

## ESTUDIO NUMÉRICO DE UNA COLUMNA CRUCIFORME EN GRANDES DEFORMACIONES

**Claudio A. Careglio<sup>a,b,c</sup>, Anibal E. Mirasso<sup>a,b</sup>, Carlos G. García Garino<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>LAPIC, Instituto Tecnológico Universitario, Universidad Nacional de Cuyo, Casilla de Correo 947, 5500 Mendoza, Argentina, [ccareglio@uncu.edu.ar](mailto:ccareglio@uncu.edu.ar), [aemirasso@uncu.edu.ar](mailto:aemirasso@uncu.edu.ar), [cgarcia@itu.uncu.edu.ar](mailto:cgarcia@itu.uncu.edu.ar)

<sup>b</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Campus Universitario, Parque General San Martín, 5500 Mendoza, Argentina

<sup>c</sup>CONICET, Becario Doctoral

**Palabras Clave:** Columna cruciforme, grandes deformaciones, cargas máximas elastoplásticas.

**Resumen.** La columna cruciforme ha sido tratada ampliamente en la literatura, tanto empleando la teoría de deformación total como la teoría incremental de plasticidad. Usualmente se ha modelado su comportamiento mediante teoría de placas o de cáscaras, obteniendo cargas críticas aunque no trayectorias poscríticas. Existe una importante discrepancia en los resultados obtenidos entre las distintas teorías de plasticidad y los resultados experimentales.

En el presente trabajo se obtienen con SOGDE3D respuestas no lineales de columnas cruciformes, mediante elementos finitos tridimensionales en el contexto de grandes deformaciones, tanto para materiales elásticos como elastoplásticos. Se obtienen trayectorias de equilibrio no lineales que superan ampliamente los estados críticos de equilibrio alcanzando desplazamientos laterales que son varias veces superiores al espesor de la sección. Se consideran distintos materiales, diferentes longitudes y condiciones de borde. Se obtienen cargas características del comportamiento de estos tipos estructurales.

## 1 INTRODUCCION

Durante décadas el pandeo torsional de columnas con una sección transversal en forma de cruz, con alas delgadas bajo compresión uniaxial, ha sido tomado como objeto de estudio para comparar diferentes formulaciones elastoplásticas. La predicción de la carga máxima obtenida en pandeo plástico a partir de la teoría incremental de plasticidad y de la teoría de deformación total, ha sido discutida por diferentes autores y comparada con resultados experimentales.

Los primeros trabajos se remontan a Handelman y Prager (1948) quienes tratan el pandeo torsional plástico de columnas cruciformes mediante el modelo de placas comprimidas las cuales están simplemente soportada en un extremo y libre en el otro, utilizando teoría incremental de plasticidad. En su trabajo obtienen ecuaciones válidas para metales que relacionan tensión-deformación y que permiten calcular valores de carga crítica. Para un modelo de placa, Stowell (1951) calcula la máxima tensión de compresión, utilizando la teoría de deformación total combinada con la teoría para deflexiones finitas, y los compara con resultados obtenidos en forma experimental para aluminio 2024-T4. Posteriormente, Gerard y Becker (1957) realizan varios ensayos para este mismo aluminio y los comparan con los resultados teóricos obtenidos por Stowell (1951), obteniéndose una muy buena correlación entre los resultados teóricos y experimentales. Los resultados experimentales de Gerard y Becker son los que a lo largo de la bibliografía sobre el tema citan la mayoría de los autores (Quoc, 1984; Lubliner, 1990; Bazant y Cedolin, 2003).

Hutchinson y Budiansky (1976), en base a trabajos anteriores (Onat y Drucker, 1953) y utilizando una combinación de métodos numéricos y un análisis asintótico, concluyen que para una columna cruciforme el efecto de las imperfecciones, aún siendo ellas muy pequeñas, tienen una gran influencia sobre la carga máxima de la misma, y justifican las discrepancias entre la teoría incremental y los resultados experimentales de Gerard y Becker (1957).

Usando la teoría incremental de plasticidad varios autores han encontrado la paradoja que la carga de bifurcación primaria no se encuentra afectada por la plasticidad inducida en forma axial (Lubliner, 1990; Bazant y Cedolin, 2003).

Damkilde (1985), investiga el pandeo elastoplástico de una cruciforme usando elementos finitos de placa triangulares de seis nodos y plasticidad incremental. Resuelve un problema lineal de autovalores a partir de una trayectoria fundamental en la que sólo se consideran no linealidades referidas al material. Encuentra incidencia de la longitud de la columna en los resultados y no mantiene diferencias con los resultados de Gerard y Becker (1957).

Papadopoulos y Lu (1998), demuestran que se puede obtener una buena correlación entre los resultados experimentales y los obtenidos por medio de la teoría incremental de la plasticidad. En particular emplean un modelo constitutivo de elastoplasticidad finita, basado en la teoría de Green y Naghdi (1965). Para realizar el análisis de la estructura cruciforme en forma numérica utilizan elementos finitos hexagonales de ocho nodos y modos cuadráticos incompatibles como los usados por Simo y Armero (1992). Para encontrar la carga de bifurcación monitorean los cambios de signo en los autovalores de la matriz de rigidez tangente.

Recientemente Makris (2003) vuelve a abordar, como consecuencia de una aplicación en el área de protección sísmica de estructuras como parte de disipadores de energía, el tema del pandeo de este tipo de elemento estructural. En su trabajo realiza un desarrollo analítico y emplea teoría de pequeñas deformaciones, demostrando que cuando las alas de la columna no son perfectamente rectas la teoría incremental de la plasticidad predice que en el inicio del pandeo plástico las tensiones y deformaciones de corte están relacionadas por el módulo tangente de corte, viéndose la resistencia en torsión fuertemente afectada incluso para una

perturbación de la geometría recta.

Como puede inferirse de lo expuesto anteriormente, el problema del pandeo plástico torsional de una columna cruciforme ha sido abordado de muy diferentes maneras, y hasta con condiciones de borde distintas.

