

LOCALIZACIÓN DE FALLAS EN VIGAS DE FUNDACION DE HORMIGÓN ARMADO

Patricia N. Domínguez^a, Claudio J. Orbanich^{a,b}, Néstor F. Ortega^a

^a Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253

8000 Bahía Blanca, Argentina (nfortega@criba.edu.ar)

^b Becario CONICET

Palabras Clave: Viga de Fundación, Hormigón Armado, Fisuras distribuidas, Detección de Falla

Resumen. A nivel estructural, las fundaciones juegan un rol preponderante, ya que condicionan el comportamiento de los demás elementos de la misma. Algunas tipologías han sido ampliamente estudiadas, sin embargo en otros casos, las simplificaciones que se efectúan para su análisis, hacen que no se logre una adecuada precisión en la predicción de su comportamiento.

Se suma a esta incertidumbre, el deterioro que, por diversas causas, se pueden producir en el hormigón, durante la vida útil de la estructura. Debido al surgimiento de sobrecargas, asentamientos no previstos, ataque de agentes agresivos existentes en el suelo, entre otras, aparecen en el hormigón, fisuras que disminuyen la sección útil del elemento estructural, produciendo cambios en el comportamiento estático y dinámico de la fundación afectada.

En este trabajo se analiza una viga de fundación de Hormigón Armado, asentada sobre un terreno homogéneo, para distintos valores de sollicitación. Se continúa una línea de investigación previa, en la cual se estudió la posibilidad de localización de fisuras a través de la variación de los desplazamientos verticales de la fundación, utilizando modelos de comportamiento lineal para el hormigón y simplificaciones en el contacto con el suelo. En este trabajo se presenta una metodología más ajustada, modelando al hormigón según el Método de Fisuras Distribuidas implementado en el software Abaqus. Se tiene en cuenta el comportamiento no lineal a compresión del hormigón y la colaboración del mismo a tracción, aún después de fisurado. Para el suelo se utiliza un modelo constitutivo de Mohr Coulomb, aplicado a arena y arcilla. Finalmente, se exponen coincidencias y diferencias con el Modelo de Fisura Localizada, utilizado en anteriores investigaciones.

1 INTRODUCCION

Una estructura se puede dañar por diversas causas, sobrecargas accidentales que excedan aquellas para las cuales fue diseñada, por el cambio o deterioro de sus propiedades físicas o mecánicas en el transcurrir del tiempo, por la influencia del medio ambiente, entre otras. Con el fin de realizar la detección temprana de los daños estructurales, muchos investigadores han desarrollado métodos de evaluación para conocer la condición de los elementos.

Entre los métodos no destructivos para la detección de daño estructural, están aquellos que se basan en establecer el cambio de la respuesta dinámica de la estructura. Estos métodos han sido tratados por diferentes investigadores, generándose un número importante de publicaciones (X. Yang et al., 2001; J. Kim and N. Stubbs, 2003; G. Owolabi, et al., 2003).

Comparativamente, existen pocos trabajos sobre identificación de daño, basado en la respuesta estática de una estructura (J. Chou and J. Ghaboussi., 2001; I. Choi et. al., 2004; D. Maity and A. Saha, 2004; S. Suresh et. al., 2004; T. Sain Chandra and J. M. Kishen., 2003; S. Caddemi and A. Morassi, 2005; F. Jiang et al., 2004). En estos métodos se miden las variaciones en los Desplazamientos Verticales, las Deformaciones, etc.

En este trabajo, se presenta la aplicación de una metodología no destructiva para la detección de daño, basada en la respuesta estática (Desplazamientos Verticales y Curvaturas de la Elástica) de estructuras de fundación realizadas en hormigón armado asentadas sobre distintos tipos de suelo. Los desplazamientos se obtienen utilizando un modelo de Elementos Finitos desarrollado en Abaqus (ABAQUS/CAE, 2006).

En trabajos anteriores existentes sobre este tema (Orbanich et al., 2006), el hormigón se trabajó dentro del rango lineal elástico y la influencia del suelo se evaluó mediante el coeficiente de reacción del terreno en forma lineal. Para darle mayor generalidad y acercamiento a la situación real, en el presente trabajo se modelaron en conjunto suelo y estructura (K. Jonson et al. 2006), y se adoptaron modelos Elasto-Plásticos, para Hormigón Armado (CEB-FIB90, 1990; Hsuan-Teh Hu et al., 2004) y para el suelo (K Terzaghi y R. B. Peck, 1992; J.E. Bowles, 1974; Hans F. Winterkorn and Hsai-Yang Fang, 1975; A. Jimenez Salas y J.L. De Justo Alpeñes, 1995). Los modelos Elasto-Plásticos utilizados son los ya implementados en Abaqus y se describen en la sección 4.

2 DESCRIPCION DEL MODELO ESTUDIADO

En este trabajo se estudió una viga de fundación, cuyas características geométricas se muestran en la Figura 1. Esta fundación está asentada sobre un volumen de suelo de dimensiones suficientes como para poder asumir ausencia de desplazamientos en los bordes del mismo. La interacción entre estructura y suelo se consideró rugosa, o sea sin desplazamiento entre ambas.

