

ANÁLISIS DE CÁSCARAS DE ESPESOR VARIABLE USANDO LA TÉCNICA DE RIGIDEZ REDUCIDA

Rossana C. Jaca^a y Luis A. Godoy^b

^a Grupo de Métodos Numéricos y Experimentales, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires
1400, 8300 Neuquen, Argentina, rjaca@uncoma.edu.ar

^b CONICET y FCEfyN, Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba, Argentina,
lgodoy@com.uncor.edu

Palabras Clave: Cáscaras, Elementos Finitos, Pandeo, Rigidez reducida, Viento.

Resumen. Este trabajo analiza el pandeo elástico de cáscaras de espesor variable que exhiben problemas de inestabilidad del equilibrio. Este tipo de estructuras se presentan en tanques de almacenamiento de pared delgada con o sin techo destinados al almacenamiento de petróleo, combustibles o agua. En estos casos los espesores de la cáscara cilíndrica se diseñan para resistir la presión hidrostática interna conduciendo a una forma escalonada de la cáscara cilíndrica con mayores espesores en el fondo. La evidencia de daño por viento en estos tanques muestra que la zona de daño se presenta en la parte superior de menores espesores, en las proximidades del techo y en la zona ubicada a barlovento. Algunos autores han estudiado estas estructuras utilizando el concepto de un cilindro sustituto que presenta el espesor de las virolas superiores y empotrado en el fondo. El presente análisis se realiza en base a la teoría de límites inferiores basada en el modelo de rigidez reducida de la cáscara, desarrollado originalmente por Croll y colaboradores. Como una de las vías consideradas, se plantea la eliminación de las componentes de rigidez membranar en las zonas afectadas por pandeo y se deja completa la rigidez en el resto de la cáscara debido a que el modo de pandeo es local. Por un lado se analiza el efecto de zonas con distintas rigideces provenientes de espesores diferentes y por otro la influencia de zonas de baja deformación ante la acción del viento. Las formas de modo obtenidas con esta reducción de componentes de rigidez en algunos sectores de la cáscara aproximan mejor las deformadas observadas en las evidencias de daño mientras que las cargas críticas obtenidas confirman el comportamiento obtenido a través del cilindro sustituto.

1 INTRODUCCION

En 1973, James G. A. Croll, un joven *Lecturer* de University College London en Inglaterra, nacido en Nueva Zelanda, visitó la Universidad Nacional de Córdoba con el apoyo de British Council para ofrecer un curso de estabilidad elástica, al que asistieron unos 10 profesores locales. Esto sirvió para motivar interés en el tema e iniciar una interacción entre las instituciones. Uno de los seminarios versó sobre una nueva forma de calcular cargas de pandeo en estructuras sensibles a imperfecciones mediante límites inferiores. Se trataba de una problemática incipiente, y, como se reseña en Godoy (2003), fue uno de los programas de investigación surgidos a partir de la revolución causada por Koiter en este campo.

El nuevo enfoque en este programa estaba basado en conclusiones previas de Donnell sobre acoplamiento de modos e imperfecciones, de modo que en las etapas iniciales se hacía referencia a un trabajo de Donnell para colocar los nuevos desarrollos en el contexto de la literatura en este campo. Con el tiempo, la nueva metodología logró mayor reconocimiento y difusión, como se reseña en Croll (1995). Croll logró interesar en la temática no solo a investigadores de Inglaterra sino también de Brasil, Argentina, Japón, Canadá, Alemania, Estados Unidos, en varios casos con más de un grupo en un país específico. Hoy existe ya una tercera generación de investigadores en esta temática.

Las aplicaciones específicas en las que han estado involucrados los autores de este trabajo surgieron a partir de considerar la estabilidad de tanques metálicos usados para almacenamiento de petróleo, agua o productos de otras industrias (Jaca et al., 2007; Sosa y Godoy, 2007). El interés por el tema tiene dos vertientes: por un lado, un convencimiento de la importancia que debería tener la teoría de límites inferiores para comprender el comportamiento de cáscaras delgadas. La segunda vertiente es la necesidad de llevar a cabo estimaciones de cargas de pandeo que sean útiles para el diseño o para la predicción de daño potencial.

Después de varios años de trabajo, se nos plantean los interrogantes sobre ¿hacia dónde debe expandirse la teoría? Este trabajo analiza algunas posibilidades de progreso y explora de manera preliminar algunos de los caminos a seguir.