En Careglio, et. al (2006) se analizaron algunos problemas de estabilidad del equilibrio en presencia de cinemática de grandes deformaciones para el caso elástico como así también para el caso elastoplástico. Se analizó el comportamiento de una columna cruciforme para una longitud fija y distintas imperfecciones.

En este trabajo se realiza el estudio numérico de columnas cruciformes mediante elementos finitos tridimensionales hexaedros de ocho nodos (Careglio, et. al, 2005) y una formulación incremental con ecuación constitutiva elastoplástica implementada en la configuración deformada basada en hiperelasticidad y cinemática multiplicativa del tensor gradiente de deformación (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995; García Garino y Oliver, 1996). En particular se encuentran trayectorias de equilibrio no lineales de columnas cruciformes imperfectas, tanto para comportamiento elástico como elastoplástico, para diferentes longitudes, materiales y condiciones de borde. Finalmente se obtienen algunas conclusiones.

## 2 FORMULACIÓN UTILIZADA

Para realizar las simulaciones numéricas y efectuar los análisis antes mencionados, los autores han empleado un código de elementos finitos previamente desarrollado, denominado SOGDE3D (Careglio et. al, 2005) el cual posee la capacidad de encontrar trayectorias de equilibrio no lineales. Dicho código tiene implementado el elemento sólido hexaedro lineal estándar (H1) (Zienkiewicz y Taylor, 1991) y el hexaedro lineal mixto con presión constante (H1/P0) (Zienkiewicz y Taylor, 1991) el cual es la extensión al caso 3D del elemento mixto Q1/P0.

Se emplea un modelo constitutivo originalmente propuesto por García Garino (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995; García Garino y Oliver, 1996) en el cual la cinemática es tenida en cuenta empleando la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , descompuesto en sus componentes elásticas  $\mathbf{F}^e$  y plásticas  $\mathbf{F}^p$ . También se asume una descomposición aditiva en sus componentes elásticas y plásticas del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{d}$ . Además, el modelo constitutivo está implementado en la configuración deformada empleándose el tensor de Almansi.

Con respecto a las tensiones, las mismas se derivan a partir de un potencial hiperelástico y los efectos de plasticidad son tenidos en cuenta mediante la teoría de variables internas, con lo cual se tiene un modelo consistente con la termodinámica de los sólidos irreversibles.

Para el caso particular de los metales se acepta que las deformaciones elásticas son pequeñas, por lo que la componente elástica de la energía libre se puede escribir como una forma cuadrática del tensor elástico de Almansi y de las constantes de Lamé del material.

En el mencionado código de elementos finitos la plasticidad se tiene en cuenta mediante una regla de flujo asociada con la función de fluencia  $J_2$  y con endurecimiento isótropo lineal en función de la deformación plástica efectiva.

La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un esquema predictor elástico y corrector plástico. En el predictor elástico las variables internas plásticas permanecen fijas, y resulta en un algoritmo explícito evitando la integración numérica en el tiempo del predictor. En el corrector plástico permanece fija la configuración deformada y se actualizan las variables internas para satisfacer la ecuación constitutiva. Las ecuaciones de equilibrio no lineales resultantes de discretizar el principio de trabajos virtuales se resuelven mediante un esquema incremental iterativo de tipo Newton Raphson (Bathe, 1982).

### 3 CASOS ANALIZADOS

En este trabajo se ha realizado el análisis numérico tridimensional del comportamiento en pandeo de la columna de sección en cruz con cuatro alas iguales conectadas rígidamente en la línea central como se ilustra en la Figura 1, siendo “L” la longitud de la columna, “b” el ancho de cada ala y “t” el espesor de las mismas.

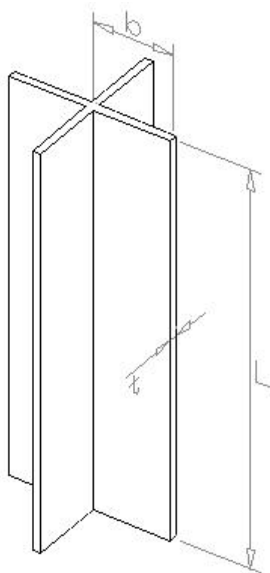


Figura 1: Columna cruciforme sin distorsión.

Con el propósito de estudiar el comportamiento de la columna frente a diferentes materiales, longitudes y condiciones de borde se han efectuado análisis no lineales de estructuras con configuraciones imperfectas. Para ello se ha impuesto a la geometría, originalmente perfecta, una imperfección inicial dada por un giro  $\theta$  de la sección transversal, donde su magnitud varía a lo largo de la longitud de la columna desde cero en un extremo al valor máximo de imperfección en el otro.

A continuación se describen los casos estudiados.

#### 3.1 Material 1

Se han analizado diferentes columnas considerando material elástico y elastoplástico, siendo las propiedades del primero  $E=21000 \text{ kg/mm}^2$  y  $\nu=0.3$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  el módulo de Poisson. Para el segundo se adopta un material isótropo con una superficie de fluencia  $J_2$ , tensión de fluencia  $\sigma_y=25.31 \text{ kg/mm}^2$  y endurecimiento lineal  $H=100 \text{ kg/mm}^2$  con lo que se tiene un comportamiento elastoplástico con propiedades similares a las de un acero A36 pero bilineal. En lo sucesivo se referirá al material con las propiedades anteriores como “material 1” elástico y “material 1” elastoplástico respectivamente.

Las dimensiones de las estructuras modeladas son: longitudes  $L=40 \text{ mm}$  y  $L=80 \text{ mm}$ , ancho de cada ala  $b=10 \text{ mm}$  y espesor  $t=1 \text{ mm}$ , con lo que se obtienen relaciones longitud/ancho desde 4 a 8 y una relación ancho/espesor igual a 10. Como imperfección ambas longitudes tienen el mismo ángulo inicial  $\theta$  por unidad de longitud. Hutchinson y Budiansky (1976) han definido el parámetro de imperfección  $\zeta=b^2\theta/t$ , el cual indica que para un valor de  $\zeta=0.001$  la imperfección puede considerarse despreciable y para un  $\zeta=0.1$  puede considerarse demasiado grande. En este trabajo se adopta  $\zeta=0.02$  siendo esta una

imperfección pequeña pero no despreciable.

