

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE VEHICULOS TERRESTRES UTILIZANDO LA TECNICA DE BOND GRAPHS

Germán Filippini^{*}, Norberto Nigro^{*}, and Sergio Junco[†]

^{*}Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Rosario
e-mail: gfilippini@ceride.gov.ar, nnigro@intec.unl.edu.ar

[†]Escuela de Ingeniería Electrónica, Universidad Nacional de Rosario
e-mail: sjunco@fceia.unr.edu.ar

Key words: Dinámica Vehicular, Bond Graphs

Abstract. *El comportamiento dinámico de los vehículos terrestres es sumamente complejo debido a la gran cantidad de variables involucradas, al acoplamiento de las mismas, a las importantes no linealidades y fundamentalmente al factor humano. Para su estudio suelen utilizarse modelos computacionales basados en diferentes aproximaciones que intentan predecir el comportamiento de las diferentes partes del vehículo de la manera más realista posible de acuerdo a cuan extenso sea el sistema en estudio. Muchos estudios excluyen al conductor del análisis para evitar complejidades muy difíciles de tratar, no obstante el análisis del sistema completo requiere analizar una gran cantidad de subsistemas en general altamente acoplados. La interacción con el suelo, las cargas aerodinámicas y los dispositivos de maniobras y control suelen ser los principales efectos a tener en cuenta en la simulación. Todos estos efectos introducen movimientos importantes en las tres dimensiones produciendo una importante alteración en la respuesta del vehículo respecto a su configuración de partida. Todo esto se analiza utilizando la ampliamente difundida teoría de sistemas multicuerpos (multibody systems). En este trabajo se implementa la teoría de multicuerpos en un ambiente de programación bond graphs y se lo aplica a la resolución de diferentes sistemas mecánicos, en especial a la dinámica de vehículos terrestres. La herramienta desarrollada permite dar respuesta a problemas de índole académico y profesional.*

1 INTRODUCCION

La técnica de modelado utilizada en este trabajo es la de diagramas de enlaces, normalmente conocida por su nombre inglés como Bond Graphs (BGs). Esta se adapta muy bien a todos los requerimientos de esta aplicación e incluso tiene algunas propiedades muy atractivas como su alta extensibilidad por ser orientado a objetos, la facilidad para desarrollar aplicaciones por su natural sentido físico y la posibilidad de integrar subsistemas de diferentes campos de aplicación, lo que hoy suele denominarse multifísica.

Cada línea o enlace en un BG implica la existencia de un par de señales, las cuales fluyen en dirección opuesta. Este par tiene dimensiones de potencia y pueden ser tensión y corriente para un sistema eléctrico, fuerza y velocidad para un sistema mecánico, presión y caudal para uno hidráulico, etc. En general suele hablarse de variables de esfuerzo y variables de flujo con lo cual se le da carácter general al tratamiento, permitiendo que con este tipo de técnicas no solo sea factible abordar problemas de muy diversa índole sino que puedan acoplarse entre sí para formar sistemas complejos e híbridos. Por ultimo para organizar las leyes constitutivas de los componentes en forma de ecuaciones diferenciales necesitamos tomar decisiones acerca de la causalidad, es decir identificar causas y efectos. Este es otro concepto importante acerca de los BGs, los sistemas o subsistemas físicos que procesan energía son acausales. La causalidad es necesaria para procesar matemáticamente señales (fuerzas, velocidades, desplazamiento, etc.). Al poner causalidad lo que se hace es definir matemáticamente para cada subsistema cuáles son las entradas y cuáles son las salidas, es decir se ensambla un esquema de cómputo, se ordena y se acoplan las ecuaciones estructurales y constitutivas del sistema.

El objetivo de este trabajo es mostrar un sistema vehicular modelado con BGs orientado en primera instancia a la simulación y posteriormente a la identificación de parámetros. Para la primera etapa se define el modelo de un vehículo completo basado en un sistema de multicuerpos tridimensional acoplando la dinámica vertical, longitudinal y lateral utilizando un modelo de neumático de Pacejka, incluyendo planta motriz y toda la transmisión para identificar la tracción. Se incorporan efectos geométricos tridimensionales de la suspensión al modelo. Si bien el modelado de cuerpos rígidos en el espacio ha sido desarrollado teórica y prácticamente desde hace algunos años, es poco frecuente encontrar en el modelado de vehículos por BGs semejante complejidad. Normalmente lo que suele usarse es un modelo simplificado basado en desacoplar la dinámica vehicular en 3 tipos de movimientos, longitudinal, vertical y lateral. Es esta extensión lo que le confiere a este trabajo cierta originalidad. Se presentan varios ejemplos cuyo análisis y comparación con otras técnicas de modelado más establecidas permite chequear la precisión del modelo.

2 ESPECIFICACIONES GENERALES

El modelado de sistemas mecánicos mediante la teoría de BGs permite armar modelos no lineales y de muchos grados de libertad, pero sus componentes son unidimensionales con lo cual la aplicación en sistemas mecánicos tridimensionales queda limitada a pequeñas rotaciones resolviéndose estas de forma aproximada. En este trabajo utilizamos la teoría de multicuerpos para poder extender su aplicación a sistemas mecánicos con grandes rotaciones

para lo cual debemos desarrollar con los componentes unidimensionales de BGs otros componentes que modelen cuerpos rígidos, traslaciones y rotaciones en las tres dimensiones.

La principal aplicación en este trabajo es en dinámica vehicular para esto se desarrollo un modelo de un sistema de multicuerpos mostrado en la figura 1 el cual esta compuesto de cinco cuerpo rígidos acoplados, que representan el chasis y los cuatro sistemas mecánicos que vinculan el chasis con cada uno de los neumáticos. En la figura 1 se muestran además los modelos de rotaciones espaciales, las juntas que vinculan los diferentes cuerpos y el modelo de la transmisión del vehículo compuesto por el motor, la caja de cambios y el diferencial.

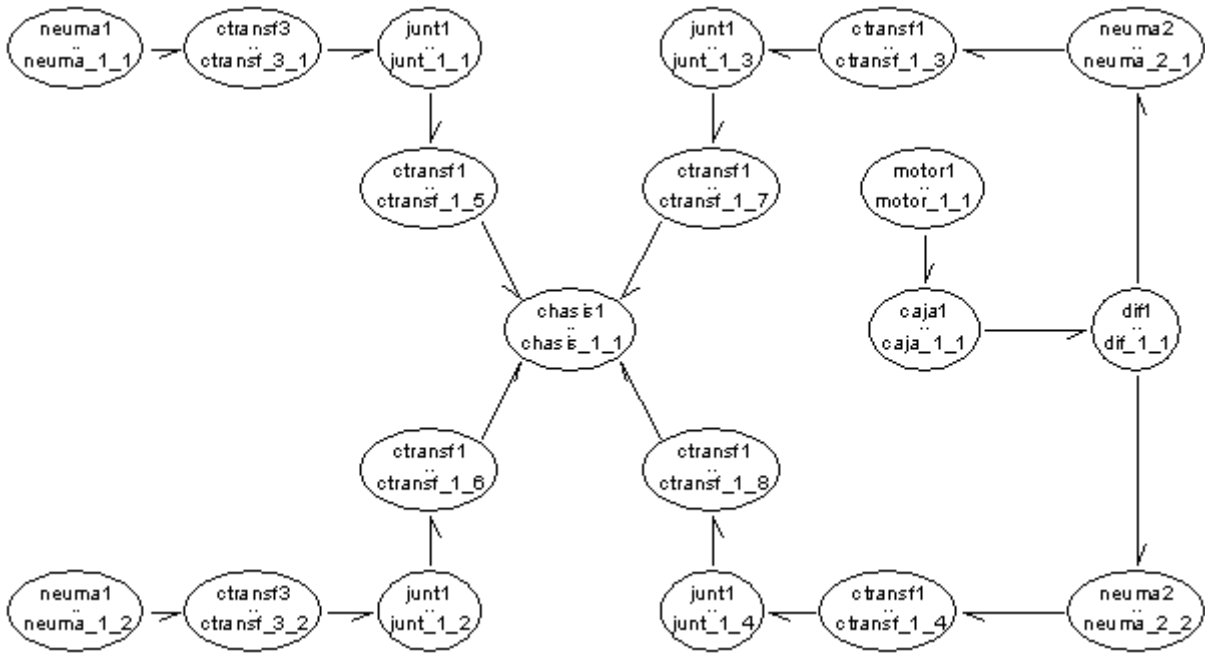


Figura 1. Modelo BGs de Vehículo

El chasis del vehículo es modelado como un cuerpo rígido, cuyo sistema de coordenadas local (x, y, z) esta sujeto al centro de masas del mismo y alineado con respecto a sus ejes principales como se muestra en la figura 2.