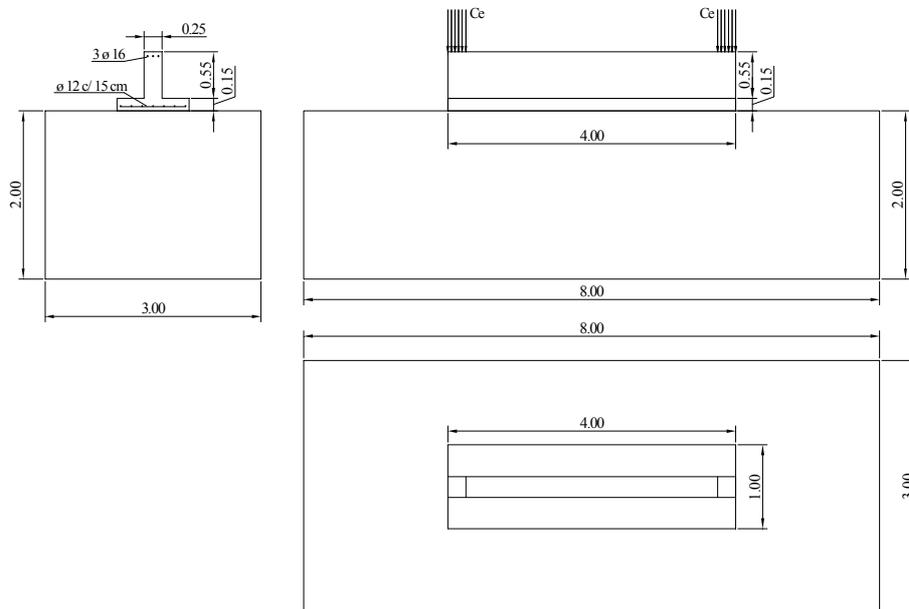


Figura 1: Geometría de la viga de fundación y el suelo circundante

En el modelo adoptado para la viga de fundación, la armadura de acero se modeló como embebida dentro del hormigón. Las cargas correspondientes a los esfuerzos transmitidos por las columnas, se distribuyeron en una superficie de 0.25m x 0.25m. Para la modelación numérica con el Método de los Elementos Finitos, se utilizó el programa Abaqus (ABAQUS Student Edition, 2006). Todas las partes estructurales del presente trabajo se modelaron utilizando elementos hexaédricos de 8 nodos tipo C3D8.

3 DETECCIÓN Y LOCALIZACIÓN DE DAÑO

Siguiendo con la línea de investigación anterior (N.F. Ortega and J.V. Arias, 1998; S.I. Robles and N.F. Ortega, 2001), se utilizó el método de la Curvatura de la Elástica para localizar fisuras. En este método, los valores de los desplazamientos verticales obtenidos en determinados puntos de la estructura, ya sean mediante mediciones experimentales, o como en este caso, desarrollando una simulación numérica, se pueden utilizar para obtener la Curvatura de la estructura deformada, mediante una aproximación por Diferencias Finitas Centrales (Q. Lu, et al., 2002). De esta manera, la curvatura está dada por:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (1)$$

$$i = 2, \dots, n-1$$

donde h es la distancia entre dos puntos adyacentes (paso), mientras que y es el Desplazamiento en un punto determinado y n es el número de puntos disponibles en la malla.

Es importante mencionar que, este método no depende de la información de la estructura sin daño, tal como sucede en otros métodos, tal como el Método de la Variación de los Desplazamientos Volumétricos (N.F. Ortega and J.V. Arias, 1998; S.I. Robles and N.F. Ortega, 2001), siendo esto una importante ventaja cuando no se dispone de la misma.

Para el tipo estructural y el estado de cargas, analizados en este trabajo, el gráfico de la curvatura de la deformada, correspondiente a la estructura sin daño, presenta una forma suave. Mientras que la aparición de un pico o una discontinuidad en su forma, indican una variación anormal de la rigidez (o flexibilidad) en esa ubicación, la que es producida por el daño; de esta manera una zona o zonas dañadas pueden ser localizadas usando estas mediciones.

Con relación a la determinación en obra de los Desplazamientos, se los puede medir mediante el uso de flexímetros mecánicos, cuya precisión es del orden de la centésima de milímetro, o con instrumental electrónico, tal es el caso de los LVDT (Linear Variable Displacement Transducers), cuya precisión, habitualmente, es igual o superior a la de los flexímetros. Es interesante destacar que la capacidad de medición de estos equipos es suficiente, debido a que con la décima de milímetro ya se pueden detectar las diferencias en los Desplazamientos originados por las fallas.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS Y CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES

Los materiales utilizados en este trabajo son los que se detallan a continuación.

3.1 Acero

Se utilizó un diagrama de Tensión –Deformación Elástico-Perfectamente Plástico, como el de la Figura 2, con las siguientes características de la Tabla 1.