Las geometrías imperfectas se han discretizado en cada ala con 32 elementos en la longitud, 8 en la altura y 2 en el espesor, obteniéndose la malla de elementos finitos mostrada en la Figura 2. Para el caso elástico se ha empleado el elemento H1 estándar (Zienkiewicz y Taylor, 1991) y para el caso elastoplástico el hexaedro lineal mixto con presión constante (H1/P0) (Zienkiewicz y Taylor, 1991).



Figura 2: Malla de elementos finitos empleada.

Con respecto a las condiciones de borde, en el primer caso estudiado (“condición de borde 1”) las secciones extremas de las columnas ( $x=0=L$ ) tienen sus desplazamientos impedidos en las direcciones perpendiculares al eje de la columna. En el segundo caso (“condición de borde 2”) en la sección  $x=0$  se han impedido los desplazamientos en las direcciones perpendiculares al eje de la columna, y en  $x=L$  el nodo central solamente puede desplazarse en la dirección del eje de la estructura con lo que dicha sección puede rotar alrededor del eje  $x$ . En ambas condiciones de borde, se han aplicado desplazamientos uniformes de compresión impuestos en el extremo superior de la estructura.

En Lubliner (1990) se obtiene una tensión crítica de pandeo torsional dada por

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad (1)$$

para una longitud  $L$  mucho mayor que  $b$  y  $\zeta = 0$ . Para el caso elástico y los datos asumidos la carga crítica, denominada  $P_{Lubliner}$  en este trabajo, da  $P_{Lubliner} = 3150$  kg. En Makris (2003), para calcular la tensión crítica elástica de la columna cruciforme en función de la longitud, se considera cada ala como una placa uniformemente comprimida con tres lados simplemente soportados y el cuarto libre para la cual la tensión crítica esta dada por (Timoshenko y Gere, 1961)

$$\sigma_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{b^2}{L^2} + G \right] \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad (2)$$

Para valores de  $L$  de 200 mm el resultado de la carga crítica obtenida a partir de esta última expresión es 0.6% mayor que el de  $P_{Lubliner}$ ; en cambio para  $L=80$  mm, es 3.7% superior.

En la Figura 3 pueden observarse las trayectorias de equilibrio de las estructuras imperfectas del material 1 con la condición de borde 1 para las dos longitudes estudiadas y para el mismo parámetro de imperfección  $\zeta$ . Estas trayectorias se han graficado en función de los desplazamientos laterales  $u_y$  del nodo con mayor deflexión, el cual, para esta condición de borde, se encuentra ubicado en un punto en “b” a la mitad de la longitud de la respectiva columna. En las curvas de la gráfica superior se representan las trayectorias correspondientes al caso elástico junto con la carga  $P_{Lubliner}$  y en la inferior las correspondientes al caso elastoplástico.

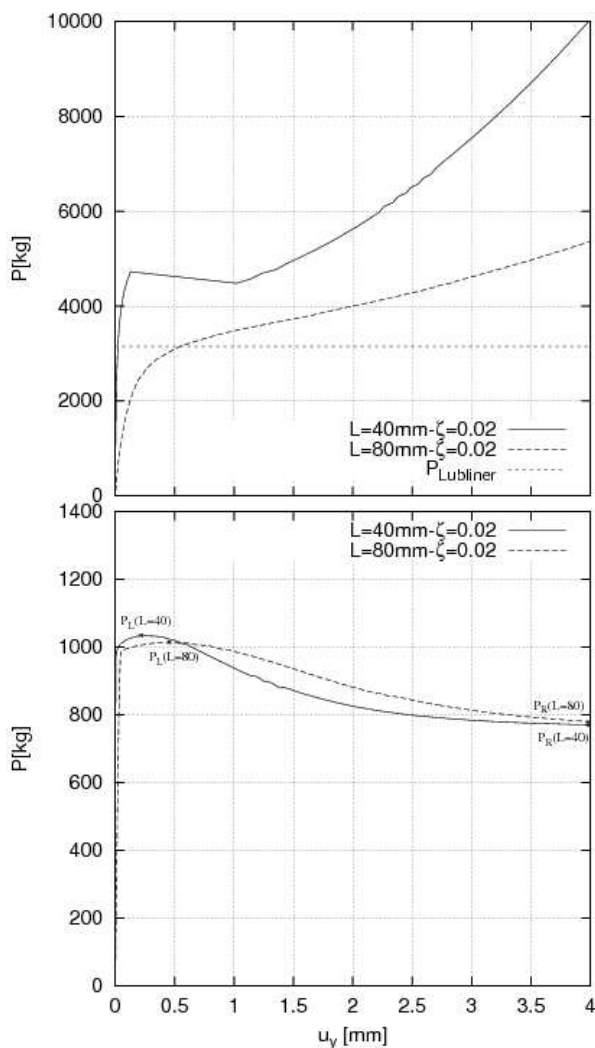


Figura 3: Trayectorias de equilibrio elásticas, elastoplásticas y  $P_{Lubliner}$  para el material 1 y condición de borde 1.

Para el caso elástico, para  $L=40\text{mm}$ , se produce un incremento del desplazamiento lateral al alcanzarse un valor de carga de 4727.4 kg, aún con leve pérdida de carga portante, hasta alcanzar un desplazamiento  $u_y=1.02$  mm, a partir del cual comienza una rigidización de la respuesta. Para la columna de mayor longitud ( $L=80\text{mm}$ ) hay pérdida de rigidez hasta  $u_y=1.41$  mm y  $P=3686.83$  kg continuando luego con una rigidización de la trayectoria de equilibrio. Además puede apreciarse que la rigidez referida al origen entre las dos curvas elásticas es diferente.

Se debe destacar que, aún para la discretización adoptada, la respuesta elástica para  $L=80$  mm presenta un cambio de rigidez apreciable en el entorno de la carga crítica teórica  $P_{Lubliner}=3150$  kg.