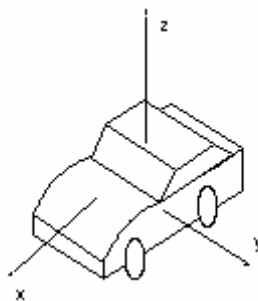


Figura 2. Sistema de ejes sobre el chasis del vehículo

El chasis tiene masa m , y momentos de inercia J_r (roll) respecto el eje x , J_p (pitch) respecto el eje y , y J_y (yaw) respecto el eje z . Para determinar el movimiento en el espacio de un cuerpo rígido se dispone de un conjunto de ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Euler. La primera de ellas representa la ecuación de movimiento lineal y se escribe como:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\Big|_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{p} \\ F_i &= \frac{dp_i}{dt} = \frac{dp_i}{dt}\Big|_{rel} + \varepsilon_{ijk} \omega_j p_k \end{aligned} \quad (1)$$

donde \vec{F} , $\vec{\omega}$, \vec{p} representa las fuerzas exteriores, el vector velocidad angular y el vector cantidad de movimiento lineal respectivamente. $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dt}\Big|_{rel}$, ε_{ijk} representan la derivada respecto a una terna inercial, la derivada respecto a una terna móvil fija al cuerpo (vehículo) y el tensor de permutación de Levi-Civita utilizado para expresar el producto vectorial en forma indicial.

La segunda de las ecuaciones de Euler trata sobre el movimiento angular

$$\begin{aligned} \sum \vec{M} &= \frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d\vec{h}}{dt}\Big|_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{h} \\ M_i &= \frac{dh_i}{dt} = \frac{dh_i}{dt}\Big|_{rel} + \varepsilon_{ijk} \omega_j h_k \end{aligned} \quad (2)$$

donde \vec{M} , \vec{h} representan el vector de momentos o torques y el vector momento angular.

En (1) y (2) aparecen tanto la forma intrínseca de las ecuaciones como su contraparte indicial.

Para entender la representación BG de las ecuaciones anteriores escribimos a continuación la forma expandida de (1) y (2).

$$\begin{aligned} f_x &= m \cdot \dot{v}_x + m \cdot \omega_y \cdot v_z - m \cdot \omega_z \cdot v_y \\ f_y &= m \cdot \dot{v}_y + m \cdot \omega_z \cdot v_x - m \cdot \omega_x \cdot v_z \\ f_z &= m \cdot \dot{v}_z + m \cdot \omega_x \cdot v_y - m \cdot \omega_y \cdot v_x \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} t_x &= J_x \cdot \dot{\omega}_x + \omega_y \cdot J_z \cdot \omega_z - \omega_z \cdot J_y \cdot \omega_y \\ t_y &= J_y \cdot \dot{\omega}_y + \omega_z \cdot J_x \cdot \omega_x - \omega_x \cdot J_z \cdot \omega_z \\ t_z &= J_z \cdot \dot{\omega}_z + \omega_x \cdot J_y \cdot \omega_y - \omega_y \cdot J_x \cdot \omega_x \end{aligned} \quad (4)$$

donde m es la masa, J_x, J_y, J_z son los momentos de inercia respecto a los tres ejes principales del vehículo o cuerpo rígido, v_x, v_y, v_z son las 3 componentes del vector velocidad lineal, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ son las 3 componentes del vector velocidad angular y el punto encima de las variables indica derivada temporal. El torque t reemplaza al momento M .

La representación en Bond Graphs para el movimiento en 3D de un cuerpo rígido basado en las ecuaciones de Euler es mostrado en la figura 3.

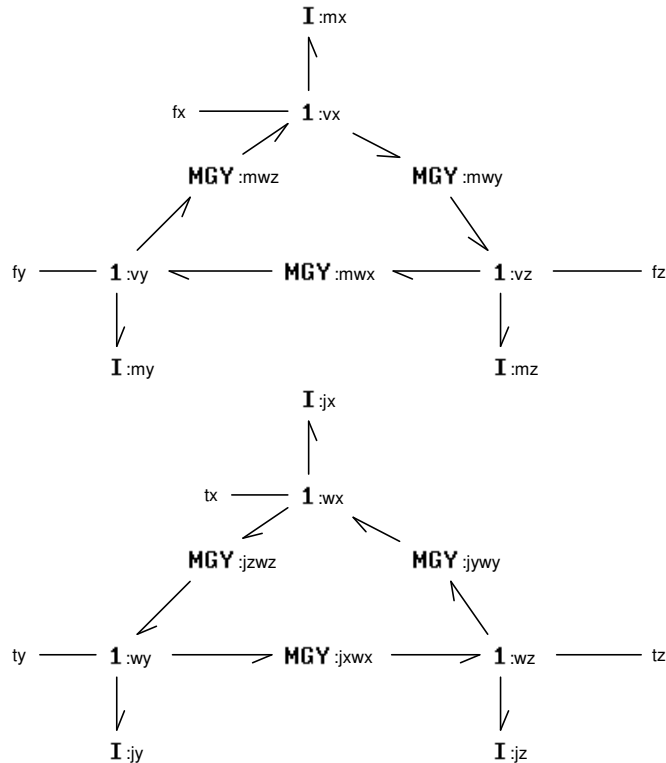


Figura 3. Representación BGs de la dinámica de un cuerpo rígido en el espacio.

Además del chasis, cada uno de los cuatro cuartos de autos, uno por cada neumáticos está modelado de la misma forma, es decir como un sistema multicuerpos en el espacio.

El proceso de simulación de un sistema de cuerpos rígidos a través del tiempo es llamado integración. Cada paso de la integración avanza un paso de tiempo, ajustando el estado de todos los cuerpos rígidos para el nuevo valor del tiempo. En cada paso de tiempo se aplican fuerzas y torques sobre los cuerpos, denominadas variables de esfuerzo según BGs, y se obtiene como salida de esos subsistemas velocidades de traslación y rotación, denominadas variables de flujo, para cada uno de los seis grados de libertad de cada cuerpo.

Además es necesario modelar las interconexiones entre los cuerpos rígidos (juntas) y las acciones del medio exterior sobre estos. En el modelo una junta representa la relación de esfuerzos que existe entre los cuerpos rígidos que vincula, dependiendo estas de la posición y de la orientación relativa entre ellos. Estas relaciones representan matemáticamente restricciones. La figura 4 muestra tres tipos distintos de juntas.

Las juntas modeladas son elásticas, es decir las restricciones no son infinitamente rígidas, y están modelados mediante resortes lo suficientemente rígidos. O sea que la diferencia entre una restricción y un grado de libertad, es solo el nivel de rigidez, el cual puede llegar a ser cero en el caso de haber un desacoplamiento total en ese grado de libertad. O bien puede tener

no solo cierta rigidez sino también cierta amortiguación por ejemplo en el caso de modelar en ese grado de libertad un sistema de resorte y amortiguador típico de una suspensión. En otras palabras, lo que hace es eliminar las restricciones, reemplazándolas por alguna función penalizadora del movimiento en ese grado de libertad, de esta forma el número de incógnitas de cada cuerpo rígido es igual al número de ecuaciones.



Figura 4. Tipos de juntas esférica, cilíndrica y prismática.

Para poder interrelacionar dos cuerpos rígidos mediante una junta, es necesario hacer una serie de traslaciones y rotaciones debido a que los puntos de anclaje no necesariamente son los centros de masas de los cuerpos y además las juntas no tienen porque estas alineadas con los ejes principales de inercia de los cuerpos. Las ecuaciones de Euler resuelven el estado posicionado en el centro de masa (salida de las ecuaciones de Euler) pero debo conocer cual es el estado para los puntos de anclajes de modo de poder relacionarlos mediante el modelo de juntas y de la misma forma haciendo el camino inverso ver la influencia sobre cada centro de masa de cada cuerpo (entrada de las ecuaciones de Euler).

Resumiendo lo que hacemos es trasladar el sistema de referencia de cada cuerpo hacia su punto de anclaje, rotarlo de forma que quede en una orientación acorde con la orientación de la junta y de esta forma ver como cada uno de los 6 grados de libertad están relacionados entre ambos cuerpos. Esto último dependerá del tipo de junta a modelar.

La traslación de las variables de potencia, variables de flujo y de esfuerzo, de un punto 'a' hacia otro 'b' de un cuerpo se realiza según las siguientes ecuaciones que se encuentran dentro del modulo point2 de la figura 5, en donde x,y,z es la distancia a trasladar según cada eje, los subíndices e,f indican si son variables de esfuerzo o flujo respectivamente y las letras l,r indican componentes lineales o rotacionales, el subíndice a,b indica a que punto pertenece el valor de la variable de potencia correspondiente. La figura 5 muestra el sistema de ecuaciones completo que representa la traslación de las variables de flujo de un punto 'a' a otro 'b' de un cuerpo en el espacio y la traslación entre esos mismos puntos pero en sentido inverso, desde el punto 'b' al 'a', de las variables de esfuerzo; a la izquierda de la figura se representan las entradas/salidas para este submodelo de las variables de potencia para el punto 'a' y a la derecha para el punto 'b'. Es de recordar que en BG un puerto tipo 0 representa esfuerzo común para todos los enlaces y los flujos se balancean mediante una sumatoria nula de todos los flujos que confluyen a él, mientras que un puerto tipo 1 representa flujo común para todos los enlaces y los esfuerzos se balancean mediante una sumatoria nula de todos los esfuerzos que confluyen a él.