2 PROBLEMAS ABIERTOS EN LA TEORÍA DE LÍMITES INFERIORES

Un estudio de los problemas abordados por la teoría hasta el momento revela que los postulados establecidos por Croll (1995) han resultado efectivos para cáscaras de diferentes formas (aunque principalmente cilíndricas) de espesor constante, y para cáscaras con rigidizadores tratados en forma distribuida (con métodos tipo “*smearred-out*”). En la medida en que la teoría se consolida y se extiende a situaciones nuevas, surgen problemas que deben solucionarse. Este tipo de problemas difícilmente pueda anticiparse de manera *a priori* y generalmente surgen en la medida que las aplicaciones plantean nuevos desafíos al investigador.

He aquí un listado de los desafíos principales detectados por los autores en los últimos años:

(1) Existen muchas estructuras en las que resulta más conveniente o económico diseñar la cáscara con un espesor escalonado, lo que produce discontinuidades. Por ejemplo, en cáscaras que almacenan fluidos, la presión es variable en altura y ejerce presiones mayores en la parte inferior de la cáscara. En estos casos se detecta una localización del modo de pandeo en los niveles superiores (que es la parte más delgada de la estructura). El tratamiento de cáscaras de espesor variable no es obvio desde el punto de vista de los procedimientos de rigidez o rigidez reducida: ¿Toda la cáscara disminuye su rigidez o sólo la parte más débil? Nótese que este

problema no se presenta en cáscaras cilíndricas con carga axial o presión uniforme, porque allí los modos son del tipo global (afectan a toda la estructura). Este tópico se trata en este trabajo.

(2) Una segunda clase de problemas son las cáscaras compuestas, formadas por ejemplo mediante la unión de cilindros y conos, como en tanques de almacenamiento. Para que este efecto tenga importancia es necesario que los modos de pandeo reales involucren deformaciones significativas en ambas cáscaras unidas. Los tanques desarrollan modos que tienden a afectar el cilindro o el techo, pero dependiendo de los espesores relativos, es posible generar diseños con interacción entre cilindro y techo. En esos casos, ¿debe reducirse la rigidez sobre la parte cilíndrica o sobre toda la estructura? Los silos no presentan esa particularidad porque no se usan uniones rígidas como en los tanques, y a menudo los techos de los silos se colocan como una estructura superpuesta.

(3) Bajo presiones de viento, se detecta que los modos de pandeo involucran desplazamientos significativos solo en la parte de barlovento y son prácticamente nulos en sotavento. Si se reduce la rigidez, ¿debería hacerse sobre la parte en la que actúa el modo o sobre toda la estructura? Este tópico se trata en este trabajo.

(4) Los procedimientos de energía reducida y de rigidez reducida se consideraron inicialmente como equivalentes. Pero los resultados recientes parecen indicar que son metodologías diferentes y no (necesariamente) conducen a aproximaciones equivalentes (Sosa et al., 2006).

(5) El uso generalizado de límites inferiores está condicionado a su implementación en programas de propósitos generales. Las técnicas de análisis hasta el momento usan soluciones analíticas o bien modelos numéricos para propósitos específicos. Sin embargo los potenciales usuarios de la metodología, que son consultores y diseñadores, están más acostumbrados a programas de elementos finitos de propósitos generales. Sólo recientemente se ha intentado extender la metodología para incorporar esas herramientas, y la técnica de energía reducida es la que se presta más a esas generalizaciones, como se muestra en (Sosa et al., 2006).

(6) El potencial de expandir la teoría a situaciones fuera de las estructuras de pared delgada puede ser una veta interesante. Problemas no lineales en los que las bifurcaciones clásicas no son simples estimaciones del comportamiento no lineal pueden aparecer por motivos diferentes a los que hoy se entienden en cáscaras, pero también pueden estar asociados a la pérdida efectiva de algunos componentes resistentes. Tal parece ser el caso de la inestabilidad de sólidos 3D muy flexibles (Vera y Godoy, 2005).

3 MODELO NUMÉRICO

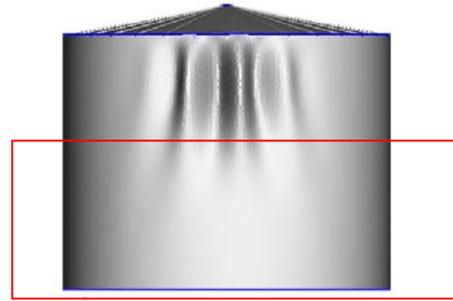
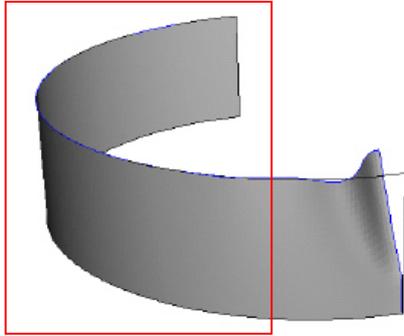
El estudio analiza la problemática generada por la presencia de estructuras con diferentes espesores y el problema generado por zonas inactivas por localización de modos (bajo nivel de desplazamientos y esfuerzos). La Figura 1 muestra estructuras donde ambos problemas se presentan combinados, es decir tanques con distintos espesores cuyas deformadas son producidas por la acción del viento.

