

EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL EN EL ANÁLISIS DINÁMICO DE ARCOS CIRCULARES VIBRANTES SEGÚN LA TEORÍA DE VIGAS TIMOSHENKO

Samanta J. Escanes^a, Diana V. Bambill^{a,b} y Daniel H. Felix^a

^a Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina. sescanes@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar,
dhfelix@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>

^b Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina

Palabras Clave: arcos circulares, frecuencia natural, cuadratura diferencial, deformación por corte, inercia rotatoria, extensibilidad axil, viga Timoshenko

Resumen. El presente trabajo trata sobre las vibraciones libres en el plano de arcos circulares delgados. Se plantea un modelo numérico utilizando el método de Cuadratura Diferencial. Cada extremo del arco se asume libre o vinculado con distintas condiciones de borde y se adoptan diferentes relaciones de esbeltez.

En el estudio, siguiendo la teoría de vigas Timoshenko, se consideran los efectos de la extensibilidad de eje, de la inercia rotatoria y la deformación por corte del arco vibrante. Se presentan las primeras seis frecuencias naturales de los modelos analizados. Los resultados obtenidos se comparan con los parámetros de frecuencia natural que corresponden a los calculados considerando la teoría de Bernoulli-Euler y la de Rayleigh.

El presente trabajo es una extensión del análisis realizado por los autores en un estudio anterior (*S. J. Escanes et al., Mec. Computacional XXV:1697-1716. (2006)*).

1 INTRODUCCIÓN

No obstante la existencia de investigaciones sobre la vibración libre de arcos en su plano, el problema sigue siendo de interés para los investigadores debido a la importancia de su aplicación tecnológica. Las vigas curvas son de uso frecuente en aplicaciones de ingeniería civil, mecánica y aeroespacial, tales como puentes, cubiertas, resortes y rigidizadores en estructuras aeronáuticas entre otras debido a su capacidad de transmitir esfuerzos a través de la acción combinada de la flexión y la compresión axial.

Las ecuaciones que gobiernan las vibraciones libres de arcos se complican cuando se consideran los efectos de la deformación axial, la inercia rotatoria y la deformación por corte, si bien el tener en consideración estos efectos es importante para obtener una mejor aproximación al comportamiento real de la estructura en arco.

En el presente estudio se analiza el comportamiento dinámico en el plano de arcos vibrantes, considerando la teoría de vigas Bresse-Timoshenko, que toma en consideración los efectos de la deformación por corte y la inercia rotatoria. También se considera el efecto de la extensibilidad axial del arco.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

Los algoritmos se desarrollaron para ser aplicados al estudio de las vibraciones libres en el plano de barras de directriz curva de sección constante. En el presente estudio se modelaron arcos circulares vinculados en los extremos. Se eligieron tres combinaciones de condiciones de vínculo clásicas: Articulado–Articulado, Empotrado–Empotrado y Empotrado–Libre. Se consideró en el análisis el defasaje del eje neutro de flexión con respecto al eje baricéntrico de la sección (*Kang et al, 1995*) y se indica como R al radio de curvatura del arco medido desde el centro O , hasta la fibra neutra de su sección transversal. Con el parámetro θ_0 se indica la amplitud total del arco. En tanto que para una sección transversal A del arco de coordenadas (R, θ) , los desplazamientos tangencial v , radial w y el ángulo de rotación ψ son los indicados en la Figura 1.