Las ecuaciones que relacionan los esfuerzos lineales con los esfuerzos rotacionales son

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{F} \times \vec{r} \\ M_i &= \varepsilon_{ijk} F_j r_k\end{aligned}\quad (5)$$

donde r representa la posición respecto al centro de momentos, que en forma expandida y siguiendo la notación antes citada puede escribirse como:

$$\begin{aligned}rx_{a,e} &= lz_{b,e} \cdot y - ly_{b,e} \cdot z \\ ry_{a,e} &= lx_{b,e} \cdot z - lz_{b,e} \cdot x \\ rz_{a,e} &= ly_{b,e} \cdot x - lx_{b,e} \cdot y\end{aligned}\quad (6)$$

Para los flujos la relación es la bien conocida expresión:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ v_i &= \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k\end{aligned}\quad (7)$$

la cual en forma expandida y con la convención antes definida se escribe como:

$$\begin{aligned}lx_{b,f} &= ry_{a,f} \cdot z - rz_{a,f} \cdot y \\ ly_{b,f} &= rx_{a,f} \cdot z - rz_{a,f} \cdot x \\ lz_{b,f} &= rx_{a,f} \cdot y - ry_{a,f} \cdot x\end{aligned}\quad (8)$$

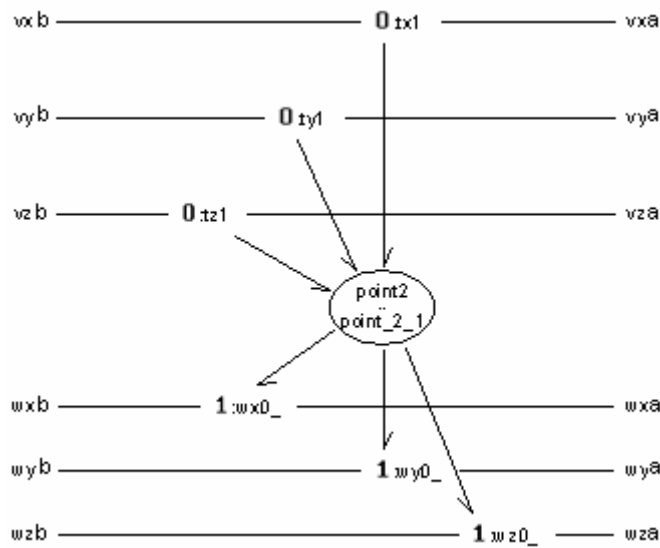


Figura 5. Modelo de traslación de variables de potencia entre los punto 'a' y 'b' de un cuerpo en el espacio.

Los movimientos del cuerpo rígido (chasis) son difíciles de interpretar con respecto al sistema de coordenadas local, por esto se realiza una serie de transformaciones de coordenadas (x',y',z' y x'',y'',z'') hacia un sistema de coordenadas inercial (X,Y,Z). Para ello pueden usarse diferentes conjuntos de transformaciones, entre las más conocidas podemos citar aquella expresada según los ángulos de Euler. No obstante en dinámica vehicular es mucho más representativo plantear las transformaciones en término de rotaciones respecto a los 3 ejes principales de movimiento, es decir los ángulos de guiñada (*yaw*), cabeceo (*pitch*) y rolido o balanceo (*roll*). Esta transformación en forma matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} wx'' \\ wy'' \\ wz'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \end{bmatrix} \quad (9.a)$$

$$\begin{bmatrix} wx' \\ wy' \\ wz' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wx'' \\ wy'' \\ wz'' \end{bmatrix} \quad (9.b)$$

$$\begin{bmatrix} wX \\ wY \\ wZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wx' \\ wy' \\ wz' \end{bmatrix} \quad (9.c)$$

Su representación en BGs se observa en la figura 6, donde se realiza una transformación de las variables de potencia de un sistema coordenadas (x,y,z) a otro rotado (X,Y,Z) según los

ángulos ϕ, θ y ψ con respecto a cada eje. Notar que como las variables de potencia (variables de flujos y variables de esfuerzos) se dirigen entre los componentes del sistema en dirección inversa, las variables de flujo se rotan del sistema coordenado xyz al XYZ , mientras que las variables de esfuerzo lo hacen del sistema XYZ al xyz .

Esta misma rotación de variables utilizada para pasar de un sistema de referencia local a uno global, es utilizada para pasar del sistema de referencia local de cada cuerpo a uno que este alineado con la junta que lo conecta a otro cuerpo para poder interrelacionarlos, la diferencia es que cuando se pasa de un sistema local a uno global los valores de los ángulos ϕ, θ y ψ deberán irse actualizando, mientras que cuando se rota entre sistemas locales los valores de dichos ángulos permanecen constantes.

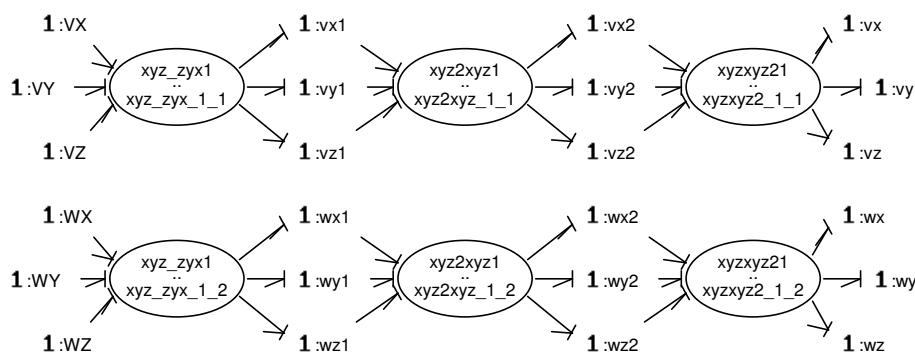


Figura 6. Modelo de rotación de las variables de potencia en el espacio.

3 MODELO

A continuación se presentan brevemente los modelos de los diferentes subsistemas que forman el sistema completo, el vehículo. Los detalles del mismo forman parte del proyecto final de la carrera de grado del primer autor [17] y pueden ser consultados allí.

3.1 Transmisión

En vehículos automóviles se utilizan casi exclusivamente los motores de combustión interna, de encendido por compresión o chispa, cuyas características difieren ampliamente de las ideales. Estos motores empiezan a transmitir torque a la cadena cinemática de la transmisión a partir de una cierta velocidad. Después, el par crece suavemente con la velocidad, hasta alcanzar un valor máximo, a partir del cual se produce una disminución como consecuencia del incremento de las pérdidas. La potencia presenta una variación análoga, aunque el máximo valor se alcanza a una velocidad más alta, próxima a la máxima permitida para el motor.

Una fuente de esfuerzo (torque) modela el motor del vehículo, en función de la velocidad de rotación del mismo, curva obtenida generalmente mediante ensayo. Para modelar el motor se introduce una combinación lineal entre la curva de torque de propulsión y la curva de

torque resistivo. En realidad lo que se suele usar es una familia de curvas cada una de ellas obtenidas en función de la posición del acelerador. Cuando el acelerador es presionado totalmente, el máximo torque de propulsión para esa velocidad es introducido en la fuente de esfuerzo. En situación intermedia el torque motor para esa velocidad (w_{motor}) se calcula como:

$$T(w) = A_p T_p + (1 - A_p) T_r \quad (10)$$

donde A_p es la posición del pedal del acelerador, T_p y T_r son el torque motor y torque resistivo, respectivamente, para esa velocidad (w) del motor. De esta forma es posible ingresar al modelo la curva del motor, la posición de la mariposa y el torque resistente. La velocidad de giro del motor es una entrada al submodelo motor producida por la integración del resto del modelo de transmisión.

La transmisión está constituida por el conjunto de órganos que conectan la salida del motor con las ruedas tractoras. Su principal función es la transmisión del movimiento, pares y potencia con el objeto de lograr en las ruedas los efectos de propulsión necesarios para vencer las resistencias al movimiento, incluidas las de inercia durante procesos de aceleración. Debe de transformar los valores de los pares y velocidades, de manera que la curva de par del motor de combustión, que no se adapta a los requerimientos de propulsión de los vehículos, transforme sus valores en las ruedas cumpliendo lo mejor posible con tales requerimientos, pares elevados a bajas velocidades y más pequeños a velocidades altas.