Con el objeto de aislar los problemas, se analiza en una primera etapa un tanque cilíndrico sin techo bajo carga axilsimétrica para enfocar el estudio en el planteo correspondiente a zonas de baja deformación por espesores diferentes. Posteriormente se estudian tanques cilíndricos con techo cónico sometidos a la acción de viento, estudiados anteriormente por Jaca, Sosa y Godoy (2006).

Todos los tanques fueron modelados por Elementos Finitos, mediante el programa de propósitos generales ABAQUS (2002) usando elementos de cáscaras triangulares y también por un programa de propósitos específicos, ALREF (Flores y Godoy, 1991), usando

elementos semianalíticos que discretizan el meridiano con elementos curvos unidimensionales. En ambos casos se utilizan mallas lo suficientemente densas para asegurar la convergencia.

Zona de bajo nivel de esfuerzos



Zona de bajo nivel de deformación

Figura 1: Tanques con pandeo por acción de viento.

La distribución de presión de viento adoptada sobre las paredes cilíndricas del tanque corresponde a la expresión (Rish 1967):

$$p = \lambda \sum_{i=1}^n c_i \cos(i\theta) \quad (1)$$

con los siguientes coeficientes de Fourier: $c_0 = 0.387$, $c_1 = -0.338$, $c_2 = -0.533$, $c_3 = -0.471$, $c_4 = -0.166$, $c_5 = 0.066$, $c_6 = 0.055$, donde p es la presión externa del viento y θ es el ángulo con respecto a la dirección del viento. Se considera una distribución de presión constante en la dirección vertical. Para las presiones que actúan en el techo se considera una distribución de presiones obtenidas en ensayos de túnel de viento por Macdonald et al. (1988), que son similares a las presentadas por Portela y Godoy (2005). La Figura 2(a) muestra la distribución de viento usada en el techo cónico y la Figura 2(b) la distribución sobre la cáscara cilíndrica.

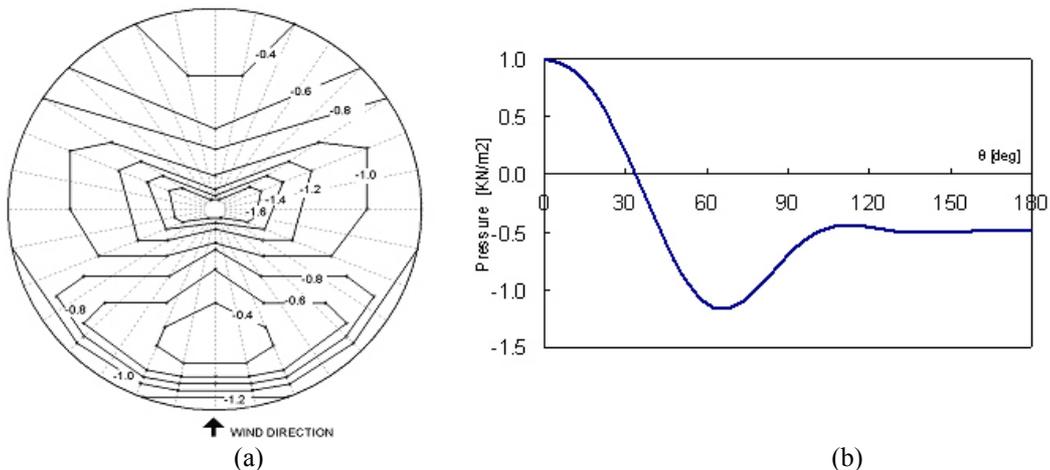


Figura 2: Distribución de presión de viento (a) en el techo cónico; (b) alrededor del cilindro.

En el análisis de estabilidad, los valores de las presiones que actúan en la cáscara completa se aumentan usando el parámetro de carga λ .