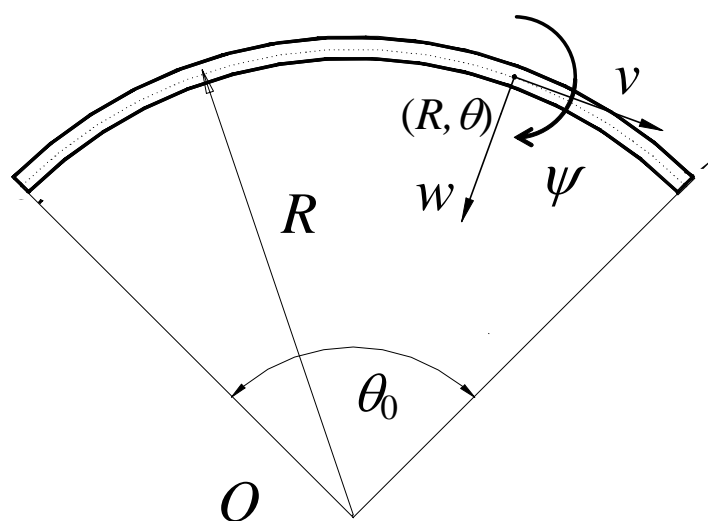


Figura 1: Modelo de arco

3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El sistema de ecuaciones gobernantes del modelo estructural mostrado en la Figura 1, fue planteado por Irie (*Irie et al, 1983*) y utilizado por Kang en su trabajo (*Kang et al, 1995*). El modelo está basado en la teoría de vigas Bresse-Timoshenko, que considera los efectos de la extensibilidad del eje del arco, la inercia rotatoria y la deformación por corte en las vibraciones del arco en su plano.

El hecho de tener en cuenta en el modelo la extensibilidad axial del arco, hace que los desplazamientos radial w y tangencial v , resulten ser independientes. Y al considerar el efecto de la deformación por corte, el giro de la sección indicado con ψ es también una variable independiente del problema analizado.

Es conveniente para el planteo definir expresiones adimensionales como

$$x = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (1)$$

donde x es la coordenada angular adimensional cuyos valores varían entre 0 y 1.

Considerando que el arco vibra en el plano en uno de sus modos normales, se definió como $V = V(x)$, $W = W(x)$ y $\Psi = \Psi(x)$, a las amplitudes adimensionales de los desplazamientos $w(x,t)$, $v(x,t)$ y $\psi(x,t)$ respectivamente.

El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el modelo propuesto basado en la teoría de Bresse-Timoshenko es lineal, de segundo orden y siguiendo la formulación de (*Irie et al., 1971*) puede escribirse como:

$$-\left[1 + \frac{\kappa}{2(1+\nu)}\right] \theta_0 \frac{dV}{dx} + \theta_0^2 W - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{d^2W}{dx^2} + \frac{\kappa R}{2(1+\nu)} \frac{d\Psi}{dx} = \lambda^2 \left(\frac{r}{S}\right)^2 (1+k^2) W \quad (2a)$$

$$\frac{\kappa \theta_0^2}{2(1+\nu)} V + \frac{\kappa \theta_0}{2(1+\nu)} \frac{dW}{dx} - \frac{\kappa R \theta_0^2}{2(1+\nu)} \Psi + \kappa^2 R \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \lambda^2 \left(\frac{r}{S}\right)^2 [k_1^2 V - k_2^2 R \Psi] \quad (2b)$$

$$\frac{\kappa \theta_0^2}{2(1+\nu)} V - \frac{d^2V}{dx^2} + \left[1 + \frac{\kappa}{2(1+\nu)}\right] \theta_0 \frac{dW}{dx} - \frac{\kappa R \theta_0^2}{2(1+\nu)} \Psi = \lambda^2 \left(\frac{r}{S}\right)^2 [(1+k^2)V + k_1^2 R \Psi] \quad (2c)$$

El factor de corte dependiente de la forma de la sección transversal se indica con κ . Con ν el coeficiente de Poisson, r el radio de giro de la sección transversal A , S la longitud del arco y λ es el coeficiente adimensional de la frecuencia natural de vibración en función de la frecuencia circular ω definido como:

$$\lambda = \omega S^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (3)$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young y m es la masa por unidad de longitud del material del arco e I el momento de inercia de la sección transversal.

Se define como esbeltez del arco, S/r , a la relación entre la longitud del arco S y el radio de giro r de la sección transversal:

$$S = R\theta_0 ; r^2 = \frac{I}{A} \quad (4)$$

Los valores k^2 , k_1^2 y k_2^2 son parámetros adimensionales que varían según la forma de la sección transversal y del radio de curvatura R :

$$k^2 = \left(\frac{d}{4R} \right)^2 ;$$

$$k_1^2 = k^2 (1 + k^2) ;$$

$$k_2^2 = k^2 (1 + 4k^2 + k^4) ;$$

corresponden a un arco de sección transversal circular de diámetro d .

