeo primario ( $\omega_p$ ) y alabeo secundario o en el espesor ( $\omega_s$ ) los cuales se describen como sigue:

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} \omega_p(s) &= \int_C [r(s) - \psi(s)] ds - D_C \\ \omega_s(s, n) &= -n l(s) \end{aligned} \quad (8)$$

La función  $\psi(s)$  da una medida de la variación de la tensión membranal de corte  $\sigma_{xs}$  a lo largo del perímetro de la línea media de la sección. La constante  $D_C$  se utiliza para normalizar la función de alabeo respecto del origen  $C$ . La función de alabeo para secciones abiertas se obtiene de (8), pero teniendo en cuenta que  $\psi(s) = 0$ . La expresión (7) es válida en forma general tanto en el contexto de materiales isotrópicos como en el contexto de materiales compuestos. Aún así, la obtención de  $\psi(s)$  y  $D_C$  puede ser diferente para los dos tipos de materiales, siendo más compleja en el caso de materiales compuestos, ya que en este caso aquella depende de las propiedades elásticas además de las propiedades geométricas dentro de la sección. Así pues,  $\psi(s)$  y  $D_C$  se pueden obtener en una forma aproximada pero sumamente práctica de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\psi(s) = \frac{l}{A_{66}(s)} \left[ \frac{\int_S r(s) ds}{\int_S \frac{1}{A_{66}(s)} ds} \right], \quad D_C = \frac{\int_S [r(s) - \psi(s)] \bar{A}_{1l}(s) ds}{\int_S \bar{A}_{1l}(s) ds} \quad (9)$$

Donde “S” se debe entender como el dominio de definición de la coordenada “s”.

## 2.1 Descripción de acoplamientos selectivos en secciones abiertas y cerradas

Los perfiles abiertos H y los rectangulares cerrados, son los más comúnmente empleados en distintas aplicaciones de ingeniería estructural. Las secciones cajón poseen dos tipos distintivos de laminados que permiten establecer acoplamientos que pueden beneficiar el comportamiento de una estructura, tales laminados se denominan de acuerdo con su siglas en

inglés, como CAS (circunferentially asymeric stiffness) y CUS (circunferentially uniform stiffness)<sup>[9]</sup>. El primero de ellos favorece un acoplamiento elástico, flexional y torsional, independiente de la simetría de la sección. El segundo favorece un acoplamiento extensional – torsional y un acoplamiento elástico entre los movimientos flexionales perpendiculares. Las perfiles abiertos H también poseen laminados que permiten las dos características de acoplamiento mencionadas anteriormente. Aunque la denominación CAS y CUS ha sido acuñada para secciones cajón, aquí se la empleará como forma genérica para describir los acoplamientos flexional-torsional y extensional-torsional, respectivamente. En la Tabla 1 se pueden apreciar las disposiciones de los laminados para cada sección correspondientes a los acoplamientos de tipo CAS y CUS, junto con sus expresiones constitutivas.

Acoplamiento tipo CAS	
	$\begin{Bmatrix} Q_x \\ M_Y \\ M_Z \\ B \\ Q_Y \\ Q_Z \\ T_W \\ T_{SV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & J_{15}^{16} & J_{16}^{16} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{27}^{16} & J_{28}^{16} \\ 0 & 0 & J_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 & J_{37}^{16} & J_{38}^{16} \\ 0 & 0 & 0 & J_{44}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{15}^{16} & 0 & 0 & 0 & J_{55}^{66} & 0 & 0 & 0 \\ J_{16}^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{66}^{66} & 0 & 0 \\ 0 & J_{27}^{16} & J_{37}^{16} & 0 & 0 & 0 & J_{77}^{66} & J_{78}^{66} \\ 0 & J_{28}^{16} & J_{38}^{16} & 0 & 0 & 0 & J_{78}^{66} & J_{88}^{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{xc} \\ -\theta'_y \\ -\theta'_z \\ -\theta'_x \\ u'_{yc} \\ u'_{zc} \\ \phi'_x \\ \phi'_x \end{Bmatrix}$
Acoplamiento tipo CUS	
	$\begin{Bmatrix} Q_x \\ M_Y \\ M_Z \\ B \\ Q_Y \\ Q_Z \\ T_W \\ T_{SV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{17}^{16} & J_{18}^{16} \\ 0 & J_{22}^{11} & 0 & 0 & J_{25}^{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^{11} & 0 & 0 & J_{36}^{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{44}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{25}^{16} & 0 & 0 & J_{55}^{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{36}^{16} & 0 & 0 & J_{66}^{66} & 0 & 0 \\ J_{17}^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{77}^{66} & J_{78}^{66} \\ J_{18}^{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{78}^{66} & J_{88}^{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{xc} \\ -\theta'_y \\ -\theta'_z \\ -\theta'_x \\ u'_{yc} \\ u'_{zc} \\ \phi'_x \\ \phi'_x \end{Bmatrix}$

Tabla 1. Descripción de la disposición de los laminados y sus expresiones constitutivas

Así pues, en la Tabla 1 se puede ver el acoplamiento existente entre los momentos flectores  $M_Y$  y  $M_Z$  y los momentos torsores  $T_W$  y  $T_{SV}$  para las configuraciones CAS, y el acoplamiento entre el esfuerzo normal  $Q_x$  y los momentos torsores  $T_W$  y  $T_{SV}$ . y por el

acoplamiento entre los momentos flectores  $M_Y$  y  $M_Z$  y los esfuerzos de corte  $Q_Y$  y  $Q_Z$  en el caso de las configuraciones CUS.