En la parte inferior de la Figura 3, las trayectorias elastoplásticas presentan dos valores de carga característicos muy diferentes al caso elástico. El primero de ellos es el correspondiente al denominado valor de carga límite  $P_L$  para el cual la carga es máxima y la rigidez es nula. Este valor es de 1033.88 kg para  $L=40$  mm y de 1013.94 kg para  $L=80$  mm, siendo estos valores inferiores a los obtenidos en el caso elástico para los mismos desplazamientos laterales. El segundo de ellos, denominado valor de carga residual  $P_R$ , aparece luego de que se produce un comportamiento de tipo ablandamiento en la estructura y la rigidez es prácticamente nula. En este trabajo, para todos los casos elastoplásticos, se ha tomado como valor de carga residual  $P_R$  el valor de carga correspondiente a un desplazamiento lateral  $u_y=4$  mm. Para la Figura 3 para la columna de menor longitud el valor de carga  $P_R$  del caso elastoplástico es aproximadamente 12.5 veces inferior al correspondiente valor de carga para el mismo del caso  $u_y$  elástico.

En la Figura 4 se muestran se muestran las trayectorias de equilibrio en función de los desplazamientos laterales del nodo con mayor traslación lateral, para el mismo material e igual  $\zeta$  que en la figura anterior, pero esta vez con la condición de borde 2. En este caso el nodo considerado es el que está ubicado en un punto en "b" y en  $x=L$ . En la parte superior de la gráfica se representan las trayectorias correspondientes al caso elástico junto con la carga  $P_{Lubliner}$ ; y en la parte inferior, las correspondientes al caso elastoplástico.

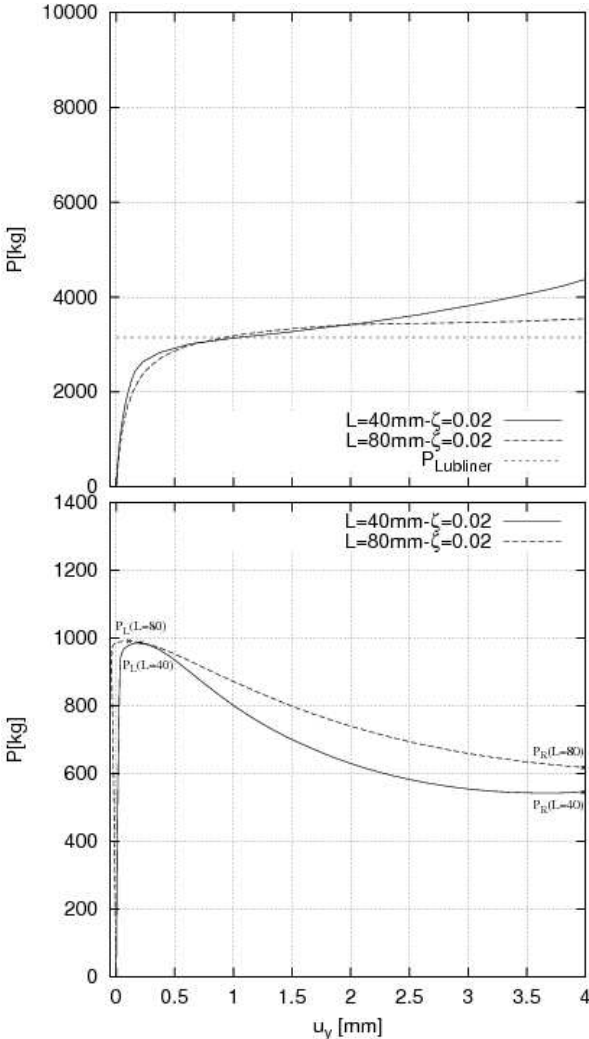


Figura 4: Trayectorias de equilibrio elásticas, elastoplásticas y  $P_{Lubliner}$  para el material 1 y condición de borde 2.

En el problema elástico las curvas de carga versus desplazamiento lateral son cercanas entre sí para las dos longitudes analizadas, particularmente para valores de desplazamientos inferiores a 2 mm. Las trayectorias obtenidas con la condición de borde 2, son inferiores a las obtenidas en el caso anterior con la condición de borde 1.

En el problema elastoplástico las cargas límites cuyos valores son de 985.72 kg y 990.82 kg para  $L=40$  mm y  $L=80$  mm respectivamente, son similares a las obtenidas para la condición de borde 1 pero con una pendiente de ablandamiento superior y con valor de carga residual menor que la obtenida con la condición de borde 1.

En la Figura 5 se presentan los desplazamientos totales de la respuesta elastoplástica, de la columna de  $L=80$  mm, en la configuración deformada de equilibrio para una carga de 772.76 kg para la condición de borde 1 y 626 kg para la condición de borde 2, las cuales corresponden a un desplazamiento en dirección vertical de 1.5 mm para ambos casos. En dicha configuración el desplazamiento lateral máximo obtenido es de 4.59 mm para la primera condición de borde y de 6.32 mm para las segunda, es decir más de cuatro y seis veces el espesor de las alas de la columna.