En tanto que:

$$k^2 = \left(\frac{a}{2R} \right) \coth \left(\frac{a}{2R} \right) - 1 ;$$

$$k_1^2 = k^2 (1 + k^2) + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2R} \right)^2 ;$$

$$k_2^2 = k^2 \left[k^2 + k^4 + \left(\frac{a}{2R} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2R} \right)^2 ;$$

corresponden a un arco de sección transversal rectangular de altura a en la dirección radial.

Si se trata de un arco Empotrado-Empotrado las condiciones de borde a considerar en los extremos son:

$$V|_{x=0} = V|_{x=1} = 0 ;$$

$$W|_{x=0} = W|_{x=1} = 0 ; \quad (5)$$

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1} = 0 ;$$

en tanto que para el arco Articulado-Articulado resultan:

$$V|_{x=0} = V|_{x=1} = 0 ;$$

$$W|_{x=0} = W|_{x=1} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\theta_0} \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=1} = 0;$$

y para el arco Empotrado-Libre:

a) extremo libre

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{1}{\theta_0} \frac{dW}{dx} - V + \Psi \right) = 0 \quad (7)$$

$$\left(W + \frac{1}{\theta_0} \frac{dV}{dx} \right) = 0$$

a) extremo empotrado

$$V = W = \Psi = 0 \quad (8)$$

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL

El método de cuadratura diferencial es una técnica numérica que permite resolver ecuaciones diferenciales. Este método aproxima la derivada de una función en un punto cualquiera, como una suma lineal ponderada de todos los valores funcionales calculados en puntos de un mallado convenientemente adoptado. Fue desarrollado inicialmente por los investigadores R. Bellman y J. Casti, (*Bellman and Casti, 1971*) en los años setenta, y después de un uso relativamente moderado en las dos décadas siguientes, a partir de los trabajos de Charles Bert (*Bert et al, 1994, Bert and Malik, 1996*) su utilización recobra vigencia y numerosos investigadores los utilizan en la actualidad

La aplicación del método consistió en (*Escanes et al., 2006*):

- Discretizar el dominio, reemplazando el modelo continuo por un conjunto de puntos sobre una malla o grilla.
- Obtener los coeficientes de peso asociados a los puntos de la malla generada.
- Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura del sistema diferencial gobernante.
- Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde del modelo.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

El modelo discreto quedó formado por un conjunto de puntos convenientemente elegidos sobre el eje del arco. En este proceso se adoptó una malla con distribución regular de puntos en el interior del arco, cuyas coordenadas sobre el eje son:

$$x_i = \frac{i-2}{n-3} \quad (9)$$

donde i es un índice que varía entre 2 y $n-1$, y n es el número total de puntos de la malla.

La ubicación de los puntos sobre el eje se determinó mediante la expresión de la coordenada angular $\theta_i = x_i \theta_0$, y de la coordenada radial R , en este caso constante.

Las derivadas de las tres variables independientes, W , V y Ψ , aplicando las reglas de cuadratura diferencial, se expresaron mediante las siguientes ecuaciones ([Bellman and Casti, 1971](#)):

$$\begin{aligned} W^{(q)}(x_i) &= \left. \frac{d^q W}{dx^q} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} W_k \\ V^{(q)}(x_i) &= \left. \frac{d^q V}{dx^q} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} V_k \\ \Psi^{(q)}(x_i) &= \left. \frac{d^q \Psi}{dx^q} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} \Psi_k \end{aligned} \quad (10a-c)$$

donde con el índice q se indica el orden de la derivada.

Los coeficientes de peso $A_{ik}^{(q)}$, que aparecen en las ecuaciones (10a-c), se determinaron por medio de una serie de expresiones explícitas, (algunas de ellas recursivas), cuyo detalle puede verse en las referencias presentadas ([Bert et al, 1994](#), [Bert and Malik, 1996](#)).