Tensión de Fluencia σ_y (MPa)	344.7
Módulo de Elasticidad E_a (GPa)	200
Coefficiente de Poisson ν	0.3

Tabla 1: Características del Acero

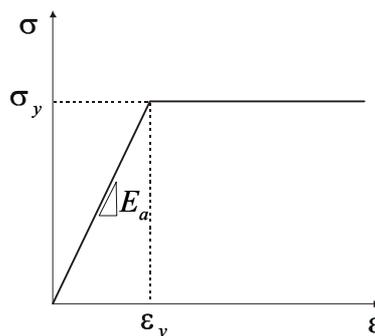


Figura 2: Diagrama Tensión-Deformación del acero

3.2 Hormigón

El hormigón adoptado en los modelos realizados posee las características detalladas en la Tabla 2.

Resistencia a Compresión f'_c (MPa)	34.47
Coefficiente de Poisson ν	0.20
Deformación ε_0 correspondiente a f'_c	0.003
Resistencia a Tracción $f_c = \frac{1}{3}\sqrt{f'_c}$ (MPa)	1.96
Módulo de Elasticidad Inicial $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ (GPa)	27.6

Tabla 2: Características del hormigón, bajo cargas uniaxiales

Se asume que el hormigón sometido a cargas axiales de compresión, presenta un comportamiento inicialmente elástico, hasta aproximadamente $0.3 f'_c$ cuando se producen las primeras microfisuras. Luego de este punto, el comportamiento es no lineal y a partir de $0.75 f'_c$ comienza el proceso de propagación inestable de fisuras, con una pérdida de capacidad de resistir el incremento de tensiones y un aumento de las deformaciones por aplastamiento, que determinan un comportamiento marcadamente no lineal hasta la rotura.

Sometido a esfuerzos de tracción, el comportamiento del hormigón es prácticamente elástico hasta que se fisura, sin embargo este comportamiento no es fácilmente mensurable, por lo cual se adopta una resistencia a tracción en función de la resistencia a compresión. Asimismo, el valor del Módulo de Elasticidad Inicial se obtiene empíricamente, en función de la resistencia a compresión (ACI 318-05).

Para la evaluación del comportamiento del hormigón bajo estados multiaxiales de tensión se adoptó el modelo de Fisuras Distribuidas, provisto por Abaqus (ABAQUS/CAE, 2006). Este modelo es válido cuando la estructura está sometida a tensiones esencialmente monotónicas y a bajas presiones de confinamiento. El material falla, tanto por aplastamiento en compresión, como por fractura en tracción, y se asume que la fisuración es el aspecto más importante del comportamiento del mismo.

Cuando la tensión alcanza la superficie de falla, Figura 3, el material se fisura. La anisotropía introducida por la fisura es tenida en cuenta por el modelo, en cuanto afecta la tensión y la resistencia del material en el punto de integración. La superficie de falla está definida en términos del primer y segundo invariantes de tensiones p y q respectivamente.

La superficie de compresión es:

$$f_c = q - \sqrt{3}a_0p - \sqrt{3}\tau_c = 0 \quad (2)$$

Donde:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}}(S : S) \text{ tensión equivalente de Von Mises} \quad (3)$$

$$S = \sigma + pI \text{ componentes del tensor desviador} \quad (4)$$

$$a_0 = \sqrt{3} \frac{1 - r_{bc}^\sigma}{1 - 2r_{bc}^\sigma} \text{ constante que relaciona la resistencia entre los estados uniaxial y biaxial} \quad (5)$$

$$r_{bc}^{\sigma} = \frac{f'_{bc}}{f'_c} \text{ con } f'_c \text{ resistencia \u00faltima en compresi\u00f3n biaxial} \quad (6)$$

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -\frac{I_1}{3} ; I_1 : \text{primer invariante de tensiones} \quad (7)$$

$$\tau_c = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a_0}{3} \right) \sigma_c \text{ par\u00e1metro de endurecimiento} \quad (8)$$

La superficie de detecci\u00f3n de fisura esta dada por:

$$f_t = \hat{q} - \left(3 - b_0 \frac{\sigma_t}{f_c} \right) \hat{p} - \left(2 - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_t}{f_c} \right) \sigma_t = 0 \quad (9)$$

Donde: \hat{q} y \hat{p} est\u00e1n definidas de la misma manera que q y p , excepto que las tensiones asociadas a fisuras abiertas no se tienen en cuenta.

$$b_0 = 3 \left(\frac{1 + (2-f)r_t^{\sigma} - \sqrt{1 + (f.r_t^{\sigma})^2 + f.r_t^{\sigma}}}{1 + r_t^{\sigma}(1-f)} \right) \quad (10)$$

$$r_t^{\sigma} = \frac{f_c}{f'_c} \text{ relaci\u00f3n entre la resistencia a tracci\u00f3n y compresi\u00f3n uniaxial} \quad (11)$$

$$f = \frac{\sigma_2}{f_c} \quad (12)$$

Siendo σ_2 la tensi\u00f3n principal en el estado biaxial, cuando la otra tensi\u00f3n principal σ_1 , alcanza la resistencia a compresi\u00f3n uniaxial.