### 2.2 Implementación numérica de los entramados

Cortínez y Rossi<sup>[5]</sup>, desarrollaron un elemento finito que ha sido empleado con éxito en problemas de estática y dinámica de vigas rectas isótropas. En este artículo se lo emplea en entramados espaciales de vigas anisótropas. Este elemento finito de dos nodos y siete grados de libertad por nodo, puede reducirse para considerar la teoría sin deformabilidad por corte, evitando el problema espurio de bloqueos por corte. El elemento de longitud  $L_e$ , se describe en la siguiente figura.

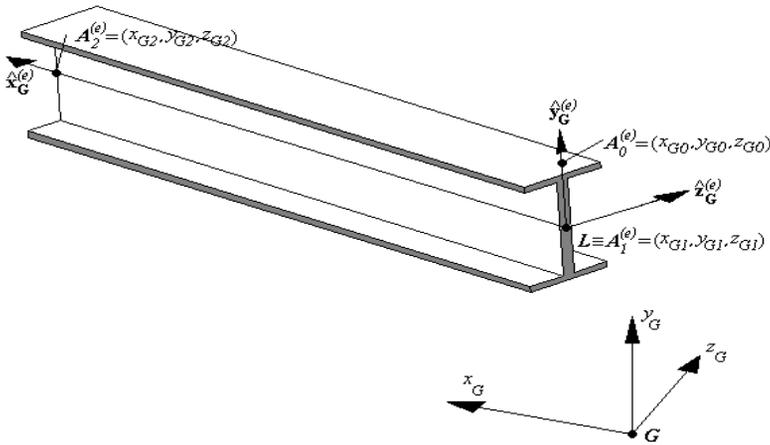


Figura 2. Descripción del elemento finito en el espacio y sus sistemas de referencia

En la Figura 2 se observan el sistema de referencia local  $\{L: x_L, y_L, z_L\}$ , perteneciente al elemento y el sistema de referencia global  $\{G: x_G, y_G, z_G\}$  correspondiente a la estructura, en el cual están definidas las coordenadas de todos los puntos nodales  $A_i^{(e)}$ .

Así pues, los desplazamientos dentro del elemento se pueden describir en forma genérica como:

$$\{U\} = [F] \{U^{(e)}\} \quad (10)$$

siendo

$$\{U\} = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\}^T \quad (11)$$

$$\{U^{(e)}\} = \{u_{xc1}, u_{yc1}, \theta_{z1}, u_{zc1}, \theta_{y1}, \phi_{x1}, \theta_{x1}, u_{xc2}, u_{yc2}, \theta_{z2}, u_{zc2}, \theta_{y2}, \phi_{x2}, \theta_{x2}\}^T \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{F}_1] &= [\mathbf{f}_{11}(\bar{x}) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{12}(\bar{x}) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 [\mathbf{F}_2] &= [0 \ \mathbf{f}_{21}(\bar{x}, \Theta_1) \ \mathbf{f}_{22}(\bar{x}, \Theta_1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{23}(\bar{x}, \Theta_1) \ \mathbf{f}_{24}(\bar{x}, \Theta_1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 [\mathbf{F}_3] &= [0 \ \mathbf{f}_{31}(\bar{x}, \Theta_1) \ \mathbf{f}_{32}(\bar{x}, \Theta_1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{33}(\bar{x}, \Theta_1) \ \mathbf{f}_{34}(\bar{x}, \Theta_1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 [\mathbf{F}_4] &= [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{21}(\bar{x}, \Theta_2) \ \mathbf{f}_{22}(\bar{x}, \Theta_2) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{23}(\bar{x}, \Theta_2) \ \mathbf{f}_{24}(\bar{x}, \Theta_2) \ 0 \ 0] \\
 [\mathbf{F}_5] &= [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{31}(\bar{x}, \Theta_2) \ \mathbf{f}_{32}(\bar{x}, \Theta_2) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{33}(\bar{x}, \Theta_2) \ \mathbf{f}_{34}(\bar{x}, \Theta_2) \ 0 \ 0] \\
 [\mathbf{F}_6] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{21}(\bar{x}, \Theta_3) \ \mathbf{f}_{22}(\bar{x}, \Theta_3) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{23}(\bar{x}, \Theta_3) \ \mathbf{f}_{24}(\bar{x}, \Theta_3)] \\
 [\mathbf{F}_7] &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{31}(\bar{x}, \Theta_3) \ \mathbf{f}_{32}(\bar{x}, \Theta_3) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{f}_{33}(\bar{x}, \Theta_3) \ \mathbf{f}_{34}(\bar{x}, \Theta_3)]
 \end{aligned} \tag{13}$$