El proceso de cálculo descrito en un trabajo previo ([Escanes et al., 2007](#)) se resume en:

- calcular los siguientes polinomios de Lagrange a partir de los puntos de la malla generada, (puntos de coordenadas x_i):

$$\Pi(x_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^n (x_i - x_v) \quad (11)$$

que se utilizan para determinar los coeficientes correspondientes a las derivadas de primer orden ($q = 1$):

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k) \Pi(x_k)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k \neq i, \text{ elementos fuera de la diagonal} \end{array} \quad (12a)$$

Con la condición $\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} = 0$, se calculan los elementos de la diagonal:

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^n A_{ik}^{(1)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{elementos en la diagonal} \end{array} \quad (12b)$$

- Los términos correspondientes a derivadas de segundo orden y superiores, $q > 1$, se calculan utilizando la expresión recursiva siguiente:

$$A_{ik}^{(q)} = A_{ii}^{(q-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(q-1)}}{x_i - x_k} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k \neq i \end{array} \quad (13a)$$

y de manera análoga a lo indicado en las expresiones (12b), se obtienen los elementos de la diagonal:

$$A_{ii}^{(q)} = - \sum_{\substack{k=1 \\ \text{con } k \neq i}}^n A_{ik}^{(q)} \quad \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \quad (13b)$$

Mediante la aplicación de las reglas de cuadratura indicadas en las expresiones (10a-c) a las ecuaciones (2a-c), se obtuvieron las ecuaciones análogas de cuadratura:

$$\begin{aligned} - \left[1 + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right] \theta_0 \sum_{k=1}^n A_{ik} V_k + \theta_0^2 W_i - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_k + \frac{\kappa R}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^n A_{ik} \Psi_k = \\ = \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 (1+k^2) W_i \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa \theta_0^2}{2(1+\nu)} V_i + \frac{\kappa \theta_0}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^n A_{ik} W_k - \frac{\kappa R \theta_0^2}{2(1+\nu)} \Psi_i + \kappa^2 R \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} \Psi_k = \\ = \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 [k_1^2 V_i - k_2^2 R \Psi_i] \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa \theta_0^2}{2(1+\nu)} V_i - \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} V_k + \left[1 + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right] \theta_0 \sum_{k=1}^n A_{ik} W_k - \frac{\kappa R \theta_0^2}{2(1+\nu)} \Psi_i = \\ = \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 [(1+k^2) V_i + k_1^2 R \Psi_i] \end{aligned} \quad (14c)$$

donde $i = 2, 3, \dots, n-1$

Las ecuaciones análogas de las condiciones de borde se obtuvieron planteando las ecuaciones correspondientes a cada tipo de vinculación y aplicando las reglas de cuadratura.

Para la condición de extremo libre, con las expresiones (8) se obtuvo:

$$\frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} \Psi_k = 0, \quad \text{con } i=1 \text{ ó } n \quad (16a)$$

$$\frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k - V_i + \Psi_i = 0, \quad \text{con } i=1 \text{ ó } n \quad (16b)$$

$$W_i + \frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} V_k = 0, \text{ con } i=1 \text{ ó } n \quad (16c)$$

Para la condición de extremo articulado, con las (7):

$$V_i = W_i = 0, \text{ con } i=1 \text{ ó } n \quad (17a-b)$$

$$\frac{1}{\theta_0} \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} \Psi_k, \text{ con } i=1 \text{ ó } n \quad (17c)$$

Para la condición de extremo empotrado, utilizando las expresiones (6):

$$V_i = W_i = \Psi_i = 0, \text{ con } i=1 \text{ ó } n \quad (18a-c)$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para obtener los resultados numéricos se adoptó la expresión del factor de corte dado por Cowper en función de la geometría de la sección y del coeficiente de Poisson (*Cowper, 1966*), que propone para la sección circular:

$$\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$$

y para la sección rectangular maciza:

$$\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$$

En la Tabla 1 se muestran los valores del coeficiente de frecuencia fundamental $C_1 = R^2 \omega_1 \sqrt{m/EI}$ de un arco Empotrado-Empotrado, obtenidos en el presente estudio y se los compara con los de las referencias (*Irie et al., 1982*) y (*Kang et al., 1995*). En este último trabajo, los autores utilizaron el método de cuadratura diferencial con una discretización de 13 puntos sobre la malla.

Se observa que tanto los valores calculados de este estudio con 13 como con 15 puntos en el modelo discreto de cuadratura diferencial, presentan una excelente concordancia con los de la literatura. El valor 12.57* de Irie, presente en la tabla y que notara Kang en su trabajo como un posible error de transcripción, debe ser en realidad de 10.57 tal como también se deduce del presente análisis. En los trabajos mencionados en ambas referencias, los valores de κ elegidos coinciden con los calculados con la formulación de (*Cowper, 1966*) adoptada en este tratado.