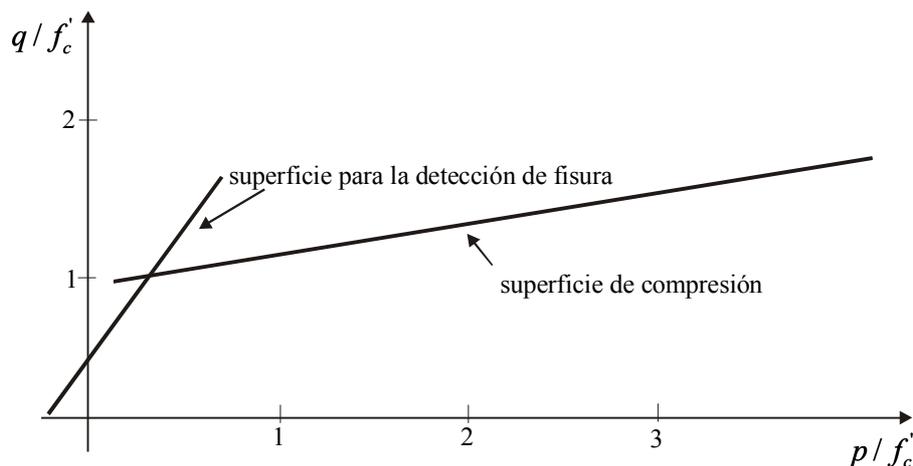


Figura 3: Superficies de Falla del Hormig\u00f3n

Cuando las componentes principales de tensi\u00f3n son predominantemente de compresi\u00f3n, la

respuesta del hormigón es modelada por la teoría Elasto-Plástica, usando una superficie de falla en términos de p y q y una regla de endurecimiento isotrópica.

Las superficies de falla y resistencias últimas en el espacio de tensiones, para un estado biaxial de tensiones se muestran en la Figura 4.

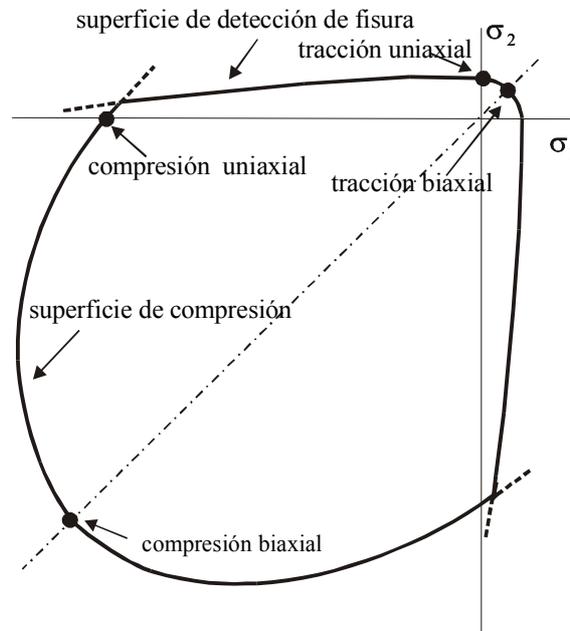


Figura 4: Superficie de falla del hormigón en el espacio de tensiones

Es importante destacar que la curva de Tensión-Deformación Equivalente para el hormigón, utilizada en el presente trabajo, que se grafica en la Figura 5, se obtuvo con la expresión propuesta por el Código Modelo CEB-FIP 90, tal que:

$$\sigma_c = - \frac{\left[\frac{E_c \varepsilon_c}{E_0 \varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{E_c}{E_0} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)} f_c \quad \text{donde } E_0 = \frac{f_c'}{\varepsilon_0} \quad (13)$$