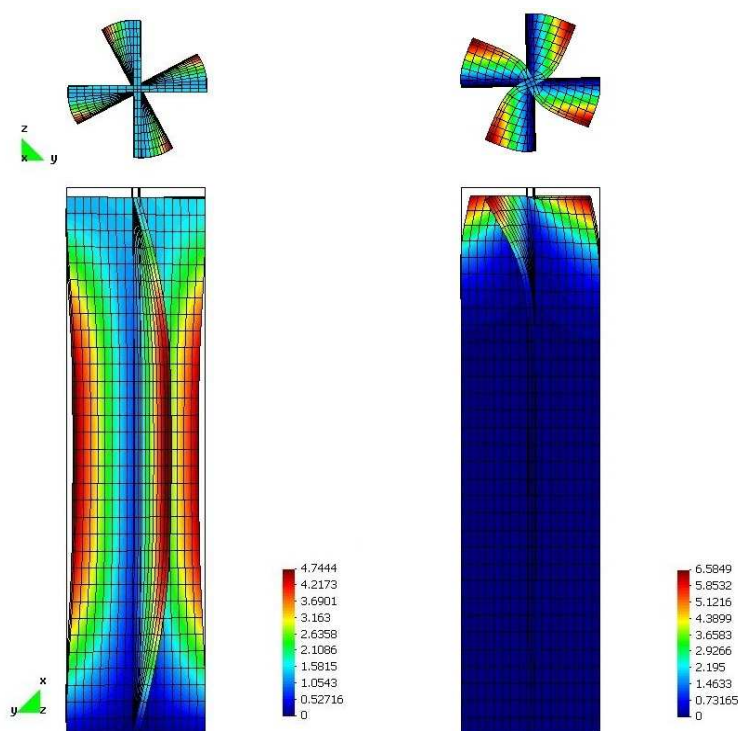


Figura 5: Configuración original y deformada en los planos  $xy$  e  $yz$ , para  $L=80$  mm,  $\zeta=0.02$ , material 1 elastoplástico, condiciones de borde 1 y 2 respectivamente.

Es válido mencionar que las columnas han pandeado de dos formas diferentes. Para los ejemplos de la Figura 3 los modos de pandeo son de flexión, como se muestra en la parte izquierda de la Figura 5; mientras que para los de la Figura 4, los modos de pandeo son de torsión, como se muestra en la parte derecha de la Figura 5. En particular, para la condición de borde 1 tanto para el caso elástico como elastoplástico se tiene un modo de flexión, en cambio para la condición de borde 2 se tiene un modo de torsión en el caso elástico y un modo de torsión localizado en el extremo superior en el caso elastoplástico.

La condición de borde 1 en respuesta elástica presenta dependencia de la carga crítica con la longitud de la columna, cosa que no ocurre con la condición de borde 2.

La carga límite elastoplástica es similar para todas las condiciones de borde, mientras que



la carga residual es superior en la primera condición de borde frente a las de segunda condición de borde.

### 3.2 Material 2

El segundo material analizado tiene propiedades similares al de un aluminio 2024-T4, cuya curva de tensión versus deformación ha sido aproximada en forma bilineal. Para el caso elástico las propiedades del material son  $E=7270.87 \text{ kg/mm}^2$  y  $\nu=0.33$ . Para el caso elastoplástico la tensión de fluencia es  $\sigma_y=31.15 \text{ kg/mm}^2$  y el endurecimiento es isotrópico lineal con  $H=799.93 \text{ kg/mm}^2$ . Al material con las propiedades anteriores en los párrafos sucesivos se lo ha llamado “material 2”.

Las geometrías imperfectas de las columnas, los vínculos, los desplazamientos impuestos, el parámetro de imperfección  $\zeta$ , como así también la discretización empleada, son los mismas que las del material 1.

En este caso la carga de pandeo torsional de Lubliner (1990) es  $P_{Lubliner}=1066 \text{ kg}$ . En la parte superior de la Figura 6 se representa esta carga  $P_{Lubliner}$  y las respuestas no lineales de las geometrías imperfectas para la condición de borde 1 y el material 2 en rango elástico. Por otra parte, en la parte inferior de la Figura 6 se presentan las respuestas en rango elastoplástico.

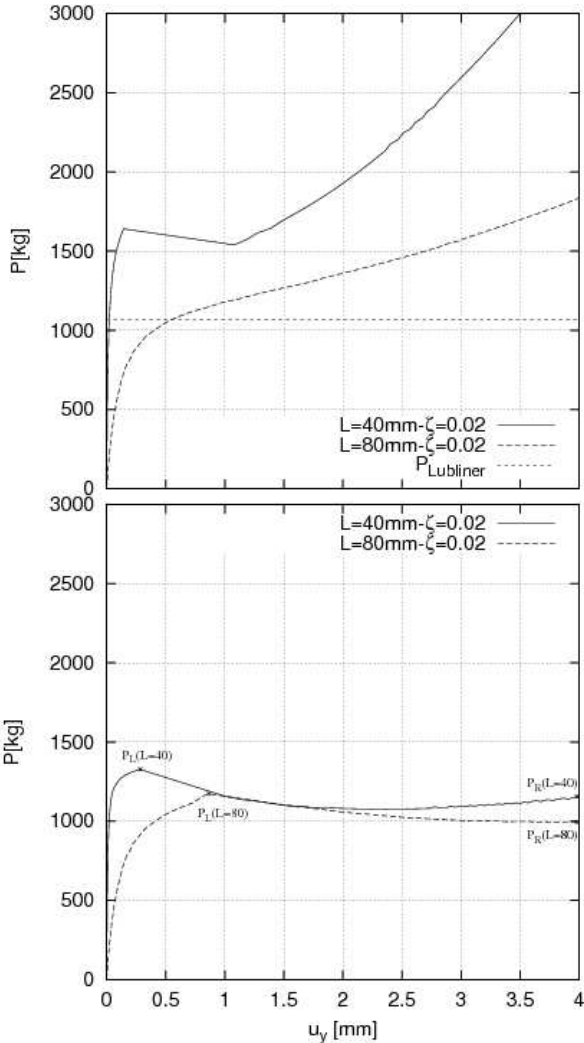


Figura 6: Trayectorias de equilibrio elásticas, elastoplásticas y  $P_{Lubliner}$  para el material 2 y condición de borde 1.

Los valores de carga elástica son superiores al caso elastoplástico, siendo esta diferencia más notable en la columna de longitud inferior. Para el mismo valor de desplazamiento lateral para el cual se alcanza  $P_L$ , el valor de carga elástica es 1.23 veces superior al valor elastoplástico para la columna de longitud inferior; mientras que para la columna de longitud mayor este valor de carga es igual al caso elastoplástico analizado. Hasta el valor de carga  $P_L$ , en la columna de mayor longitud no hay demasiada diferencia entre la respuesta elástica y la elastoplástica.