En particular la caja de cambios es modelada mediante un elemento denominado en BGs ‘transformador modulado’ (MTf), el cual tiene la particularidad que los esfuerzos en las dos puertas son proporcionales entre si, como lo son también los flujos y es modulado ya que su valor es variable para poder representar las diferentes relaciones de transmisión durante la simulación. El modelo es capaz de manipular diferentes relaciones de caja de forma de adaptar la planta motriz a las necesidades del vehículo, así como la relación del diferencial.

3.2 Neumático

Los neumáticos, como parte de un vehículo, son de gran importancia en el comportamiento dinámico de éste y en el conjunto de sus prestaciones. Todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el vehículo, a excepción de las aerodinámicas, son aplicadas a través de los neumáticos. Sus funciones básicas son:

- Soportar y transmitir al terreno la carga vertical.
- Desarrollar los esfuerzos longitudinales necesarios para la tracción y frenado.
- Proporcionar los esfuerzos laterales precisos para lograr el control y estabilidad de la trayectoria.
- Actuar como amortiguador de las acciones dinámicas originadas por las irregularidades de la pista.

El neumático se modelo como un cuerpo rígido pero además se tuvieron en cuenta dos efectos dinámicos, uno es el rozamiento entre neumático y suelo, y el otro es la reacción a la compresión del mismo. Esto último se modela mediante un resorte que trabaja en forma

vertical con referencia al sistema de coordenadas global.

En referencia al rozamiento entre neumático y suelo, para modelar la relación no lineal entre deslizamiento y fuerza de fricción longitudinal se utilizó el modelo de Pacejka [19], uno de los modelos más usados y que surgió del ensayo experimental de una gran cantidad diferente de neumáticos, con las siguientes expresiones y parámetros tomados de la referencia [11] para el coeficiente de adherencias μ_x , en función del deslizamiento longitudinal σ

$$\begin{aligned}\mu_x &= \text{sign}(\sigma) \cdot \left[A \cdot \left(1 - e^{-b|\sigma|} \right) + c \cdot \sigma^2 - D \cdot |\sigma| \right] \\ B &= (K/d)^{1/n} \\ A &= 1.12 \quad ; \quad C = 0.625 \quad ; \quad D = 1 \\ K &= 46 \quad ; \quad d = 5 \quad ; \quad n = 0.6\end{aligned}\tag{11}$$

con $-1 < \sigma < 1$.

Para la fuerza lateral también se utilizó el modelo de Pacejka [19]. Su expresión depende de una serie de coeficientes cuyos valores han sido tomados de la referencia [11] y que se puede resumir en lo siguiente:

$$\begin{aligned}F_y &= D \cdot \sin \left[C \cdot \arctan \left[B \cdot (1 - E) \cdot \alpha + E \cdot \arctan(B \cdot \alpha) \right] \right] \\ B &= \frac{a_3 \cdot \sin \left[2 \cdot \arctan \left(\frac{F_z}{a_4} \right) \right]}{C \cdot D} \\ c &= a_0 \quad ; \quad \mu_y = a_1 \cdot F_z + a_2 \quad ; \quad D = \mu_y \cdot F_z \\ E &= a_6 \cdot F_z + a_7 \quad ; \quad a_0 = 1.3 \quad ; \quad a_1 = -53.31 \\ a_2 &= 1190 \quad ; \quad a_3 = 588.6 \quad ; \quad a_4 = 2.5212 \\ a_5 &= 0 \quad ; \quad a_6 = -0.5178 \quad ; \quad a_7 = 1.0\end{aligned}\tag{12}$$

donde α es el ángulo de deriva del neumático, y (12) representa la relación entre el esfuerzo lateral (F_y) y este ángulo de deriva y el esfuerzo normal sobre el neumático (F_z).

Como vemos para cada valor de esfuerzo normal, o carga vertical sobre el neumático, existe una curva esfuerzo vs ángulo de deriva o deslizamiento lateral, la cual da origen a una cierta rigidez lateral que afecta el comportamiento lateral del vehículo.

Por último se modeló también otro fenómeno que introducen los neumáticos llamado resistencia a la rodadura. Este se genera cuando un neumático rueda sobre una superficie dura sometido a una fuerza vertical. Como la distribución de presiones en la superficie de contacto no es simétrica respecto del eje Z., el centro de presiones y la resultante de fuerzas verticales quedan desplazadas respecto del eje X, en general hacia delante (*avance*), lo que produce un

momento alrededor del eje de rotación del neumático, que se opone a su movimiento el cual se denomina momento de resistencia a la rodadura. Los detalles de este modelo se encuentran en la bibliografía [17].

3.3 Suspensión

El comportamiento dinámico vertical del vehículo está íntimamente relacionado con el confort de los pasajeros por la influencia en éste de las vibraciones mecánicas, y con la estabilidad, por cuanto desplazamientos en esta dirección pueden originar descargas considerables de las ruedas, afectando al valor de la fuerza adherente entre éstas y la calzada.

El modelo de suspensión presentado es el de suspensión independiente en las cuatro ruedas, el cual consiste en un resorte ks y amortiguador bs , considerando, además, la masa no suspendida como cuerpo rígido tridimensional y teniendo en cuenta además cierta rigidez vertical del neumático. Para este subsistema se utiliza la metodología del modelado de junta explicada anteriormente.

3.4 Acciones aerodinámicas

Las fuerzas aerodinámicas pueden expresarse en función de la presión dinámica y de una superficie característica, mediante un coeficiente adimensional de proporcionalidad, determinado experimentalmente, que se conserva prácticamente constante para valores del número de Reynolds suficientemente altos; los cuales se presentan en condiciones operativas normales del vehículo.

$$F_{xa} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot A_f \cdot V^2 \quad (13)$$

donde ρ es la densidad de aire, C_x es el coeficiente de drag, A_f es el área frontal del vehículo y V es la velocidad de avance del vehículo relativa al viento. Los valores del coeficiente de drag son particulares del vehículo que se trate y debe ser consultada la bibliografía específica. [1,20,21]

4 RESULTADOS

4.1 Sistemas multicuerpos

Algunos ejemplos de sistemas multicuerpos resueltos con la metodología aquí presentada fueron utilizados para validar los modelos, el primero un sistema de dos péndulos acoplados extraído del software comercial SAMCEF User Manual V10.1 y el segundo un clásico trompo tridimensional [8].

4.1.1 Ejemplo 1

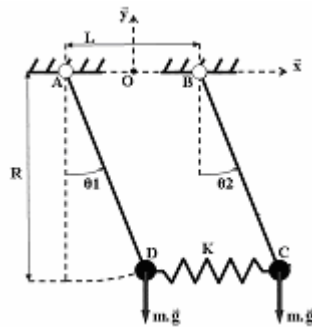


Figura 7. Ejemplo 1.

El sistema está compuesto de dos péndulos acoplados en el campo gravitacional. Cada péndulo está compuesto de una masa puntual ($m = 1 \text{ kg}$) modelada como un cuerpo rígido. Los cuerpos rígidos están anclados en los puntos A y B por juntas cilíndricas. Las masas concentradas están unidas mediante un resorte sin masa (de rigidez $K = 1 \text{ N/m}$). La longitud del resorte sin tensión es L . Los puntos A y B están fijados en todas las direcciones a los puntos C y D y estos restringidos al plano X-Y mediante una junta tipo cilíndricas. Los efectos de amortiguación y fricción no son tenidos en cuenta. La dimensión L es dos metros. La longitud de los cuerpos rígidos R es tres metros. El equilibrio es obtenido cuando los cuerpos rígidos están verticales. Inicialmente, el primero de los cuerpos rígidos es mantenido en posición vertical mientras que al ángulo de rotación del segundo se le asigna un pequeño valor $\theta_2 = \pi/180 \text{ rad}$. Entonces se calcula la evolución de los ángulos de rotación en función del tiempo. La solución analítica de este modelo es obtenida para pequeños ángulos de rotación gracias a las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \theta_1(t) &= \frac{\theta_0}{2} (-\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\
 \theta_2(t) &= \frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\
 \omega_1^2 &= \frac{g}{R} + 2 \frac{K}{m} \\
 \omega_2^2 &= \frac{g}{R}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