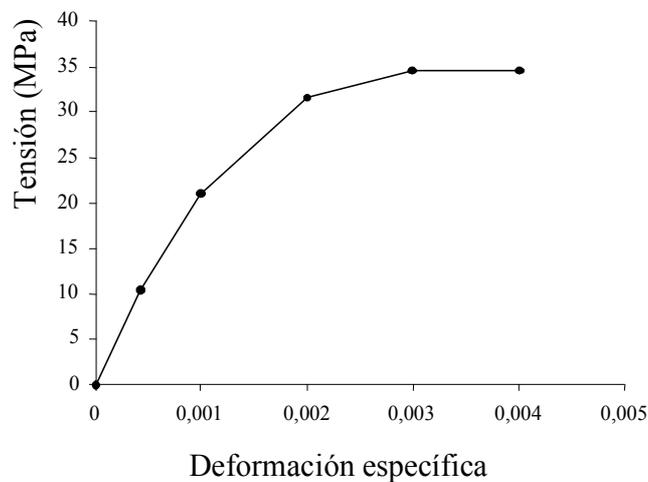


Figura 5: Curva de Tensión-Deformación Uniaxial Equivalente para el hormigón

Por otra parte, el hormigón armado, después de la fisuración del hormigón, todavía es capaz de resistir tensiones de tracción, en dirección normal a la fisura, debido a los efectos de interacción entre el hormigón y el acero de refuerzo. Esta interacción se tiene en cuenta en el modelo adoptado mediante la definición de la curva “Tension Stiffening”. Varios factores influyen en la adopción de esta curva, tales como densidad de las armaduras, adherencia entre acero y hormigón, tamaño del agregado grueso con respecto al diámetro de las barras de acero y al tamaño de la malla. En el presente trabajo se adoptó una simple línea descendente, que alcanza la tensión nula para una deformación ε^* , igual a diez veces la deformación correspondiente a la falla. (Figura 6).

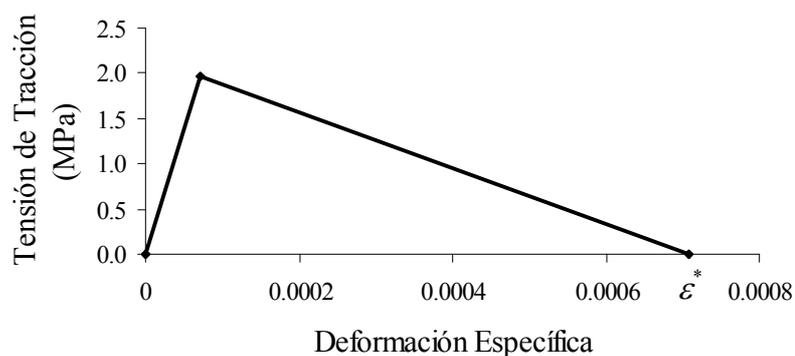


Figura 6: Curva “Tension Stiffening” para el hormigón

En cuanto al Módulo de Elasticidad Transversal G , en el presente trabajo se asume que no existe disminución del mismo, independientemente del estado tensional del hormigón.

Para validar el modelo de hormigón armado propuesto, se modeló una viga simplemente apoyada sometida a carga uniformemente distribuida, con las características geométricas y de materiales coincidentes con la estudiada por Hsuan-Teh Hu (Hsuan-Teh Hu et al., 2004). Se

probaron distintos tipos de elementos, cuyos resultados se observan en la Figura 7, adoptándose el C3D8, elemento espacial continuo de 8 nodos, por ser más conveniente desde el punto de vista del costo computacional, y cuya precisión es adecuada.

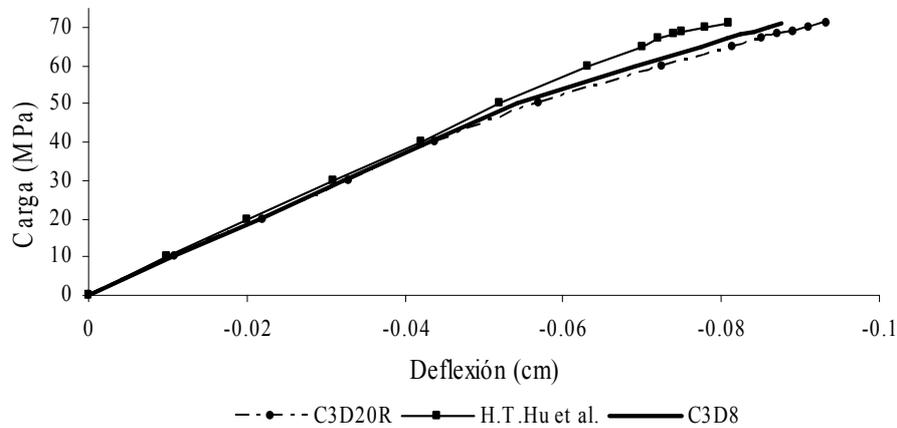


Figura 7: Comparación de los modelos de hormigón armado, con distintos tipos de elementos, con el de referencia

3.3 Suelo

Para la simulación del suelo, se usó un modelo constitutivo Elasto-Plástico con la variación de la tensión, en función de la deformación que se muestra en la Figura 8 y la Teoría de Falla de Mohr Coulomb, donde se tiene en cuenta el ángulo de fricción y el coeficiente de cohesión (Figura 9). Las características de los dos tipos de suelos utilizados: arena y arcilla, se pueden observar en la Tabla N° 3. Es importante destacar que al diseñar la zona del suelo se tuvo en cuenta que el bulbo de presiones quedara completamente incluido en la misma.