donde las funciones de forma  $\mathbf{f}_{ij}$  se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{11}(\bar{x}) &= 1 - \bar{x}, \quad \mathbf{f}_{12}(\bar{x}) = \bar{x} \\
 \mathbf{f}_{21}(\bar{x}) &= \frac{1 + \Theta_i(1 - \bar{x}) - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3}{(1 + \Theta_i)}, \quad \mathbf{f}_{22}(\bar{x}) = \frac{[2 + \Theta_i - (4 + \Theta_i)\bar{x} - 2\bar{x}^2]\bar{x}L_e}{2(1 + \Theta_i)} \\
 \mathbf{f}_{23}(\bar{x}) &= \frac{(\Theta_i + 3\bar{x} - 2\bar{x}^2)\bar{x}}{(1 + \Theta_i)}, \quad \mathbf{f}_{24}(\bar{x}) = \frac{[-\Theta_i - (2 - \Theta_i)\bar{x} + 2\bar{x}^2]\bar{x}L_e}{2(1 + \Theta_i)} \\
 \mathbf{f}_{31}(\bar{x}) &= \frac{6(\bar{x} - 1)\bar{x}}{(1 + \Theta_i)L_e}, \quad \mathbf{f}_{32}(\bar{x}) = \frac{1 + \Theta_i - (4 + \Theta_i)\bar{x} + 3\bar{x}^2}{(1 + \Theta_i)} \\
 \mathbf{f}_{33}(\bar{x}) &= \frac{6(1 - \bar{x})\bar{x}}{(1 + \Theta_i)L_e}, \quad \mathbf{f}_{34}(\bar{x}) = \frac{[\Theta_i - 2 + 3\bar{x}]\bar{x}}{(1 + \Theta_i)}
 \end{aligned} \tag{14}$$

con

$$\Theta_1 = \frac{12\mathbf{J}_{33}^{11}}{\mathbf{J}_{55}^{66}L_e^2}, \quad \Theta_2 = \frac{12\mathbf{J}_{22}^{11}}{\mathbf{J}_{66}^{66}L_e^2}, \quad \Theta_3 = \frac{12\mathbf{J}_{44}^{11}}{\mathbf{J}_{77}^{66}L_e^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_e} \quad \text{con } \bar{x} \in [0, 1] \tag{15}$$

De manera que las deformaciones por corte son constantes y se pueden reducir a cero (es decir, a la teoría sin deformabilidad por corte) al anular las  $\Theta_i$ , como se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned}
 u'_{yc} - \theta_z &= \frac{\Theta_1}{1 + \Theta_1} \left[ \left( \frac{u_{yc2} - u_{yc1}}{L_e} \right) - \left( \frac{\theta_{z2} - \theta_{z1}}{2} \right) \right] \\
 u'_{zc} - \theta_y &= \frac{\Theta_2}{1 + \Theta_2} \left[ \left( \frac{u_{zc2} - u_{zc1}}{L_e} \right) - \left( \frac{\theta_{y2} - \theta_{y1}}{2} \right) \right] \\
 \phi'_x - \theta_x &= \frac{\Theta_3}{1 + \Theta_3} \left[ \left( \frac{\phi_{x2} - \phi_{x1}}{L_e} \right) - \left( \frac{\theta_{x2} - \theta_{x1}}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

Téngase presente que las expresiones anteriores correspondientes a los desplazamientos

nodales generalizados, están descriptas en el sistema de referencia local del elemento, luego los mencionados desplazamientos se describen en el sistema de referencia global con la siguiente transformación:

$$\{\mathbf{U}^{(e)}\}_L = [\mathbf{T}_{LG}^{(e)}] \{\mathbf{U}^{(e)}\}_G \quad (17)$$

Donde  $[\mathbf{T}_{LG}^{(e)}]$  es la matriz de transformación del elemento del sistema global al local. La cual viene dada por:

$$[\mathbf{T}_{LG}^{(e)}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{LGI}^{(e)}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{T}_{LGI}^{(e)}] \end{bmatrix} \quad (18)$$

con  $[\mathbf{T}_{LGI}^{(e)}]$  definido como:

$$[\mathbf{T}_{LGI}^{(e)}] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 & v_{13} & 0 & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & v_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{33} & 0 & v_{32} & v_{31} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & 0 & v_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_{23} & 0 & -v_{22} & v_{21} & 0 \\ 0 & 0 & v_{13} & 0 & v_{12} & v_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Donde  $v_{ij}$  son los cosenos directores de la transformación. En la quinta fila de la submatriz  $[\mathbf{T}_{LGI}^{(e)}]$  se puede observar el valor negativo de los cosenos directores. Esto es necesario para mantener la compatibilidad de desplazamientos y rotaciones globales, puesto que por razones de comodidad en la formulación original<sup>[5]</sup>, la variable  $\theta$ , se introdujo con signo negativo. Por otro lado, la variable de alabeo al ser un escalar, se la considera bajo una transformación directa, de allí el valor unitario en la fila y columna séptimas de  $[\mathbf{T}_{LGI}^{(e)}]$ .

Luego reemplazando (10)-(18) en (1) y operando en la forma habitual se obtiene la siguiente expresión general:

$$([\mathbf{K}]_G - \Omega^2 [\mathbf{M}]_G) \{\mathbf{W}\}_G = \{\mathbf{0}\} \quad (20)$$

siendo  $[\mathbf{K}]_G$ ,  $[\mathbf{M}]_G$  y  $\{\mathbf{W}\}_G$ , la matriz de rigidez global, la matriz de masa global y el vector global de desplazamientos nodales, referidos en el sistema  $\{\mathbf{G}:x_G, y_G, z_G\}$ .  $\Omega$  es la frecuencia circular, tal que  $\Omega = 2 \pi f$ , siendo  $f$  la frecuencia medida en Hertz.