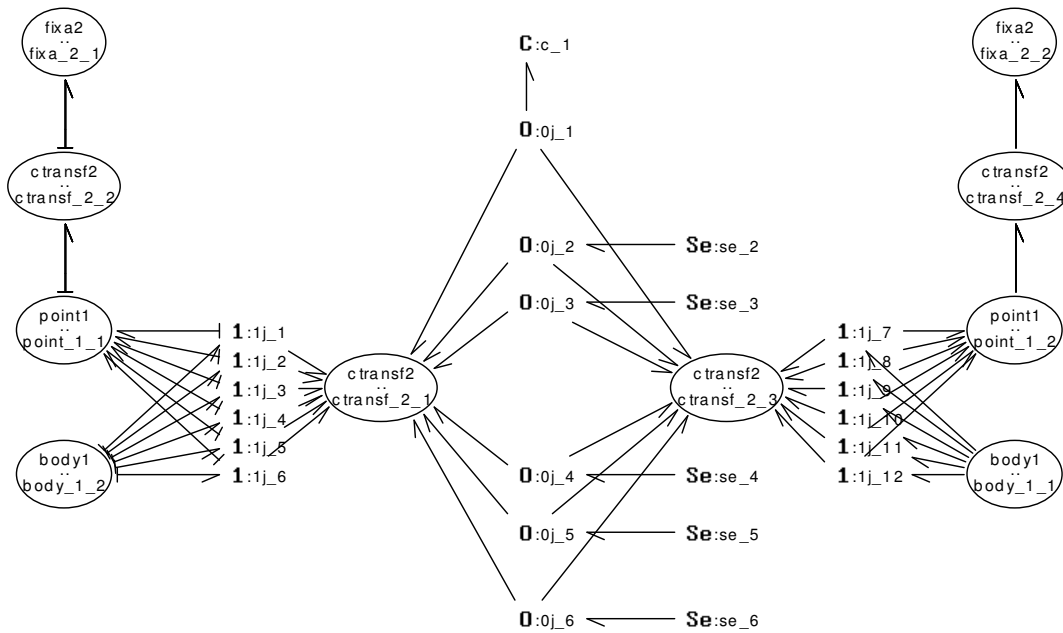


Figura 8. Modelo BGs del ejemplo 1.

En la figura 8 se muestra el modelo BGs del ejemplo 1, donde los módulos ‘fixa2’, fijan los puntos A y B mediante una junta cilíndrica, los módulos ‘point1’ trasladan los sistemas de referencia de A (y B) a D (y C) y viceversa. Los módulos ‘body1’ modelan los cuerpos rígidos, los ‘ctransf2’ realizan una transformación de coordenadas de un sistema de referencia local a un sistema de referencia global. El componente ‘C:c1’ modela el resorte que une las masas. En el elemento ‘Se:se_2’ se aplica sobre los cuerpos la fuerza de gravedad en la componente vertical del sistema de referencia global. En la siguiente grafica se muestra la solución obtenida, siendo esta satisfactoria cuando es comparada tanto con la solución analítica como con la solución obtenida con el software SAMCEF.

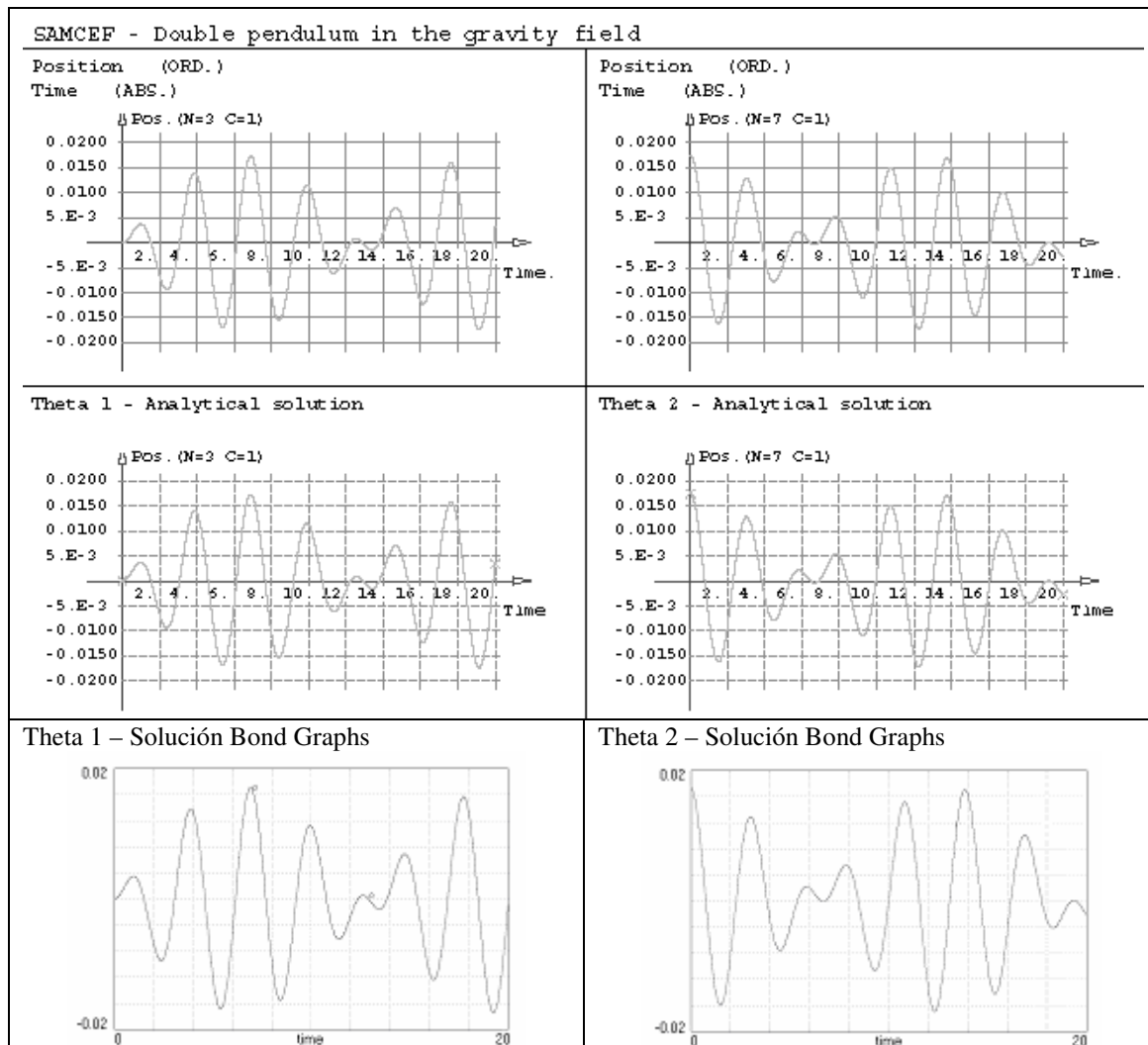


Figura 9. Resultados ejemplo 1.

La primera fila de la figura 9 muestra a izquierda el grado de libertad θ_1 y a derecha el θ_2 para la solución obtenida con SAMCEF, la segunda fila muestran las soluciones correspondientes a la solución analítica y la fila inferior las correspondientes a la solución con este modelo. Si bien este ejemplo es bidimensional y el modelo presentado en este trabajo resuelve en 3D, fue necesario utilizar una junta cilíndrica para restringir el movimiento al plano.

4.1.2 Ejemplo 2

El segundo caso es el de un trompo espacial el cual consiste en un cuerpo rígido con cierta velocidad inicial de rotación sobre su eje longitudinal y un cierto ángulo de inclinación Θ . El trompo se halla fijado al piso en su parte inferior por una junta tipo esférica.

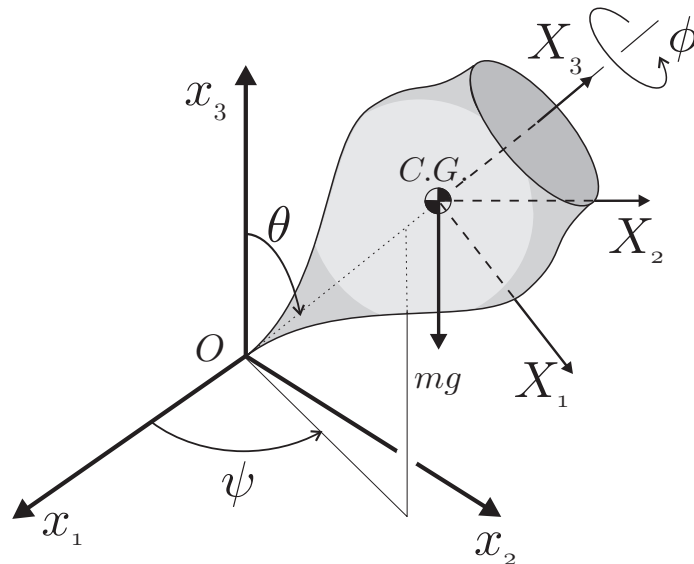


Figura 10. Ejemplo 2 – Dinámica de un trompo.