Parámetro característico	Arena	Arcilla
Densidad γ (KN/m ³)	16	17
Módulo de Elasticidad E_{edo} (MPa)	21.54	1.605
Ángulo de Fricción Interna ϕ (grados)	32	30
Coefficiente de Poisson ν	0.30	0.35
Ángulo de dilatación ψ (grados)	2	0
Coefficiente de Cohesión C (KPa)	1	10

Tabla 3: Características de los suelos utilizados

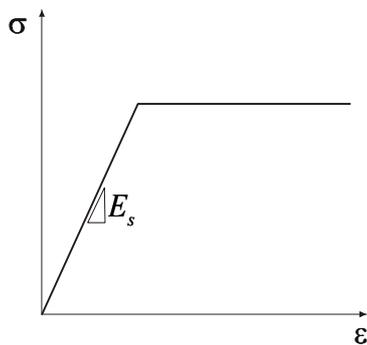


Figura 8: Curva de Tensión-Deformación para el suelo

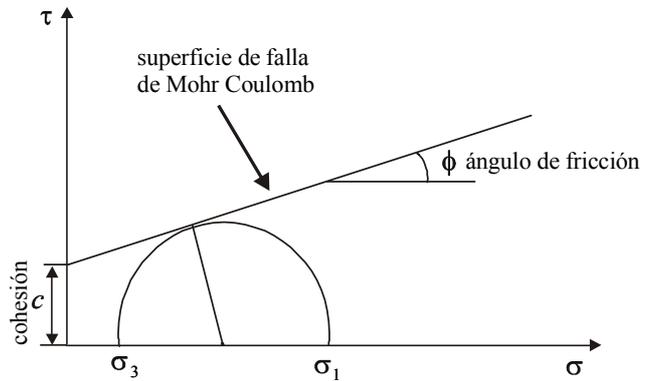


Figura 9: Superficie de Falla de Mohr-Coulomb

5 ANALISIS DE LOS RESULTADOS

En la Figura 10 se observa la Variación de la Curvatura de la Elástica de la viga de fundación, asentada sobre arena, para diferentes estados de carga. Para una carga $C_e = 0.8$ MPa, la estructura aún no se encuentra fisurada y puede observarse que la curva se mantiene prácticamente constante, mientras que a medida que la carga aumenta comienzan a aparecer las variaciones en la curvatura, en correspondencia con las zonas fisuradas.

En la figura 11 se muestra un gráfico correspondiente a la misma geometría que la estudiada en el presente trabajo para una carga de 1.6 MPa, modelada con una fisura discreta a 1.5m del borde. (C.J. Orbanich et al. 2006). Obsérvese que con un modelo de fisura discreta, aparecen variaciones de curvatura más pronunciadas, no obstante se considera que el modelo de fisura distribuida, se acerca más al comportamiento real de la estructura donde, por ejemplo, es muy difícil que por la aplicación de una carga mayor a la de diseño, o un asentamiento diferencial, aparezcan una sola fisura, sino que surgirá toda una zona fisurada, como se simula con el modelo de fisuras distribuidas.

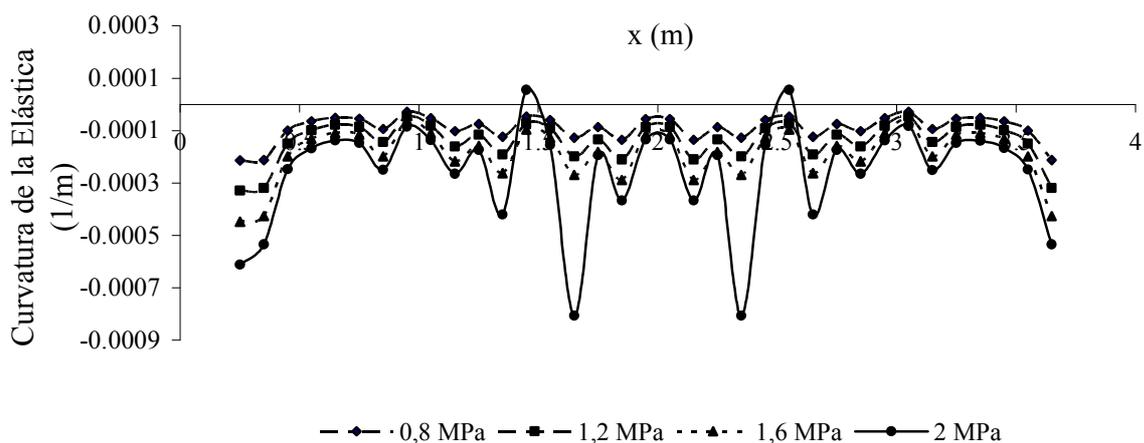


Figura 10: Variación de la Curvatura de la Elástica para distintos estados de carga con el modelo estudiado de fisuras distribuidas.