### 3 ANÁLISIS DE CASOS

#### 3.1 Un ejemplo de entramado plano

En la Figura 3 se puede apreciar un pórtico biempotrado de material isótropo. Para las

vibraciones en el plano de este tipo de entramado existen soluciones analíticas<sup>[10]</sup> cuando se emplea un modelo de vigas no deformables por corte (i.e. Bernoulli-Euler). En la Tabla 1 se muestra la comparación y la convergencia a la solución exacta (donde se considera infinita rigidez axial<sup>[10]</sup> y los conexiones articuladas) de las primeras 4 frecuencias adimensionales de la solución de elementos finitos del esquema que desprecia la flexibilidad por corte. Cada tramo de longitud  $L$  se divide en  $N_E$  elementos. Paralelamente se comparan las respuestas de los modelos de elementos finitos de viga recta que consideran (*MCFC*) y desprecian (*MSFC*) la deformabilidad por corte.

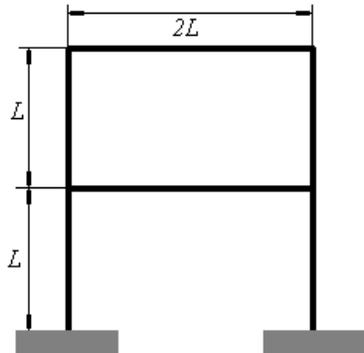


Figura 3. Descripción del entramado biempotrado

El coeficiente de frecuencia adimensional se define de la siguiente forma:

$$\Lambda = \Omega L^2 \sqrt{\frac{J_{11}^p}{J_{22}^{11}}} \tag{21}$$

Coef. de Frecuencia	MSFC				MCFC
	$N_E=2$	$N_E=4$	$N_E=8$	Exacto <sup>[10]</sup>	$N_E=4$
$\Lambda_1$	1.0555	1.0554	1.0554	1.0554	1.0447
$\Lambda_2$	3.7182	3.7172	3.7154	3.7165	3.6627
$\Lambda_3$	3.9474	3.9282	3.9189	3.9124	3.8814
$\Lambda_4$	4.7448	4.7152	4.6889	4.6866	4.6214

Tabla 1. Convergencia de las Frecuencias adimensionales y comparación de las soluciones de MSFC y MCFC

### 3.2 Ejemplo de un entramado espacial construido con perfiles laminados

En la Figura 4 se puede apreciar una estructura reticular en el espacio construida con vigas de materiales compuestos. Los puntos de conexión se consideran sobre dos posible hipótesis convencionales de cálculo<sup>[6]</sup>: (1) rígidos y (2) articulados.

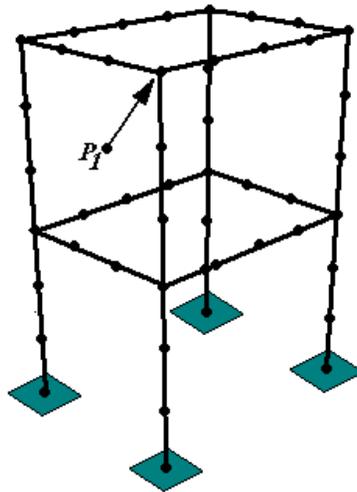


Figura 4. Entramado espacial de vigas anisótropas.

Se analizan los dos tipos de secciones con las configuraciones CAS y CUS que se muestran en la Tabla 1. Las dimensiones de la sección cajón son  $h = 0.05$  m y  $b = 0.1$  m, para la sección abierta,  $h = 0.1$  m y  $b = 0.05$  m, el espesor  $e = 0.01$  m, es constante en cada segmento de las dos secciones. La longitud de cada segmento recto del reticulado de Figura 4, es  $L_S = 1.5$  m. El material de las vigas es de resina epoxy reforzado con fibras de carbono, denominado AS4/3501-6, cuyas propiedades se representan en la Tabla 2.

---


$$E_{11} = 141.9 \text{ GPa}, E_{22} = 9.79 \text{ GPa}, G_{12} = 6.00 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.24, \rho = 1390 \text{ Kg/m}^3$$


---

Tabla 2. Propiedades del material AS4/3501-6

En la Tabla 3 se muestra la variación de las primeras cuatro frecuencias del reticulado con respecto al ángulo de orientación de las fibras del laminado CAS de la sección cajón, suponiendo conexiones rígidas y articuladas. Se puede apreciar un incremento en las frecuencias obtenidas con la suposición de conexiones rígidas, lo cual era de esperarse principalmente en las frecuencias superiores. En la Figura 5 se pueden observar los modos de vibración correspondientes a la segunda y tercer frecuencias de la estructura, con el perfil seccional con refuerzos a  $5^\circ$ . Nótese los cambios abruptos en los modos de vibración, con la modificación del criterio de modelación de las conexiones. En la Tabla 4 y en la Figura 6 se muestra la información correspondiente al reticulado empleando un perfil cerrado de laminación CUS.