$\nu = 0,30 ; C_1 = R^2 \omega_1 \sqrt{m/(EI)}$					
<i>Sección Circular, $A = \pi \times d^2/4 ; \kappa \cong 0.85$</i>					
S/r	θ_0 (en grados)	<i>Irie et al.,1982</i>	<i>Kang et al.1995</i>	<i>Presente Trabajo</i>	
				$n = 13$	$n = 15$
20,944	60	23,75	23,758	23,7510	23,7510
41,8879	120	10,61	10,613	10,6080	10,6080
62,8319	180	4,151	4,1543	4,1532	4,1532
104,720	60	52,82	52,824	52,8130	52,8130
209,440	120	11,79	11,793	11,7900	11,7900
314,159	180	4,374	4,3757	4,3745	4,3745
<i>Sección Rectangular, $A = a \times b ; \kappa \cong 0.89$</i>					
20,944	60	23,70	23,709	23,7080	23,7080
41,8879	120	12,57*	10,585	10,5840	10,5840
62,8319	180	4,143	4,1478	4,1474	4,1474
104,720	60	52,78	52,795	52,7850	52,7850
209,440	120	11,79	11,792	11,7890	11,7890
314,159	180	4,374	4,3755	4,3742	4,3742

Tabla 1: Coeficientes de frecuencia fundamental de vibración en el plano de arcos circulares Empotrado-Empotrado, y secciones transversales macizas circulares y rectangulares

En las Tablas 2 y 3 se presentan coeficientes de frecuencia $\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$ correspondientes a un arco circular de sección rectangular y apertura angular de $\theta_0 = \pi/2$ rad.

En estas tablas de compararon los valores obtenidos por (Wolf, 1971) por el método de elementos finitos considerando los efectos de la deformación axil y de la inercia rotatoria, los presentados por (Tüfekçi et al, 1998), que planteó la solución exacta para las primeras cinco frecuencias considerando los efectos de la deformación axil, la inercia rotatoria y la deformación por corte, y los calculados en el presente estudio por el método de cuadratura diferencial considerando el efecto de la deformación axil, la inercia rotatoria, la deformación por corte y el desplazamiento del eje neutro con respecto al baricéntrico.

En la Tabla 2, se consideró el arco circular empotrado en ambos extremos. Se puede observar que la concordancia de resultados es muy buena para todas las relaciones de R/r para las cinco frecuencias presentadas.

Es de hacer notar que se observa la mayor diferencia con los resultados de Tüfekçi para la frecuencia fundamental del arco de relación $R/r = 75$ donde el presente estudio arroja una diferencia porcentual de 1,75% en menos. Si se lo compara con el valor de Wolf esta frecuencia en particular mantiene la misma relación que para con los demás valores de la tabla.

En la Tabla 3 se presenta una comparación similar para el arco con ambos extremos articulados. En general se observa que la concordancia con los valores de Tüfekçi es muy buena.

En ambas tablas las diferencias más grandes se presentan para los arcos gruesos donde el efecto de considerar el defasaje del eje neutro puede tener más influencia. Se observa que la

diferencia entre los valores aumenta para las frecuencias más altas λ_4 y λ_5 de los arcos más gruesos, $R/r = 50$, donde son del orden de 0,20% (Tabla 2) y 0,16% (Tabla 3).

R/r	λ_i	<i>Wolf el al.</i>	<i>Tüfekçi el al.</i>	<i>Presente Trabajo</i>
100	1	54,74	55,3434	55,3558
	2	103,60	102,3868	102,4220
	3	191,90	188,4994	188,5850
	4	220,30	219,1514	219,1810
	5	305,10	299,1958	299,3180
75	1	55,66	55,9768	54,9985
	2	100,30	98,5094	98,5655
	3	175,70	174,9116	174,9330
	4	190,90	185,1081	185,2540
	5	296,20	284,7500	285,0010
50	1	55,46	53,9660	54,0129
	2	88,31	86,1908	86,2658
	3	135,50	132,7272	132,7980
	4	187,20	175,8392	176,1210
	5	270,80	265,8141	266,3340

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia natural, $\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$ para un arco con $\theta_0 = \pi/2$, R/r Empotrado-Empotrado de sección rectangular