Para los desplazamientos correspondientes al valor de carga residual  $P_R$ , las cargas elásticas son 3 y 1.9 veces superiores a los valores correspondientes valores de carga elastoplásticos para la menor y mayor longitud respectivamente.

En el caso elastoplástico las pendiente de las trayectorias, antes de alcanzar las cargas límites, son diferentes entre sí. Además luego de alcanzar el punto  $P_L$ , con valores de 1327.46 kg para  $L=40$  mm y 1173.55 kg para  $L=80$  mm, se produce una pérdida de la rigidez. Luego en la estructura más corta, después de alcanzar un mínimo de pérdida de rigidez, se produce un comportamiento de rigidización de la estructura.

En la Figura 7 se presentan los resultados obtenidos para el material 2 y condición de borde 2. En la parte superior se muestran las trayectorias de equilibrio para el caso elástico y la carga  $P_{Lubliner}$ .

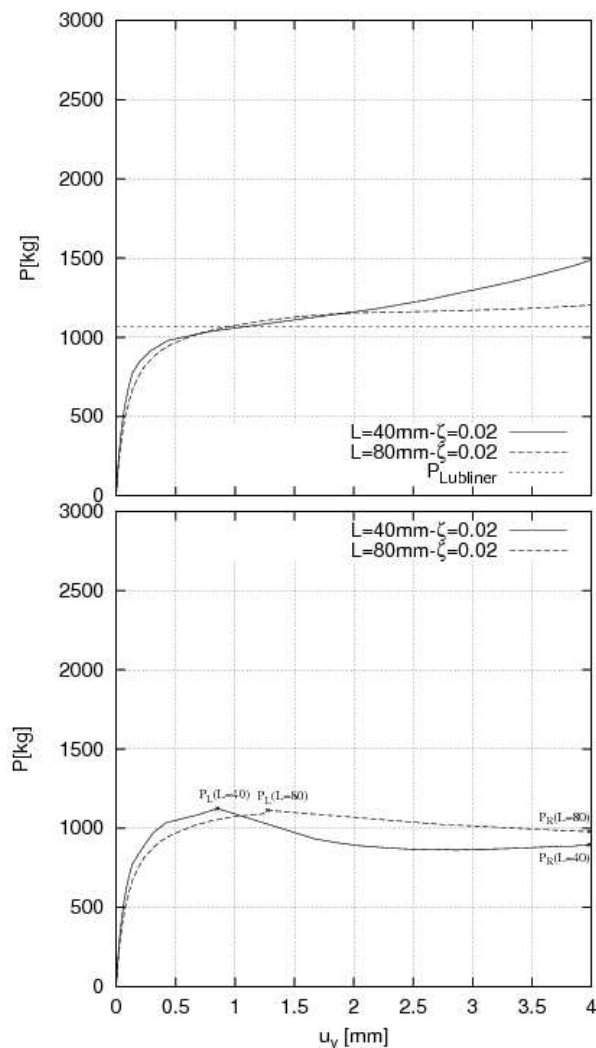


Figura 7: Trayectorias de equilibrio elásticas, elastoplásticas y  $P_{Lubliner}$  para el material 2 y condición de borde 2.

En la parte inferior de la figura anterior, se muestran las trayectorias de equilibrio para el caso elastoplástico. Las trayectorias elásticas de las dos estructuras se encuentran muy próximas entre sí. En el caso elastoplástico este comportamiento no es tan similar. El valor de carga  $P_L$  de las dos estructuras es similar, 1124.7 kg para la longitud menor y 1113.3 kg para la mayor, pero ocurre a dos niveles diferentes de  $u_y$ , es decir a 0.85 mm y 1.28 mm respectivamente. Al igual que en la condición de borde 1 se produce un proceso de rigidización luego de alcanzar un mínimo de pérdida de rigidez en la estructura más corta.

Para el material 2, al igual que en el material 1, tanto para el caso elástico como elastoplástico, para las longitudes estudiadas, los ejemplos con condición de borde 1 pandean a flexión y los ejemplos con la condición de borde 2 pandean a torsión.

En la Figura 8 se muestra la configuración original y deformada junto con el contorno de desplazamientos totales de la columna de longitud igual a 80 mm para ambas condiciones de borde y considerando el material 2 en respuesta elastoplástica. Estas configuraciones deformadas corresponden a cargas de 1075.1 kg y de 987.09 kg, para la condición de borde 1 y 2 respectivamente. Las mencionadas cargas producen un desplazamiento vertical de 1.5 mm para ambos casos, obteniéndose a su vez un desplazamiento lateral máximo igual a 7.18 mm para la condición de borde 1 y de 9.39 mm para la condición de borde 2, es decir más de siete y nueve veces superior al espesor de las alas. Se puede destacar que para la condición de borde 2, este valor es muy cercano al ancho  $b$  de las alas de la sección transversal, y puede verse también que el ángulo de rotación de la sección en  $x=L$  es superior a  $90^\circ$ .