$\alpha$ [°]	$f_1$		$f_2$		$f_3$		$f_4$	
	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]
5	16.23	16.21	38.52	22.36	53.60	23.71	75.88	53.46
15	15.01	15.44	38.25	21.63	51.36	23.01	74.10	50.90
30	13.86	13.79	35.23	19.44	46.03	21.10	67.16	45.67
45	12.74	12.72	32.21	17.81	42.39	19.45	61.35	42.28

Tabla 3. Comparación de las frecuencias con conexiones rígidas [I] articuladas [II] del reticulado construido con perfiles rectangulares de laminados tipo CUS

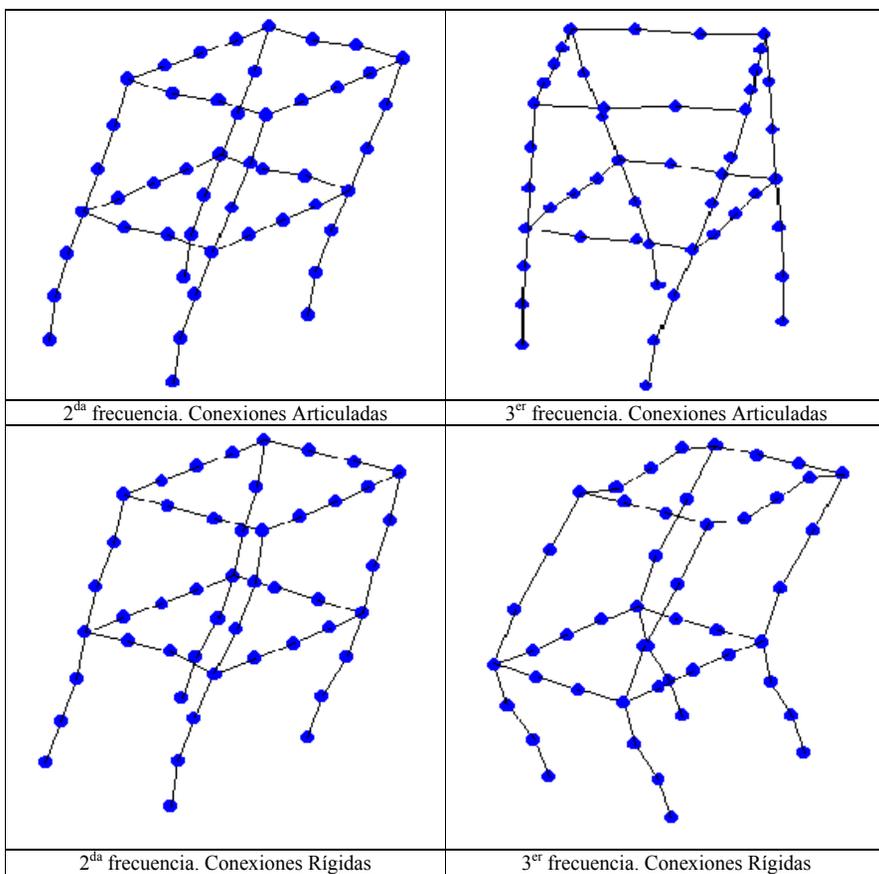


Figura 5. Segunda y tercera frecuencias del reticulado espacial construido con perfiles cerrados CAS

$\alpha$ [°]	$f_1$		$f_2$		$f_3$		$f_4$	
	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]
5	16.18	16.17	38.56	22.33	53.54	23.77	75.89	53.46
15	15.45	15.44	38.42	21.59	51.37	23.15	74.05	51.26
30	13.91	13.91	36.68	19.52	46.38	21.37	67.32	46.31
45	12.74	12.74	32.25	17.83	42.47	19.62	61.42	42.42

Tabla 4. Comparación de las frecuencias con conexiones rígidas [I] articuladas [II] del reticulado construido con perfiles rectangulares de laminados tipo CUS

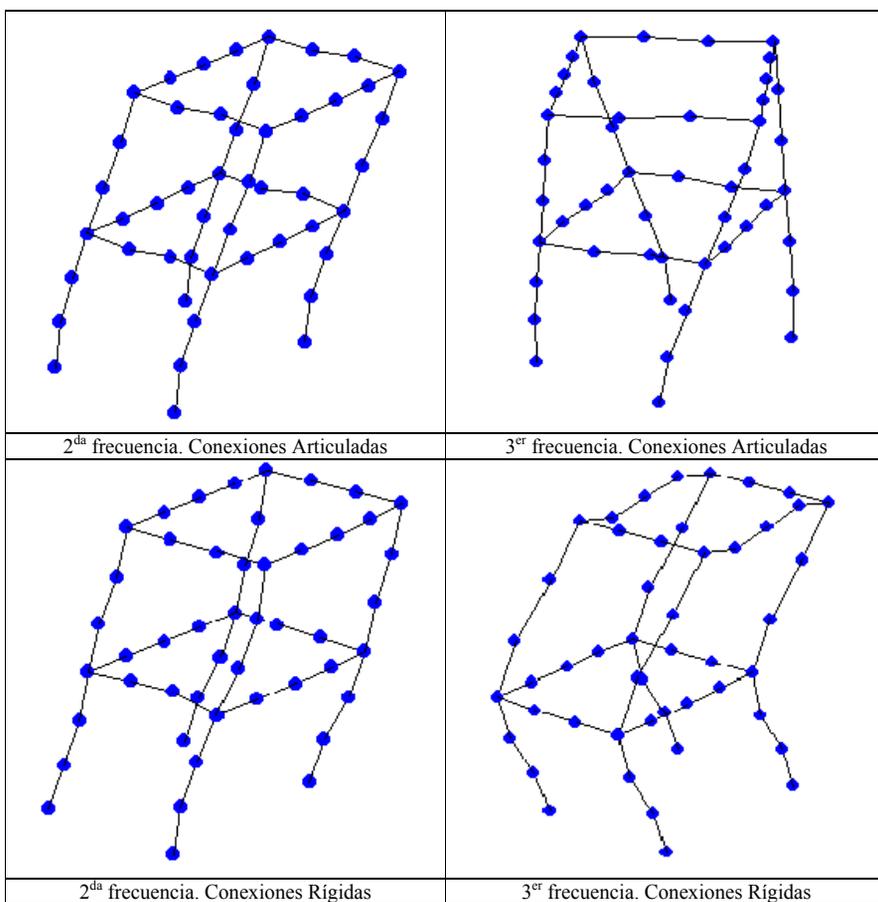


Figura 6. Segunda y tercera frecuencias del reticulado espacial construido con perfiles cerrados CUS