R/r	λ_i	<i>Wolf el al.</i>	<i>Tüfekçi el al.</i>	<i>Presente Trabajo</i>
100	1	33,92	33,8341	33,8383
	2	79,16	78,7259	78,7437
	3	151,50	150,0300	150,0850
	4	216,50	214,8133	214,8680
	5	261,70	259,7674	259,8520
75	1	33,89	33,7367	33,7441
	2	78,45	77,7025	77,7331
	3	151,00	148,4183	148,5060
	4	174,40	173,9414	173,9540
	5	245,10	239,3448	239,5390
50	1	33,79	33,4632	33,4795
	2	75,74	74,3412	74,4018
	3	122,00	121,4958	121,5090
	4	149,30	144,0231	144,1940
	5	238,90	226,3381	226,7070

Tabla 3: Coeficientes de frecuencia natural, $\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$ para un arco con $\theta_0 = \pi/2$, R/r : Articulado-Articulado de sección rectangular.

Las Tablas 4 a 21 presentan los coeficientes λ de frecuencia natural de arcos biempotrados, biarticulados y cantilever obtenidos por el método de cuadratura diferencial con apertura angular $\theta_0 = 90^\circ$ y $\nu = 0.30$.

En la columna (3) se muestra el coeficiente calculado para un arco supuestamente inextensible, donde la relación de esbeltez S/r prácticamente carece de influencia. Sí se consideró en este cálculo el efecto de la inercia rotatoria

En las columnas (4) y (5) se presentan los valores de λ calculados por el método de cuadratura diferencial y por el método de elementos finitos respectivamente, considerando la teoría de vigas Rayleigh, que tiene en cuenta la extensibilidad del arco y la inercia rotatoria (Escanes et al. 2007).

En tanto que las columnas (6) y (7) presentan los valores correspondientes, obtenidos en el presente estudio. En él se consideraron los efectos de la extensibilidad del arco, la inercia rotatoria, la deformación por corte y el defasaje del eje neutro con respecto al eje baricéntrico del arco de acuerdo a la formulación descripta y se adoptaron valores de n entre 13 y 21 adecuados a cada caso para lograr la convergencia. La columna (6) corresponde a un arco de sección rectangular y la columna (7) a un arco de sección circular.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	25	55,828	37,813	37,692	36,785	36,780
	50		54,979	54,909	51,634	51,729
	100		55,620	55,600	54,687	54,716
	150		55,736	55,726	55,311	55,324
	250		55,795	55,788	55,639	55,643
	350		55,811	55,808	55,730	55,732
	500		55,819	55,815	55,778	55,780

Tabla 4: Coeficientes de frecuencia natural λ_1 de un arco circular Empotrado-Empotrado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	25	106,73	52,066	51,830	42,977	43,172
	50		64,771	64,713	63,709	63,726
	100		96,948	96,915	94,835	94,902
	150		103,23	103,21	101,97	102,01
	250		105,62	105,61	105,11	105,13
	350		106,18	106,17	105,92	105,93
	500		106,47	106,46	106,34	106,34

Tabla 5: Coeficientes de frecuencia natural λ_2 de un arco circular Empotrado-Empotrado con $\theta_0 = 90^\circ$.

Las diferencias más significativas entre los valores calculados bajo las diferentes teorías, se observan tal como era de esperar para los arcos más gruesos ($S/r = 25$ y $S/r = 23,56$) que tienen las menores relaciones de esbeltez.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
3	25	193,04	86,123	86,352	83,716	84,168
	50		120,15	120,01	110,71	110,99
	100		155,76	155,73	154,62	154,66
	150		191,77	191,74	188,17	188,30
	250		192,60	192,58	191,25	191,30
	350		192,82	192,81	192,12	192,15
	500		192,93	192,92	192,59	192,60

Tabla 6: Coeficientes de frecuencia natural λ_3 de un arco circular Empotrado-Empotrado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
4	25	284,99	109,77	109,21	83,924	84,468
	50		160,74	160,75	151,31	151,75
	100		189,93	189,86	182,37	182,63
	150		212,67	212,65	211,66	211,70
	250		272,90	272,89	270,58	270,67
	350		280,55	280,54	279,17	279,23
	500		283,04	283,04	282,33	282,36