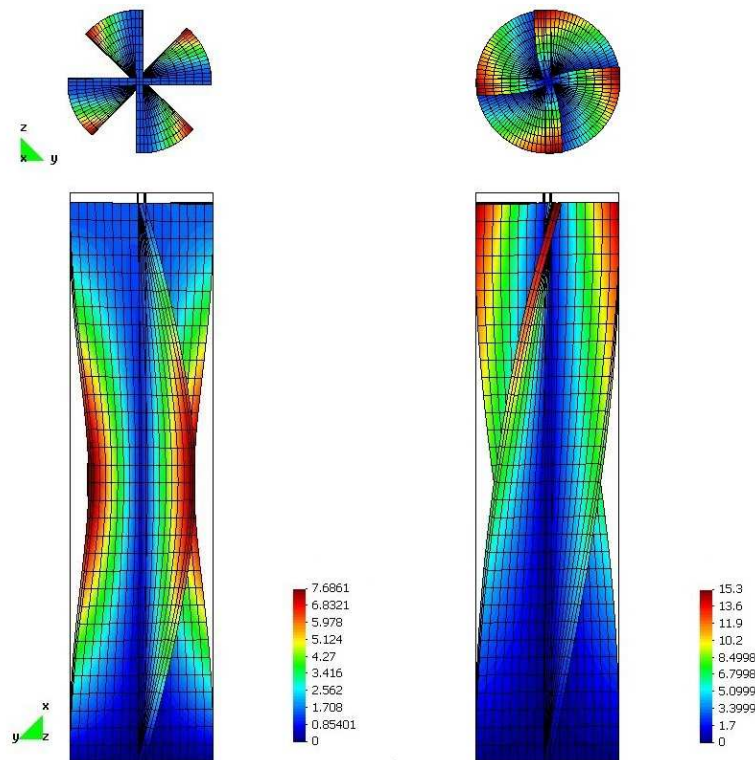


Figura 8: Configuración original y deformada en los planos  $xy$  e  $yz$ , para  $L=80$  mm,  $\zeta=0.02$ , material 2 elastoplástico, condiciones de borde 1 y 2 respectivamente.

Para este material 2 se puede destacar que para el caso elástico la condición de borde 1 muestra dependencia de la carga crítica con la longitud de la estructura mientras que esto no sucede para la condición de borde 2.

Cuando se considera el comportamiento elastoplástico, la carga límite parece depender de

la longitud para la condición de borde 1 no ocurriendo lo mismo para la condición de borde 2. Con respecto a la carga residual la misma es superior en la primera condición de borde frente a las de segunda condición de borde.

Además, de comparar los modos de pandeo elastoplásticos de este material con el material 1 en la condición de borde 2, se observa que la deformada es global para el material 2 mientras que es de tipo local para el material 1.

#### 4 RESUMEN DE RESULTADOS

Tanto para el material 1 como para el material 2 se analizaron dos longitudes que son cuatro y ocho veces el ancho del ala de la sección transversal de la columna. Las trayectorias de equilibrio cuando el material se considera siempre elástico, son típicas de un comportamiento de bifurcación estable de la estructura perfecta. Para la condición de borde 1 el modo es de tipo flexión lateral, mientras que para la condición de borde 2 es de tipo torsión. En este último caso no hay una marcada diferencia entre las trayectorias de equilibrio de las dos longitudes analizadas.

Cuando ambos materiales se consideran como material elastoplástico, las trayectorias de equilibrio tienen un comportamiento de tipo punto límite con una carga máxima (o límite)  $P_L$ ; posterior pérdida de rigidez y una carga residual  $P_R$ .

Mientras que en las trayectorias de equilibrio del material 1 considerado como elastoplástico, en todos los casos se presenta un marcado cambio de rigidez antes de la carga límite  $P_L$  (parte inferior de Figuras 3 y 4) no ocurre lo mismo en las trayectorias correspondientes al material 2 cuando es considerado como elastoplástico (parte inferior de Figuras 6 y 7).

El marcado cambio de rigidez de las trayectorias de equilibrio del material 1 considerado como elastoplástico puede asociarse a una carga crítica elastoplástica de la estructura imperfecta ( $P_{CrEP}$ ). Se ha definido la carga  $P_{CrEP}$  como aquella para la cual entre un estado de equilibrio y otro existe una pérdida de rigidez secante del orden al 50% de la rigidez inicial.

En la siguiente Tabla 1 se resumen los valores obtenidos para el material 1 con ambas condición de borde:

Material 1 elastoplástico	Condición de borde 1			Condición de borde 2		
	$P_{CrEP}$ (kg)	$P_L$ (kg)	$P_R$ (kg)	$P_{CrEP}$ (kg)	$P_L$ (kg)	$P_R$ (kg)
40 mm	940.66	1033.88	769	941	985.72	545
80 mm	921.07	1013.94	778	918	990.82	617

Tabla 1. Cargas críticas para material 1 (material elastoplástico).

Para ambas condiciones de borde la carga límite  $P_L$  parece no depender de la longitud. La carga residual  $P_R$  parece ser más sensible a la longitud para el caso de la condición de borde 2 (modo de torsión) que en la condición de borde 1 (modo de flexión). Por otra parte la carga residual para la primera condición de borde es 1.26 y 1.41 veces mayor que la correspondiente a la segunda condición para  $L=80$  mm y  $L= 40$  mm respectivamente.

Dado que para el material 2 no se presenta un marcado cambio de rigidez antes de la carga límite  $P_L$ , no es posible definir una carga de crítica elastoplástica  $P_{CrEP}$  mediante el cambio de rigidez de las trayectorias de estructuras imperfectas.

En la siguiente Tabla 2 se resumen los valores obtenidos para el material 2 con ambas condición de borde:

Material 2 elastoplástico	Condición de borde 1		Condición de borde 2	
Longitud	$P_L$ (kg)	$P_R$ (kg)	$P_L$ (kg)	$P_R$ (kg)
40 mm	1327.5	1155	1124.7	896
80 mm	1173.6	995	1113.3	979

Tabla 2. Cargas críticas para material 2 (material elastoplástico).

La carga límite  $P_L$  parece ser dependiente de la longitud en la condición de borde 1 (modo de flexión) aunque no es así en la condición de borde 2 (modo de torsión). La carga residual  $P_R$  se observa sensible a la longitud para ambas condición de borde, siendo para la primera condición de borde 1.29 y 1.02 veces mayor que la correspondiente a la segunda condición para la longitud más larga y más corta respectivamente.