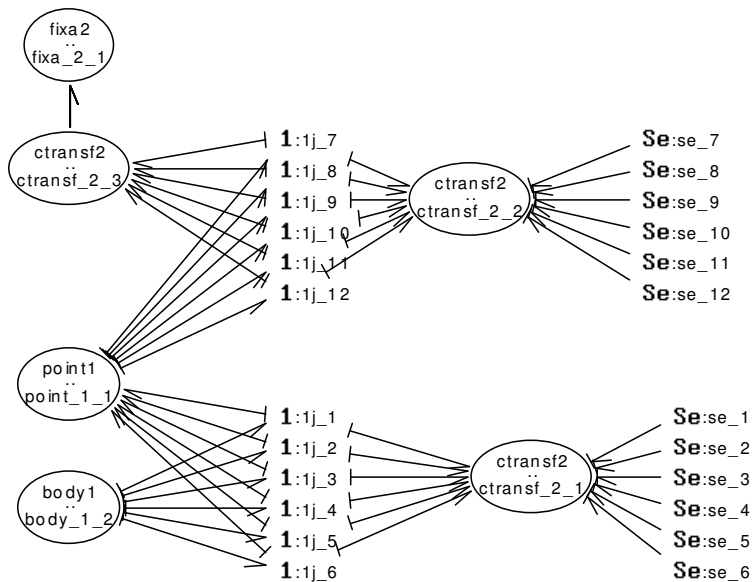


Figura 11. Modelo BGs del ejemplo 2

En la figura 11 se muestra el modelo BGs del ejemplo 2 definido en la figura 10, en donde el módulo 'fixa2', fija el punto O mediante una junta tipo esférica, el módulo 'point1' traslada los sistemas de referencia de una terna móvil fija al cuerpo ubicada en el centro de gravedad del trompo (C.G) a otra terna, fija a la tierra y ubicada en el punto O y viceversa. El módulo 'body1' modela el cuerpo rígido, los módulos 'ctransf2' realizan una transformación de coordenadas de un sistema de referencia local a un sistema de referencia global para resolver la orientación.

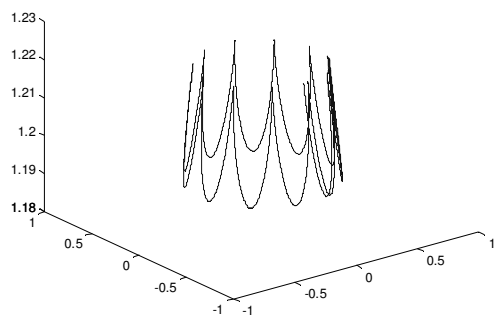


Figura 12. Trayectoria del CG del trompo en las tres dimensiones

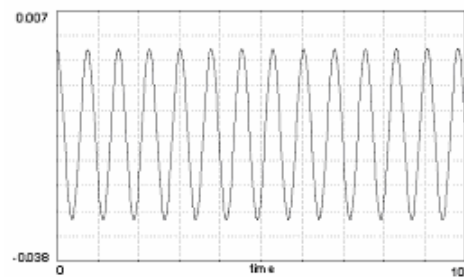


Figura 13. Desplazamiento del CG en función del tiempo en el eje Z ($\times 3$)

Para validar el modelo fueron resueltas tres situaciones diferentes con trayectorias características del centro de masa del trompo dependiendo de las condiciones iniciales. En los dos primeros casos las condiciones iniciales son una velocidad de rotación del trompo sobre su propio eje y una velocidad de rotación sobre el eje Z del sistema de referencia global, uno en el mismo sentido de rotación que la del eje del trompo y el otro en sentido opuesto. Por razones de brevedad aquí solo se incluyen los resultados para el tercer caso en el cual solo se le impone al trompo como condición inicial una velocidad de rotación sobre su propio eje.

La figura 12 muestra una de las tres órbitas reportadas en la bibliografía [8], mientras que la figura 13 muestra el desplazamiento del centro de gravedad en la dirección vertical. En todos los casos los resultados fueron satisfactorios.

4.2 Vehículo terrestre

Después de haber realizado algunos tests de validación del modelo, a continuación se presenta la aplicación del mismo al caso de un vehículo del cual se disponen ciertos datos extraídos de la bibliografía [1].

Los datos característicos de un Renault Clio RL 1.1 proporcionados por el fabricante son:

Coefficiente aerodinámico	0.33
Área frontal	1.86 m ²
Longitud entre ejes	2.472 m

Peso del vehículo	8100 N
Altura del centro de gravedad	0.6 m
Peso sobre el eje delantero	5100 N
Peso sobre el eje trasero	3000 N
Par motor máximo	78,5 Nm a 2500 rpm
Potencia máxima	48 CV a 5250 rpm
Relación del grupo cónico	3.571
Relación de transmisión en primera	3.731
Relación de transmisión en segunda	2.049
Relación de transmisión en tercera	1.321
Relación de transmisión en cuarta	0.967
Relación de transmisión en quinta	0.795
Relación de transmisión en marcha atrás	3.571
Neumáticos tipo y dimensiones	145 70 R13 S
Desarrollo	1.650 m
Velocidad máxima	146 km/h
Aceleración 0-100 km/h	17 s
Tiempo necesario para recorrer 1000 metros	38 s
Datos derivados,	
Distancia entre CDG y tren delantero	0.916 m
Distancia entre CDG y tren trasero	1.556 m
Radio nominal del neumático	0.2666 m
Datos supuestos	
Densidad del aire	1.225 kg/m ³
Masa no suspendida (en cada rueda)	38.42 kg
Rigidez vertical neumático	150 000 N/m
Momento de inercia neumático	1.95 Kg m ²
Amortiguador	475 N s/m
Rigidez de suspensión	14 900 N/m
Momento de inercia Yaw masa susp.	2345.53 Kg m ²
Momento de inercia Pitch masa susp.	2443.26 Kg m ²
Momento de inercia Roll masa susp.	637.26 Kg m ²

El primer caso es el de una salida con partida detenida. Con la mariposa del acelerador totalmente abierta y una vez que se suelta el pedal del embrague, se aprecia el proceso de aceleración del vehículo en una trayecto recto. En las gráficas 14 a 19 se muestran resultados para este caso. En la figura 14 se ve como cambian las revoluciones del motor a medida que se introducen los cambios y por lo tanto varía la relación de transmisión. En la figura 16 se lee la velocidad del vehículo en *m/s* para cada instante, alcanzando los 100 km/h antes de los 20 segundos. En la figura 15 se muestra el deslizamiento longitudinal σ de uno de los neumáticos tractores, con los cuales en función de la carga instantánea sobre cada neumático se calcula la

fuerza de roce cuya reacción genera el avance del vehículo (ver figura 17). En la figura 18 se muestra el ángulo de cabeceo (*pitch*) del chasis. Se ve que durante aproximadamente los primeros 10 segundos, hasta ubicar la cuarta marcha, el cabeceo es oscilante quedando establecido en un valor negativo durante la maniobra en cuarta y quinta debido a que el vehículo continúa acelerando. La figura 19 muestra la carga sobre un neumático trasero. El tiempo necesario para que el vehículo alcance los 100km/h es de 17 segundos, coincidente con el dato que brinda el fabricante.

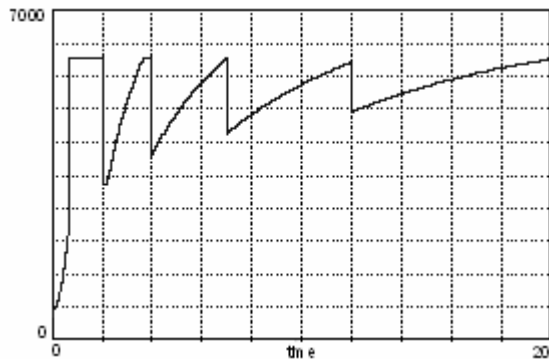


Figura 14. Velocidad del motor [RPM] en función del tiempo

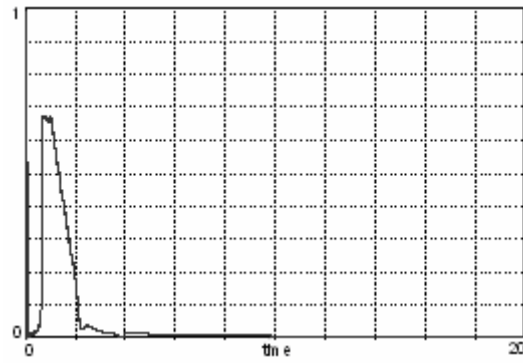


Figura 15. Deslizamiento de uno de los neumáticos tractores en función del tiempo