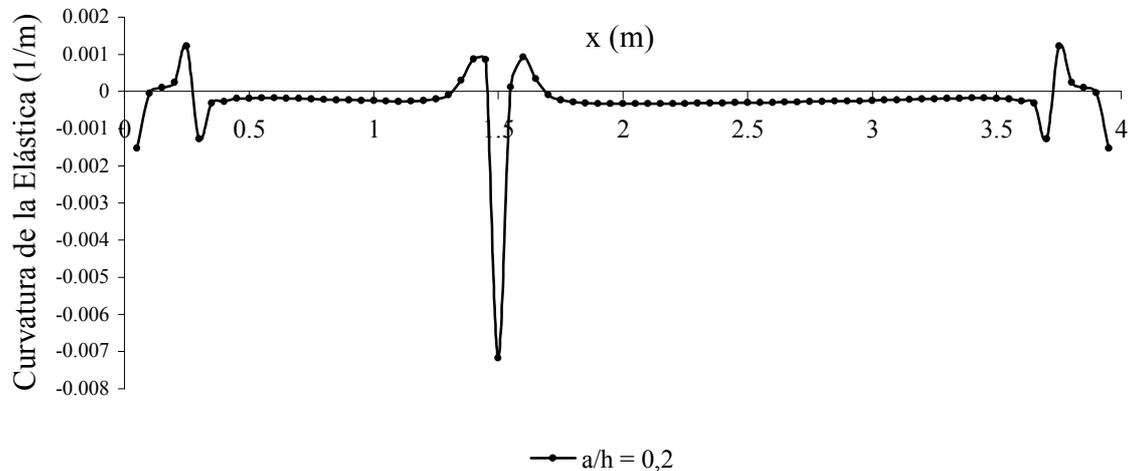


Figura 11: Variación de la Curvatura de la Elástica según modelo de fisuras discreta.

Desde este punto de vista, obsérvese la Figura 12, donde se muestra el patrón de fisuración para distintos valores de la carga externa C_e .

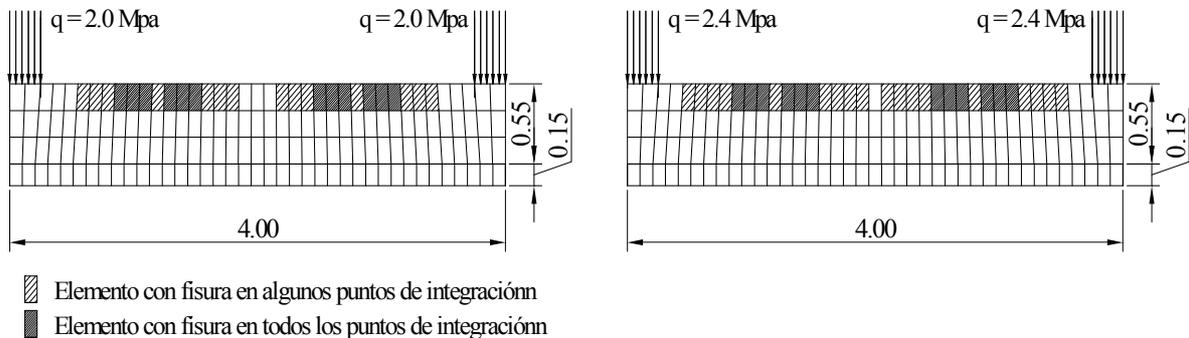


Figura 12: Patrón de fisuración.

La variación de la Curvatura de la Elástica de la viga de fundación se aprecia en la Figura 13, esta fundación se la modeló asentada sobre distintos tipos de suelo y para dos estados de carga, ($C_e = 0.8 \text{ MPa}$ y $C_e = 2 \text{ MPa}$). Para la carga $C_e = 0.8 \text{ MPa}$ como no existe fisuración, las curvas correspondientes a la arena y a la arcilla, son prácticamente las mismas, con una diferencia promedio de 1.12 %, mientras que para una carga $C_e = 2 \text{ MPa}$, donde existe una amplia zona fisurada, las curvas se diferencian, y la curva de la arena presenta mayores variaciones que la de la arcilla. Es interesante destacar que el método de detección de fisura propuesto, en este trabajo, puede ser aplicado para diferentes tipos de suelo y tipos de fundaciones.

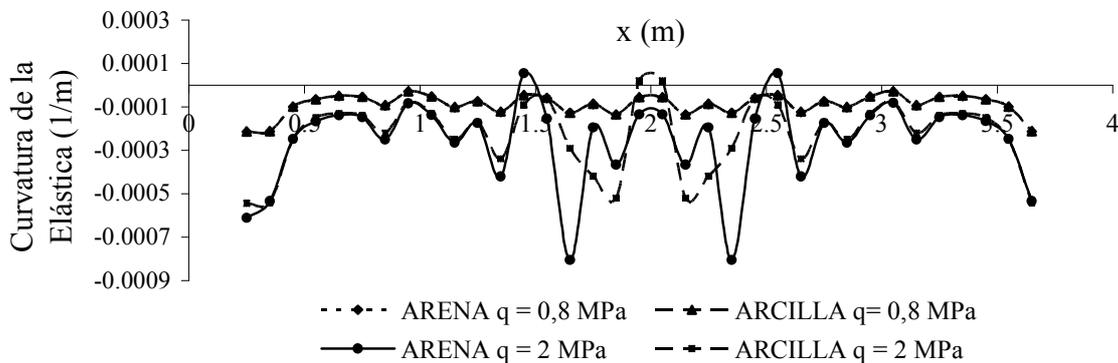


Figura 13: Variación de la Curvatura de la Elástica para distintos tipos de suelo y estados de carga.