Si se comparan las frecuencias obtenidas empleando perfiles de laminación CAS o CUS no se obtiene una diferencia apreciable, sea utilizando conexiones rígidas, sea utilizando

conexiones articuladas. Otro tanto, parecería ocurrir con las formas de los modos de vibración. Sin embargo es posible establecer diferencias de comportamiento cualitativo y cuantitativo, con respecto al ángulo de laminación.

Así pues en las Figura 7 y 8 se puede observar la variación del desplazamiento (normalizado con respecto a la longitud de cada segmento,  $L_S$ ) del punto  $P_I$  (Figura 4) con respecto al ángulo de laminación, de la primera y segunda frecuencias del reticulado con conexiones articuladas, construido con vigas de perfiles cajón bajo cuatro tipos de laminados, denominados CAS1, CAS2, CUS1 y CUS2, cuyas configuraciones se muestran en la Tabla 5. Se puede, observar que las secuencias de laminación de tipo CUS, no varían mucho entre sí, a pesar que la configuración CUS2 es más flexible que la CUS1. Por otro lado, las configuraciones tipo CAS, poseen una mayor capacidad de variación cualitativa frente a sus contrapartes CUS. Esto se debe a que, al acoplamiento selectivo flexional-torsional que aporta el laminado CAS a diferencia del laminado CUS que aporta un acoplamiento extensional-torsional, el cual no es muy influyente en cuando las deformaciones son mayormente flexionales.

Tipo de Laminado	Secuencia de Laminación
CAS1	$\{0/\alpha\}_3$ en los segmentos superior y derecho $\{0/-\alpha\}_3$ en los segmentos inferior e izquierdo
CAS2	$\{\alpha\}_6$ en los segmentos superior y derecho $\{-\alpha\}_6$ en los segmentos inferior e izquierdo
CUS1	$\{0/\alpha\}_3$ en cada segmento
CUS2	$\{\alpha\}_6$ en cada segmento

Tabla 5. Características de los laminados de la sección cajón para estudio comparativo

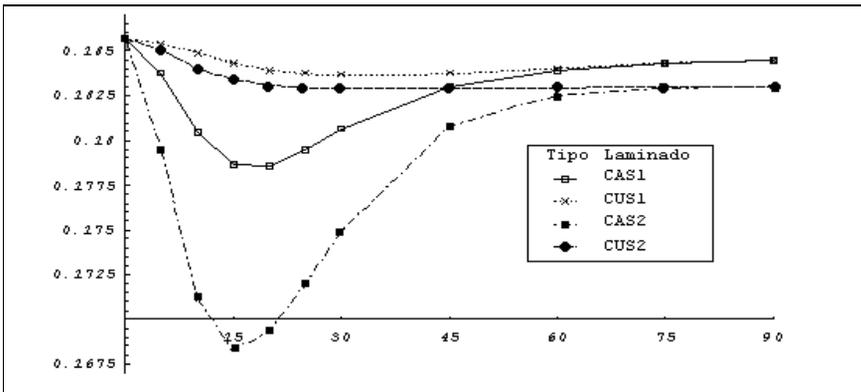


Figura 7. Variación de la amplitud de oscilación de  $P_I$  en la primer frecuencia del reticulado (secciones cajón)

Nótese que la influencia del tipo de laminación depende de las características del modo, ya que en la primer frecuencia, bajo un refuerzo orientado a  $15^\circ$ , el punto  $P_I$  del reticulado

construido con un laminado CAS se desplaza un 10 % menos que con un laminado tipo CUS. Sin embargo como se ve en la Figura 8, para la segunda frecuencia, aunque se mantiene la diferencia cualitativa entre los laminados CAS y CUS, y las diferencias de orden cuantitativo, son del 5%.

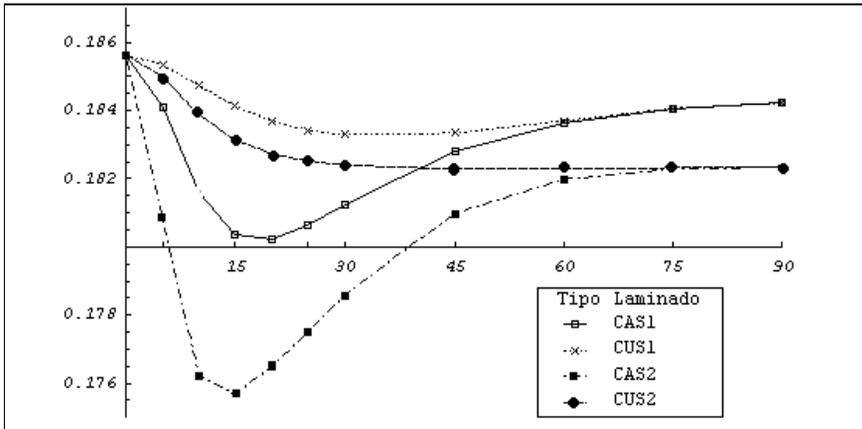


Figura 8. Variación de la amplitud de oscilación de  $P_1$  en la segunda frecuencia del reticulado (secciones cajón)

En la Tabla 6 se muestran las frecuencias de vibración de la misma estructura, pero modelada con perfiles H de laminación CUS que se muestran en la Tabla 1, con las hipótesis de conexiones rígidas o articuladas. Por otro lado en la Tabla 7, se muestran las frecuencias de vibración de la misma estructura pero empleado perfiles H que poseen la laminación CAS de la Tabla 1. Bajo una inspección minuciosa de las Tablas 6 y 7 se puede apreciar que el empleo de un laminado CAS o uno CUS, no modifica sustancialmente los valores de las frecuencias.