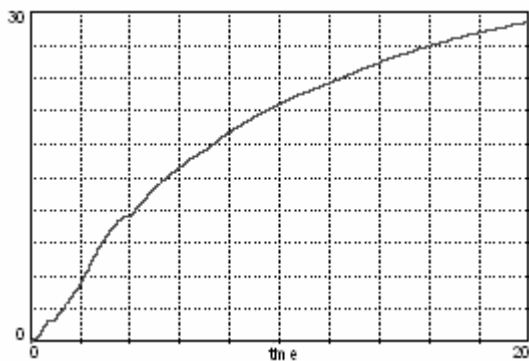


Figura 16. Velocidad en el eje x [m/s] en función del tiempo

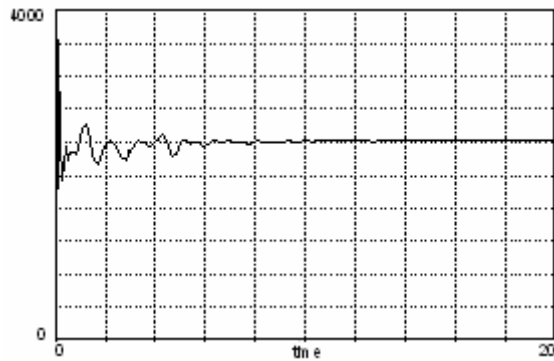


Figura 17. Carga sobre uno de los neumáticos tractores [N] en función del tiempo

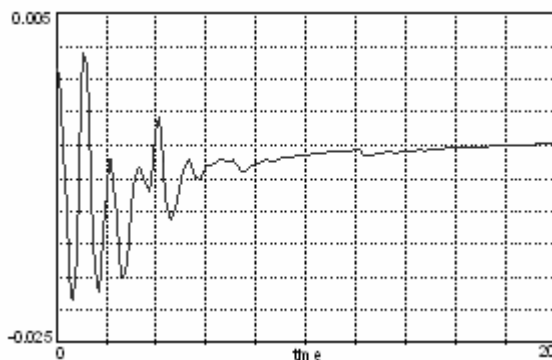


Figura 18. Ángulo de rotación del chasis según el eje y [rad] (*pitch*) en función del tiempo

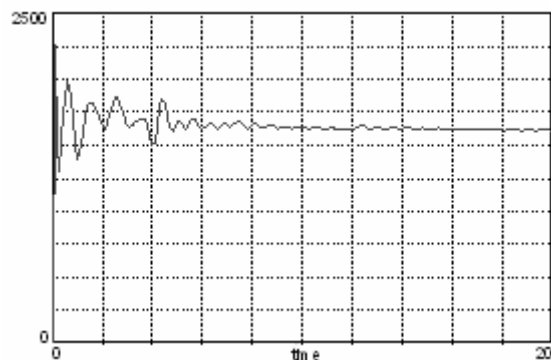


Figura 19. Carga sobre uno de los neumáticos traseros [N] en función del tiempo

En el segundo caso analizado se le hace seguir al vehículo una trayectoria curva. El vehículo viene circulando en tercera marcha a 65 km/h, el conductor gira el volante de forma tal que las ruedas directrices giren un ángulo máximo de un grado siguiendo una ley como la mostrada en la figura 20, insuñiendo un tiempo de 10 segundos para que las ruedas alcancen ese giro.

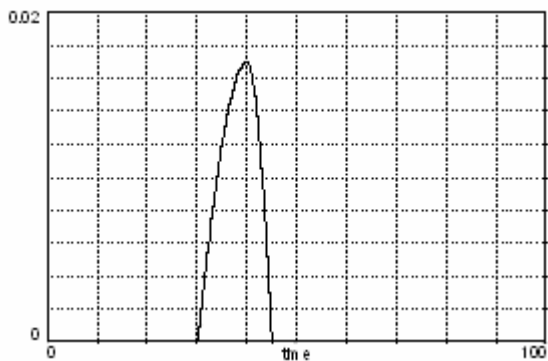


Figura 20. Angulo de giro de las ruedas directrices [rad] en función del tiempo

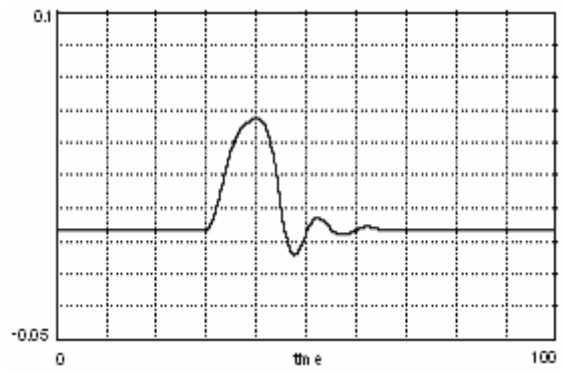


Figura 21. Angulo de deslizamiento de una rueda delantera [rad] en función del tiempo

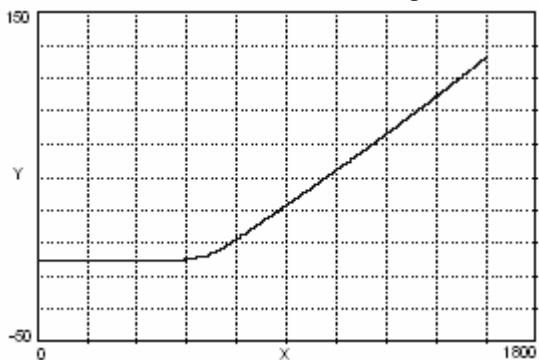


Figura 22. Trayectoria x-y [m]

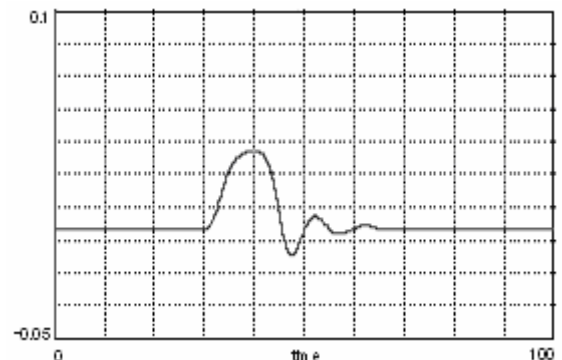


Figura 23. Angulo de deslizamiento de una rueda trasera [rad] en función del tiempo

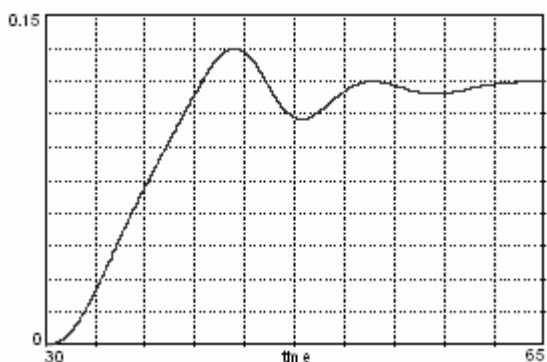


Figura 24. Angulo de giro según eje z [rad] (yaw) en función del tiempo

Luego el volante vuelve a su posición original (0 grado) tardando 5 segundos más en llegar a esa posición. En la figura 21 se muestra el ángulo de deslizamiento lateral (α) de una de las ruedas directrices delanteras y en la figura 23 una de las traseras. En la figura 22 se muestra la trayectoria seguida por el vehículo y en la figura 24 el ángulo de guiñada del chasis (*yaw*).

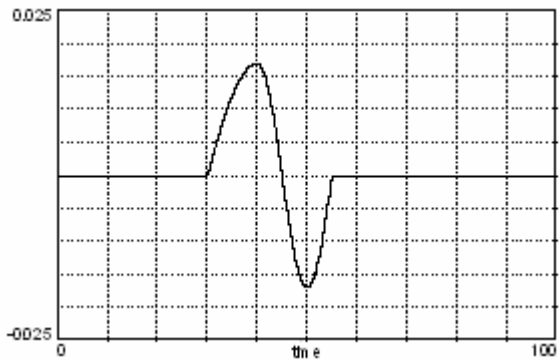


Figura 25. Ángulo de giro de las ruedas directrices [rad] en función del tiempo

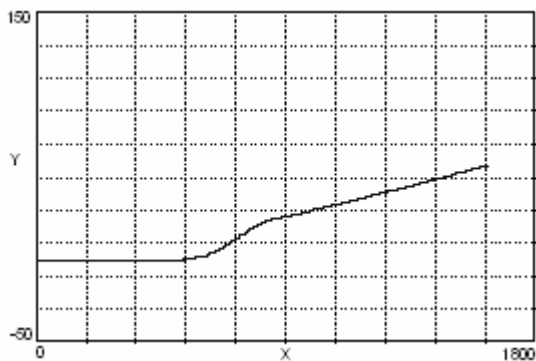


Figura 27. Trayectoria x-y [m]