Tabla 7: Coeficientes de frecuencia natural λ_4 de un arco circular Empotrado-Empotrado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
5	25	409,85	160,01	160,68	124,95	126,07
	50		198,77	198,65	183,49	184,01
	100		293,48	293,30	278,08	278,61
	150		303,00	302,95	296,41	296,65
	250		380,56	380,55	379,74	379,77
	350		408,79	408,77	406,05	406,15
	500		409,34	409,32	407,98	408,03

Tabla 8: Coeficientes de frecuencia natural λ_5 de un arco circular Empotrado-Empotrado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
6	25	541,79	175,14	174,30	155,35	156,28
	50		278,31	277,90	234,79	236,05
	100		337,09	337,12	332,68	332,96
	150		401,39	401,32	388,32	388,80
	250		407,66	407,62	402,40	402,60
	350		488,75	488,74	486,86	486,94
	500		531,97	531,95	529,82	529,90

Tabla 9: Coeficientes de frecuencia natural λ_6 de un arco circular Empotrado-Empotrado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	23,56	33,967	32,555	32,108	29,544	29,581
	47,12		33,602	33,490	32,674	32,687
	94,25		33,871	33,843	33,624	33,628
	141,4		33,921	33,907	33,810	33,812
	251,3		33,949	33,944	33,913	33,913
	377		33,956	33,954	33,939	33,939

Tabla 10: Coeficientes de frecuencia natural λ_1 de un arco circular Articulado- Articulado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	23,56	79,955	33,293	33,626	33,321	33,301
	47,12		61,587	61,438	60,409	60,423
	94,25		77,487	77,353	76,323	76,350
	141,4		79,008	78,949	78,447	78,460
	251,3		79,676	79,658	79,491	79,496
	377		79,833	79,823	79,749	79,751

Tabla 11: Coeficientes de frecuencia natural λ_2 de un arco circular Articulado- Articulado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
3	23,56	152,17	79,553	79,132	68,068	68,293
	47,12		89,550	89,853	86,602	86,686
	94,25		142,76	142,96	142,53	142,64
	141,4		151,40	151,34	149,60	149,65
	251,3		151,93	151,91	151,34	151,36
	377		152,07	152,06	151,80	151,81

Tabla 12: Coeficientes de frecuencia natural λ_3 de un arco circular Articulado- Articulado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
4	23,56	238,13	80,523	81,229	79,075	79,555
	47,12		141,77	140,97	131,25	131,56
	94,25		150,39	150,24	146,53	146,64
	141,4		202,74	202,67	201,64	201,68
	251,3		234,84	234,78	233,46	233,51
	377		236,86	236,84	236,22	236,25

Tabla 13: Coeficientes de frecuencia natural λ_4 de un arco circular Articulado- Articulado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
5	23,56	349,54	136,99	136,40	109,63	110,30
	47,12		168,88	169,89	166,46	166,78
	94,25		241,29	241,26	232,47	232,76
	141,4		252,02	252,19	248,87	248,99
	251,3		348,25	348,20	345,29	345,40
	377		348,98	348,94	347,64	347,69

Tabla 14: Coeficientes de frecuencia natural λ_5 de un arco circular Articulado- Articulado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
6	23,56	475,12	150,84	151,64	144,40	145,48
	47,12		229,85	229,21	203,11	203,89
	94,25		317,39	317,09	310,15	310,51
	141,4		344,87	344,67	336,17	336,48
	251,3		379,97	380,03	379,55	379,56
	377		466,20	466,14	463,96	464,04

Tabla 15: Coeficientes de frecuencia natural λ_6 de un arco circular Articulado- Articulado con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	25	3,8818	3,6922	-	3,6165	3,6273
	50		3,6956	3,6922	3,6761	3,6789
	100		3,6964	3,6954	3,6914	3,6921
	150		3,6967	3,6962	3,6943	3,6946
	250		3,6966	3,6964	3,6957	3,6959
	350		3,6972	3,6964	3,6961	3,6962
	500		3,6971	3,6964	3,6964	3,6964

Tabla 16: Coeficientes de frecuencia natural λ_1 de un arco circular Empotrado- Libre con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	25	17,816	17,379	-	15,927	15,920
	50		17,719	17,638	17,294	17,294
	100		17,800	17,780	17,689	17,690
	150		17,815	17,806	17,765	17,766
	250		17,823	17,819	17,805	17,805
	350		17,824	17,823	17,816	17,816
	500		17,825	17,825	17,821	17,821