Es importante destacar que en las Figuras 10, 11 y 13, donde se presentan variaciones de la Curvatura de la Elástica, se realizaron con los desplazamientos verticales medidos en la parte superior de la viga, lugar donde se podrían colocar los flexímetros o LVDT, en una fundación real.

6 CONCLUSIONES

La técnica aquí presentada es una importante herramienta, para ser empleada al estudiar patologías estructurales, ya que permite determinar la existencia de daño estructural, cuantificar su influencia y localizarlo. Además, permite realizar un seguimiento de la evolución del daño que tiene una estructura (aumento de los patrones de fisuración), para los distintos estados de carga y tipos de suelos.

Este método posee un potencial importante para estimar los probables lugares de falla en una estructura, con una determinada geometría y estado de carga, permitiendo optimizar la cantidad y ubicación de los sensores a utilizar, al realizar el diagnóstico de una estructura, siempre que las fisuras sean producidas por cargas. En el caso, por ejemplo, de fisuras producidas por corrosión de armaduras no se podría predecir las mismas, sino que el modelo debería ser más complejo.

Como se ha podido apreciar, en la aplicación de esta técnica, se deben combinar modelos numéricos de análisis y mediciones experimentales (Desplazamientos Verticales), que no afectan a la integridad estructural, por estos motivos se la puede considerar como una técnica no destructiva de análisis.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por el apoyo brindado para el desarrollo de estas investigaciones.

8 REFERENCIAS

- ABAQUS/CAE, Student Edition, Version 6.6-2. *ABAQUS Inc*, 2006.
- ACI 318-05. Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-05) y Comentario (ACI 318SR-05), *American Concrete Institute*, 2005.
- J.E. Bowles. *Analytical and computer methods in foundation engineering*. McGraw Hill. 147-185. New York, 1974.
- S. Caddemi and A. Morassi. A procedure for multiple damage identification in elastic beams. *Procc. World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Río de Janeiro, Brazil, 2005.
- CEB-FIP Model Code 1990, Lausanne, 1991.
- I. Choi et. al.. Development of elastic damage load theorem for damage detection in statically determinate beam. *Computers & Structures*, 82:2483-2492, 2004.
- J. Chou and J. Ghaboussi. Genetic algorithm in structural damage detection. *Computers & Structures*, 79:1335-1353, 2001.
- H.T. Hu, F.M. Lin and Y.Y. Jan. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete beams strengthened by fiber-reinforced plastics. *Composite Structures* 63:271-281, 2004.
- F. Jiang et al. Crack length calculation for bend specimens under static and dynamic loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 71:1971-1985, 2004.
- J.A. Jimenez Salas y J.L. De Justo Alpeñes. *Geotecnica y Cimientos*. Editorial Rueda, Madrid, 1995.
- K. Jonson et al., P. Lemcke, W Karunasena and N. Sivakugan. Modelling the load-deformation response of deep foundations under oblique loading. *Environmental Modeling and Software*, 21:1375-1380, 2006.
- J. Kim and N. Stubbs. Crack detection in beam – type structures using frequency data. *Journal of Sound and Vibration*, 259(1):145-160, 2003.
- Q. Lu, G. Ren and Y. Zhao. Multiple damage location with flexibility curvature and relative frequency change for beam structure. *Journal of Sound and Vibration*, 253(5):1101-1114, 2002.
- D. Maity and A. Saha. Damage assessment in structures from changes in static parameter using neural networks. *Sādhanā*, 29(3):315-327, 2004.
- C.J. Orbanich, N.F. Ortega y S.I. Robles. Localización de fallas en vigas de fundación elástica. *Mecánica Computacional vol XXV, AMCA*:517-536, 2006.
- N.F. Ortega and J.V. Arias. Comparison of Mechanical Efficiency Between an Hyperbolic Paraboloid and a Experimental Model. *Procc. IV World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, 1998.
- G. Owolabi, A. Swamidas and R. Seshadri. Crack detection in beams using changes in frecuencies and amplitudes of frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 256:1-22, 2003.
- S.I. Robles and N.F. Ortega. “Study of Volumetric Displacements of shells” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 42(137), 139-147, 2001.
- T. Sain Chandra and J. M. Kishen. Damage and residual life assessment of structures using fracture mechanics. *Procc. 16th ASCE Engineering Mechanics Conference*. University of Washington. Seatle, 2003.

- S. Suresh et al. Identification of crack location and depth in a cantilever beam using a modular neural network approach. *Smart Materials and Structures*, 13:907-915, 2004.
- K. Terzaghi y R.B. Peck. *Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica*, El Ateneo. 1992.
- F. Winterkorn and Hsai-Yang Fang. *Foundation Engineering Handbook*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1975.
- X. Yang, S. Swamidas and R. Seshadri. Crack identification in vibrating beams using the energy method. *Journal of Sound and Vibration*, 244(2):339-357, 2001.