$\alpha [^\circ]$	$f_1$		$f_2$		$f_3$		$f_4$	
	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]
5	9.55	9.14	19.01	14.40	25.33	23.10	32.88	24.41
15	9.36	8.91	18.62	14.11	24.83	22.65	32.28	23.94
30	8.73	8.37	17.38	13.22	23.18	21.41	30.62	22.37
45	8.13	7.81	16.17	12.36	21.58	20.24	28.51	20.83

Tabla 6. Comparación de las frecuencias con conexiones rígidas [I] articuladas [II] del reticulado construido con perfiles I de laminados tipo CUS

Sin embargo, si es notoria la influencia de acuerdo al tipo de conexión empleada (rígida o articulada), de manera que se pueden obtener diferencias porcentuales del orden de 5.0%,

32.0%, 8.0% y 30.5% para la primera, segunda, tercera y cuarta frecuencias, respectivamente.

$\alpha$ [°]	$f_1$		$f_2$		$f_3$		$f_4$	
	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]	[I]	[II]
5	9.55	9.13	19.01	14.39	25.32	23.05	32.82	24.41
15	9.36	8.95	18.62	14.07	24.82	22.38	31.95	23.92
30	8.74	8.36	17.37	13.17	23.18	21.07	30.18	22.35
45	8.14	7.80	16.17	12.34	21.58	20.12	28.51	20.83

Tabla 7. Comparación de las frecuencias con conexiones rígidas [I] articuladas [II] del reticulado construido con perfiles I de laminados tipo CAS

En las Figuras 9, 10 y 11 se compara el desplazamiento del punto  $P_I$ , con respecto al ángulo de laminación de los laminados CAS y CUS, para la estructura modelada con conexiones rígidas y con conexiones articuladas. Se puede notar, como es lógico, que los desplazamientos de la estructura modelada con conexiones rígidas son menores que sus contrapartes con conexiones articuladas. Para la primer y segunda frecuencias se aprecian diferencias porcentuales del orden de 1.0 % y 4.5 %, entre las respuestas extremas. Sin embargo, se puede notar en el caso de conexiones articuladas, que el laminado CAS conduce a desplazamientos menores que el laminado CUS. Esto se debe al tipo de acoplamientos elásticos entre desplazamientos flexionales y rotaciones torsionales, que ofrece el laminado CAS frente al CUS para un perfil I.

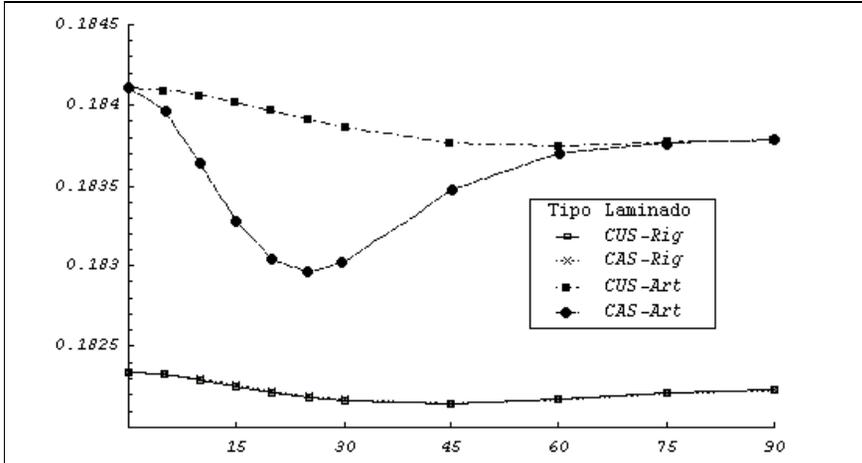


Figura 9. Variación de la amplitud de oscilación de  $P_I$  en la primera frecuencia del reticulado (secciones I)

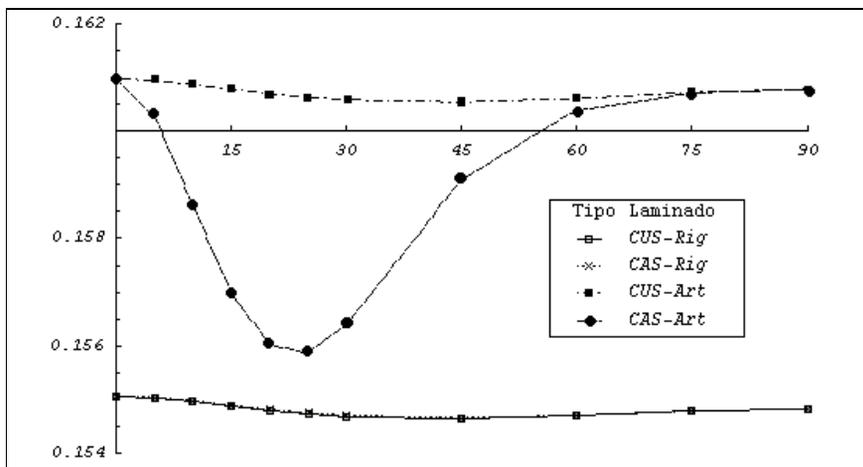


Figura 10. Variación de la amplitud de oscilación de  $P_1$  en la segunda frecuencia del reticulado (secciones I)