Tabla 17: Coeficientes de frecuencia natural λ_2 de un arco circular Empotrado- Libre con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
3	25	56,306	45,830	-	41,703	41,914
	50		54,869	54,488	52,179	52,256
	100		55,997	55,892	55,235	55,257
	150		56,175	56,128	55,829	55,839
	250		56,264	56,247	56,138	56,142
	350		56,287	56,279	56,224	56,225
	500		56,299	56,296	56,269	56,270

Tabla 18: Coeficientes de frecuencia natural λ_3 de un arco circular Empotrado- Libre con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
4	25	115,18	61,801	-	56,970	57,017
	50		98,956	98,605	95,364	95,446
	100		113,68	113,40	111,09	111,16
	150		114,58	114,45	113,37	113,40
	250		114,97	114,92	114,52	114,53
	350		115,07	115,04	114,84	114,85
	500		115,12	115,11	115,01	115,01

Tabla 19: Coeficientes de frecuencia natural λ_4 de un arco circular Empotrado- Libre con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
5	25	193,89	108,91	-	86,503	86,998
	50		121,69	120,88	115,66	115,90
	100		185,51	185,06	180,10	180,30
	150		191,89	191,63	188,80	188,90
	250		193,29	193,18	192,12	192,16
	350		193,60	193,54	193,00	193,02
	500		193,75	193,72	193,46	193,47

Tabla 20: Coeficientes de frecuencia natural λ_5 de un arco circular Empotrado-Libre con $\theta_0 = 90^\circ$.

$\lambda = \omega S^2 \sqrt{m/(EI)}$						
λ_i	S/r	<i>Escanes et al.</i>			<i>Presente estudio</i>	
		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
6	25	292,48	123,58	-	120,52	121,02
	50		190,39	188,21	169,60	170,11
	100		220,51	220,31	218,50	218,57
	150		283,53	283,11	277,97	278,15
	250		290,94	290,76	288,46	288,54
	350		291,77	291,67	290,48	290,53
	500		292,15	292,09	291,51	291,53

Tabla 21: Coeficientes de frecuencia natural λ_6 de un arco circular Empotrado-Libre con $\theta_0 = 90^\circ$.

5 CONCLUSIONES

De los resultados presentados en este trabajo se observa que el método de cuadratura diferencial, cuya vigencia se ha revitalizado en estos últimos años, es una herramienta poderosa de discretización numérica que requiere relativamente poco esfuerzo computacional para lograr buenos resultados en un amplio espectro de problemas de la ingeniería. En particular en el estudio de las vibraciones libres de arcos su aplicabilidad queda validada por los buenos resultados obtenidos.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCYT).

REFERENCIAS

- Bellman, R. y Casti, J., Differential quadrature and long-term integration. *J. Math. Anal. App*, 34: 235-238, 1971.
- Bert, C.W., Wang, X. and Striz, A.G., Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102:11-24, 1994.
- Bert, C.W. and Malik, M., Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1-28, 1996.
- Cowper, G.R., The shear coefficients in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 33:335-340, 1966.
- Escanes, S.J., Bambill, D.V. y Felix, D.H., Análisis dinámico de arcos circulares delgados por el método de cuadratura diferencial generalizado. *Mecánica Computacional*, Vol. XXV:1697-1716, 2006.
- Escanes, S.J., Bambill, D.V. y Felix, D.H., El método de cuadratura diferencial generalizado: estudio de arcos circulares vibrantes. *Revista Internacional para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Aceptado para su publicación, 2007.
- Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., Natural frequencies of in-plane vibration of arcs. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, *Journal of Applied Mechanics*, 50: 449-452, 1983.
- Kang, K.J., Bert, C.W. and Striz, G., Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration* 181(2): 353-360, 1995.
- Kang, K.J., Bert, C.W. and Striz, G., Vibration and buckling analysis of circular arches using DQM. *Computers & Structures*, 60 (1):49-57, 1996.
- Tüfekçi, E. and Arpacı, A., Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 209(5): 845-856, 1998.
- Wolf, J.A., Natural frequencies of circular arches. *Transactions of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Structural Division*, 97:2337-2349, 1971.