Cabe aclarar que las cargas límites encontradas no son muy distintas para ambos materiales, como tampoco lo es la tensión de fluencia de los mismos. Con respecto a las cargas residuales las mismas son diferentes para ambos materiales los cuales tienen endurecimientos distintos. Los valores de cargas residuales son dependientes de las condiciones de borde.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el comportamiento no lineal de columnas cruciformes mediante elementos finitos. Si bien es un componente estructural ampliamente tratado en la literatura, no es frecuente el análisis de las trayectorias de equilibrio. Particularmente, se encontraron trayectorias de equilibrio no lineales de columnas cruciformes imperfectas, tanto para comportamiento elástico como elastoplástico, para diferentes longitudes, materiales y condiciones de borde. Se ha empleado un código de elementos finitos previamente desarrollado, denominado SOGDE3D (Careglio et. al, 2005) con una formulación incremental con ecuación constitutiva elastoplástica implementada en la configuración deformada basada en hiperelasticidad y cinemática multiplicativa del tensor gradiente de deformación (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995; García Garino y Oliver, 1996). Se han utilizado elementos sólidos hexaedros lineales estándar (H1) (Zienkiewicz y Taylor, 1991) para comportamiento elástico; mientras que se usaron hexaedros lineales mixtos con presión constante (H1/P0) (Zienkiewicz y Taylor, 1991) para el caso elastoplástico.

Un aspecto poco destacado en la literatura y que se pone de manifiesto es que para los casos analizados, tanto el comportamiento elástico como el elastoplástico, la condición de borde 1 tiene un modo de pandeo de tipo flexión lateral mientras que la condición de borde 2 es de tipo torsional.

Para ambos materiales analizados las trayectorias de equilibrio cuando el material se considera elástico, son típicas de un comportamiento de bifurcación estable de la estructura perfecta, sólo cambiando el tipo de modo de pandeo con la condición de borde.

La respuesta elástica de ambos materiales con la condición de borde 1 depende de la longitud de la columna; y para longitud  $L=80$  mm la pérdida de rigidez de la trayectoria de equilibrio es próxima al valor de carga crítica  $P_{Lubliner}$ . Por el contrario, cuando se considera la condición de borde 2, las trayectorias de equilibrio para todas las dos longitudes analizadas son muy similares y presentan una pérdida de rigidez para valores de cargas cercanos al valor de carga crítica  $P_{Lubliner}$ .

En todos los casos analizados el comportamiento de las trayectorias de equilibrio para ambos materiales elastoplásticos presenta una carga máxima  $P_L$ , una posterior pérdida de rigidez y una carga residual  $P_R$ , que se ha evaluado para configuraciones con grandes valores

de desplazamientos laterales del orden de 4 veces el espesor de la sección transversal.

Para el material 1 las trayectorias de equilibrio presentan un cambio de rigidez notorio que permite definir la carga crítica elastoplástica ( $P_{CrEP}$ ), cosa que no se presenta en las correspondientes al material 2.

Para el material 1 la carga límite  $P_L$  parece ser poco dependiente de la longitud con ambas condiciones de borde. La carga residual  $P_R$  se observa es más sensible a la longitud para el caso de la condición de borde 2 (modo de torsión) que en la condición de borde 1 (modo de flexión).

Para el material 2 la carga límite  $P_L$  es dependiente de la longitud en la condición de borde 1 (modo de flexión) aunque no es así en la condición de borde 2 (modo de torsión). La carga residual  $P_R$  se observa sensible a la longitud para ambas condición de borde.

El material 2 es uno de los más tratados en la literatura, y presenta una dependencia de la carga máxima  $P_L$  y de la carga residual  $P_R$  con la longitud de la columna y la condición de borde de la sección, y por lo tanto con el modo de pandeo. Esto de alguna manera se observa en la dispersión de resultados que hay en la bibliografía (Lubliner, 1990; Papadopoulos y Lu, 1998; Bazant y Cedolin, 2003; Makris, 2003).

## 6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero recibido de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), mediante el Proyecto PICTR 184. El primer autor también agradece la beca doctoral de CONICET.

## REFERENCIAS

- K. J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall (Ed.), 1982.
- Z. Bazant y L. Cedolin. *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, 1991.
- C. Careglio, C. García Garino y A. Mirasso. SOGDE3D: Código de elastoplasticidad con grandes deformaciones 3D. *Mecánica Computacional*, XXIV: 363-373, ISSN 1666-6070. AMCA, 2005.
- C. Careglio, A. Mirasso y C. García Garino. Estabilidad del equilibrio elastoplástica con elementos finitos y cinemática de grandes deformaciones. *Mecánica Computacional*, XXV: 1947-1960, ISSN 1666-6070. AMCA, 2006.
- L. Damkilde. Elastic-plastic buckling of a finite length cruciform column. *Computers & Structures*, 21-No. 3: 521-528, 1985.
- C. García Garino. Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. *PhD. Thesis*. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- C. García Garino y J. Oliver. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte i formulación teórica y aplicación a metales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 11-No. 1: 105-122, 1995.
- C. García Garino y J. Oliver. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte ii implementación numérica y ejemplos de aplicación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 12-No.: 147-169, 1996.
- G. Gerard and H. Becker. *Handbook of structural stability – Part I: Buckling of flat plates*. NACA report 3781, 1957
- A. E. Green and P. M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archive for*

- Rational Mechanics and Analysis*, 18: 251-281, 1965.
- G.H. Handelman and W. Prager. *Plastic buckling of a rectangular plate under edge thrusts*. NACA report 1530, 1948.
- J. W. Hutchinson and B. Budiansky. Analytical and numerical study of the effects of initial imperfections on the inelastic buckling of a cruciform column. *Buckling of structures* , Edited by B. Budiansky , 98-105, Springer, 1976.
- J. Lubliner. *Plasticity theory*. McMillan Publishing Company, 1990.
- N. Makris. Plastic torsional buckling of cruciform compression members. *Journal of Engineering Mechanics*, 129-No. 6: 689-696, ASCE, 2003
- E. T. Onat and D. C. Drucker. Inelastic instability and incremental theories of plasticity. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20: 181-186, 1953.
- P. Papadopoulos and J. Lu. A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 159-No. 2: 1-18, Elsevier, 1998.
- N. S. Quoc. *Stability and nonlinear solid mechanics*. John Wiley & Sons, 1984.
- J. C. Simo and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33: 1413-1449, 1992.
- E. Z. Stowell. *Compressive strength of flanges*. NACA report 1029, 1951.
- S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of elastic stability*. McGraw Hill, 1961.
- O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*, volumes I y II. McGraw Hill, 1991.