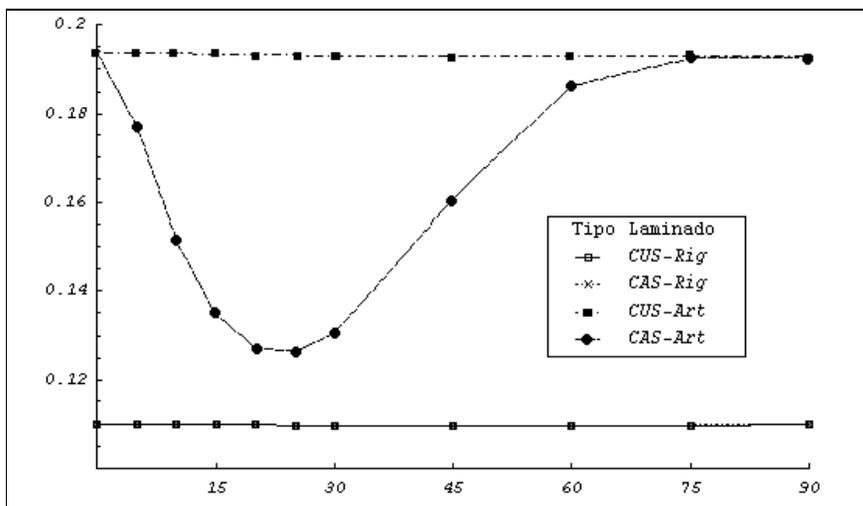


Figura 11. Variación de la amplitud de oscilación de  $P_1$  en la tercera frecuencia del reticulado (secciones I)

En la Figura 11, se puede apreciar como el comportamiento descrito para las primeras dos frecuencias, se ve notablemente incrementado para la tercer frecuencia.

#### 4 CONCLUSIONES

Se han efectuado estudios comparativos del comportamiento dinámico de entramados

espaciales construidos con vigas anisótropas de paredes delgadas que poseen acoplamientos selectivos. De estos estudios se ha podido observar que para un mismo entramado, el empleo de un esquema de laminación CAS o CUS no es relevante en cuanto al valor de la frecuencia natural. Sin embargo determinadas secuencias de laminación conducen a reducciones importantes de los niveles de amplitud de oscilación, en virtud del tipo de acoplamiento flexional-torsional que permiten. Con lo cual desplazamientos flexionales pueden ser mitigados o reducidos por la presencia de los desplazamientos torsionales inducidos por el mismo movimiento, en una frecuencia determinada. Esto es notorio tanto para las secciones cerradas como para las de perfil H. Se han ensayado paralelamente diferentes esquemas de modelación de las uniones, las que fueron consideradas como rígidas o como articuladas. Estas dos alternativas arrojan resultados sensiblemente distintos, a diferencia de su contraparte estática, según se puede colegir de los estudios de Batoz<sup>[6]</sup>.

## 5 AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del Conicet.

## 6 REFERENCIAS

- [1] Yong Y. y Lin Y.K. "*Dynamics of complex truss-type space structures*". AIAA Journal Vol.28(7) pp.1250-1258 (1989).
- [2] Shen Y, Xu M, Chandrashekar K y Nanni A "*Finite element analysis of FRP tubes assemblies for bridge decks*". Advanced Composite Materials, October (2001).
- [3] Kim M.Y., Chang S.P. y Kim S.B. "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin walled elastic beams. I-Analytical Approach". International Journal of Numerical Methods in Engineering Vol.37 pp.4097-4115 (1994).
- [4] Cortinez V.H. y Piovan M.T. "*Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability*". Journal of Sound and Vibration. En prensa (2002).
- [5] Cortinez V.H. y Rossi R.E. "*Dinámica de Vigas abiertas de paredes delgadas deformables por corte sujetas a un estado inicial de tensiones*". Revista Internacional de Métodos Numericos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería Vol.14(3) pp.293-316 (1998).
- [6] Batoz J.L. Shakourzadeh H. y Guo Y.Q. "*Modelling of connections in the Analysis of Thin Walled Space Frames*". Computers and Structures Vol.71(4) pp.423-435 (1999).
- [7] M.T. Piovan, V.H. Cortínez y R.E. Rossi. "*Estática y dinámica de vigas anisótropas de paredes delgadas, deformables por corte*". Actas ENIEF XII. Córdoba, Argentina, Noviembre (2001).
- [8] E.J. Barbero, "*Introduction to Composite Materials Design*". Taylor and Francis (1998).
- [9] L.W. Rehfield, A.R. Atilgan y D.H. Hodges. "*Non-classical behavior of Thin-Walled Composite Beams with Closed cross Sections*". Journal American Helicopter Society Vol.35(3) pp.42-50 (1990).
- [10] G.M.L. Gladwell. "The vibration of frames". Journal of Sound and Vibration, Vol.1(4) (1964).