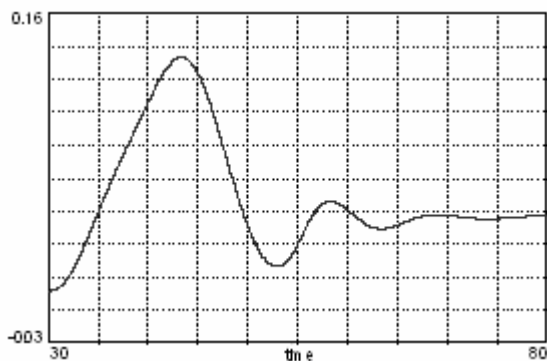


Figura 29. Ángulo de giro según eje z [rad] (*yaw*) en función del tiempo

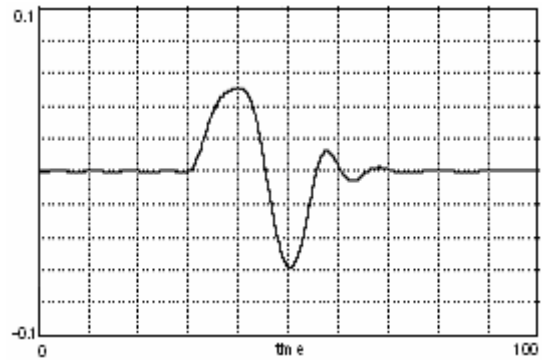


Figura 26. Ángulo de deslizamiento de una rueda delantera [rad] en función del tiempo

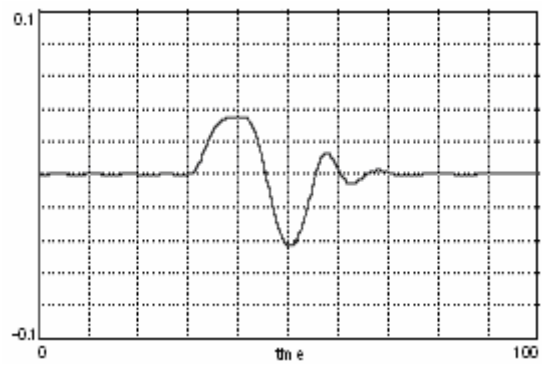


Figura 28. Ángulo de deslizamiento de una rueda trasera [rad] en función del tiempo

En el tercer caso se impone a la dirección una maniobra tipo zig-zag. El vehículo viene circulando en tercera marcha a 65 km/h, el conductor gira el volante siguiendo una ley como la mostrada en la figura 25, de forma tal que las ruedas directrices giren un ángulo máximo de un grado insumiendo un tiempo de 10 segundos. Luego se gira el volante en dirección contraria hasta alcanzar un ángulo de un grado en la otra dirección insumiendo un tiempo de 10 segundos y volviendo el volante a la posición neutra en los restantes 5 segundos. La figura 26 muestra el ángulo de deslizamiento lateral de una de las ruedas delanteras y la figura 28 de una de las traseras, la figura 27 presenta la trayectoria seguida por el vehículo y la figura 29 muestra el ángulo de guiñada. El comportamiento de este último caso presenta obviamente cierta similitud con el caso anterior y se puede apreciar que en ambos casos la estabilidad direccional es satisfactoria. No obstante para hacer un análisis más riguroso de la misma deberíamos analizar los autovalores de la matriz de respuesta direccional para lo cual podríamos utilizar este modelo para armar tal matriz haciendo sensibilidad a los parámetros. Este trabajo queda como tarea por realizar.

5 DISCUSION

Los resultados obtenidos para los ejemplos de sistemas multicuerpos fueron satisfactorios, tanto para el ejemplo 1 comparándolo con su solución analítica para pequeños ángulos, como para el ejemplo 2 comparándolo con los resultados obtenidos por el software SAMCEF para grandes rotaciones espaciales. No obstante queda un trabajo importante por hacer para terminar de validar el modelo sometiendo el mismo a otros casos más duros de resolver.

Para el ejemplo del vehículo se observa en el caso de la trayectoria recta como las relaciones de transmisión tercera, cuarta y quinta se encuentran próximas, lo cual indica que el vehículo se encuentra optimizado para su uso en ruta a velocidades superiores a los 50km/h. Para los casos de trayectorias curvas, la respuesta es transitoria durante el tiempo que transcurre desde que se actúa sobre la dirección, hasta que cesan las oscilaciones, momento en el cual se considera que se alcanza el estado estacionario. El comportamiento en este periodo define las características de respuesta transitoria, y el comportamiento direccional del vehículo depende en gran medida, de estas características. Lo deseable es que esta respuesta sea rápida y con pocas y pequeñas oscilaciones.

6 CONCLUSIONES

Dado que la teoría de BGs, si bien permite armar modelos no lineales y de muchos grados de libertad, se basa en componentes unidimensionales, su aplicación en sistemas mecánicos tridimensionales queda limitada a pequeñas rotaciones resolviéndose estas de forma aproximada.

Un importante objetivo de este trabajo fue extender esa aplicación a sistemas mecánicos con grandes rotaciones tridimensionales. Para lo cual se logró desarrollar componentes que modelen cuerpos rígidos en traslación y rotación en las tres dimensiones. Otro importante logro fue poder trabajar con múltiples sistemas de referencias, un sistema de referencia local por cada cuerpo rígido y además su posible transformación a algún sistema global. Se

desarrolló una metodología de modelado de sistemas multicuerpos con algunos de los más importantes tipos de juntas conocidas y usadas en dinámica vehicular, teniendo como características el hecho de ser sistemática, orientada a objeto y altamente intuitiva, esto sumado a las características originales del modelado de sistemas dinámico mediante BGs.

El objetivo principal de este trabajo fue la aplicación en dinámica vehicular para lo cual se logro desarrollar un modelo tridimensional de multicuerpos al cual se le pudo acoplar una gran cantidad de subsistemas interactuantes obteniéndose como resultado un modelo que representa fielmente las características de un vehículo terrestre. Este modelo fue utilizado exitosamente en un trabajo en desarrollo sobre diagnóstico de fallas en vehículos [18].

7 REFERENCIAS

- [1] F. Aparicio Izquierdo, C. Vera Alvarez, V. Días López, *Teoría de los vehículos automóviles*. U. P. de Madrid
- [2] Cátedra DSF, *Introducción a la Modelización con Bond Graphs*. Departamento de Electrónica – FCEIA – UNR.
- [3] Ronald C. Rosenberg, Dean C. Karnopp. *Introduction to Physical System Dynamics*, Mc. Graw Hill, New York.
- [4] Ronald C. Rosenberg, Donald L. Margolis, Dean C. Karnopp. *Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, A Wiley-Interscience Publication, New York.
- [5] Albert M. Bos. *Modelling Multibody Systems in terms of Multibond Graphs, with application to a motorcycle*.
- [6] Ahmed A. Shabana. *Dynamics of Multibody systems*. A Wiley-Interscience Publication.
- [7] Goldstein Herbert. *Classical Mechanics*.
- [8] Michel Géradin, Alberto Cardona. *Flexible Multibody Dynamics*. John Wiley & Sons.
- [9] Jinhee Jang, Changsoo Han. *Proposition of a Modeling Method for Constrained Mechanical Systems Based on the Vector Bond Graph*. Journal of the Franklin Institute. Vol. 335B, No 3, pp. 451 469, 1998.
- [10] J. M. Mera, C. Vera, J. Félez. *2WD Power Train Modelling with Bond Graph applied to Vehicular Dynamics*. Universidad Politécnica de Madrid, Spain.
- [11] Ulrico Kramer. *The Application of Bond-Graphs to Real-Time Simulation Modelling of Vehicle Dynamics*. AutoLab Bielefeld University of Applied Sciences.
- [12] D. Jaume, M. Vergé, A. Rault. *3D Dynamic Car Modelling using Bond Graphs*. ICBGM 95.
- [13] D. Jaume, M. Vergé, P. Royer, M. Delhom. *Bond Graph Modelling: a good communication tool between University and Industry*. Laboratoire d'automatique des Arts et Metiers – PSA/DRAS, route de Gisy.
- [14] F. Assadian, Jong-Seob Won, Reza Langari. *Global Chassis Control with a Two-Wheel Automobile Model*. Centre Technique PSA – Texas A&M University.
- [15] J. M. Mera, C. Vera, J. Félez, J.J. Esperilla. *Influence of the Roll Axis Consideration in Vehicle Dynamics, Bond Graphs Models*. Engineering Graphics and Simulation Group, Universidad Politécnica de Madrid.

- [16] R. Cacho, J. Felez. *Simulation of a Fighter Aircraft with its nose Radar Servocontrols Through Complex Multibond Graphs*. INSIA, Universidad Politecnica de Madrid.
- [17] G. Filippini. *Dinámica Vehicular mediante bond graphs*. Proyecto final de carrera de pregrado. Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Rosario, 2004
- [18] D. Delarmelina, L. Silva, S. Junco. *Fault Diagnosis in Vehicle based on its Dynamic Model*. Escuela de Ingeniería Mecánica y Escuela de Ingeniería Electronica, Universidad Nacional de Rosario, 2005
- [19] H. Pacejka. *Tyre Modelling for Use in Vehicle Dynamics Studies*. SAE Paper, No. 870421.
- [20] W.H. Hucho, editor. *Aerodynamics of road vehicles*. SAE, (1998).
- [21] R. H- Barnard, *Road vehicle aerodynamic design*, Second Edition, MechAero, England, (2001)