4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE RIGIDEZES DIFERENTES

En la Figura 3 se considera el dominio de la estructura dividido en dos zonas de rigideces muy diferentes, donde la zona 2 se supone de mayor rigidez que la zona 1 proveniente, por ejemplo, de cáscaras con dos espesores diferentes t_1 y $t_2 > t_1$.

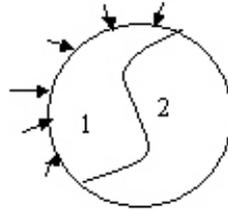


Figura 3: Esquema de estructura con zonas diferentes.

La modelización de la cáscara por Elementos Finitos plantea, a partir de la rigidez total del sistema, la condición de equilibrio para el cálculo de los estados precríticos:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}^F + \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (2)$$

donde \mathbf{K}_0 es la matriz de rigidez lineal de la cáscara, \mathbf{u}^F es el vector desplazamientos nodales, λ el parámetro de carga y \mathbf{P} el vector de cargas escaladas mediante λ . Conocido el vector de desplazamientos \mathbf{u}^F se calculan los esfuerzos correspondientes al estado precrítico \mathbf{N}^F . La matriz de rigidez \mathbf{K}_0 , para pequeños desplazamientos, contiene el aporte de la rigidez membranar \mathbf{K}_M y de la rigidez flexional \mathbf{K}_B donde se tiene en cuenta de manera separada el aporte de las zonas 1 y 2 consideradas:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_B = \int (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0) dA \quad (3)$$

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^M & \mathbf{K}_{12}^M \\ \mathbf{K}_{21}^M & \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez \mathbf{K}_0 se expresa en función de \mathbf{B}_0 que contiene las funciones de interpolación y la matriz constitutiva \mathbf{D} obtenida a partir de las características del material. El problema de autovalores planteado se expresa como:

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda^C \mathbf{K}^G(\mathbf{N}^F)] \Phi = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{K}^G = \int (\mathbf{G}^T \mathbf{N}^F \mathbf{G}) dA = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

donde λ^C es la carga del problema, y Φ es el autovector que indica la deformada asociada al modo crítico. La matriz \mathbf{K}^G tiene en cuenta las componentes no lineales del campo de deformaciones a través de la matriz \mathbf{G} que vincula los giros con los desplazamientos y también incluye las tensiones iniciales en la trayectoria fundamental mediante \mathbf{N}^F . Si en la ecuación (4) se considera de manera separada el aporte correspondiente a las zonas 1 y 2 tanto en la matriz de carga-geometría \mathbf{K}^G como en el autovector Φ , se obtiene:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^M & \mathbf{K}_{12}^M \\ \mathbf{K}_{21}^M & \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

En estructuras de pared delgada la mayor rigidez es membranal y depende de t , mientras que la rigidez flexional resulta menor dependiendo de t^3 . Ambas rigideces se pueden expresar en función del módulo de Elasticidad del material (E) y del coeficiente de Poisson (ν):

$$K = \frac{E}{1-\nu^2} t \quad y \quad D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{t^3}{12} \quad ; \quad \frac{D}{K} = \frac{t^2}{12} \quad (6)$$

donde K es la rigidez membranal y D es la rigidez flexional, estas expresiones forman parte de la matriz constitutiva \mathbf{D} y afectan en forma directa a las submatrices que componen \mathbf{K}^M y \mathbf{K}^B . Nótese que en la ecuación (5) se obtiene que $\mathbf{K}_{22}^M \gg \mathbf{K}_{11}^M$ por presentar la zona 2 una mayor rigidez producida por el espesor mayor. En realidad si se considera una teoría membranal, la rigidez flexional puede despreciarse ya que $K > D$ por ser $t \ll 1$ y la estructura sólo retendría la parte membranal.

Separando el problema original en función de las componentes en las zonas 1 y 2 del autovector Φ , el problema de autovalores de la ecuación (5) queda expresado:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^M \\ \mathbf{K}_{21}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G \end{bmatrix} \right\} \Phi_1 + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^M \\ \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Como se observa que el modo Φ solamente tiene componentes significativas en la zona de menor espesor Φ_1 y en la zona más rígida resulta despreciable, es decir $\Phi_2 \cong 0$, el problema efectivo planteado en la ecuación (4) se reduce a:

$$\left[(\mathbf{K}_{11}^M + \mathbf{K}_{11}^B) + \lambda (\mathbf{K}_{11}^G) \right] \Phi_1 = 0 \quad (8)$$

En el problema de rigidez reducida, donde la reducción de la rigidez membranal se aplica de manera homogénea en toda la cáscara, desaparece \mathbf{K}^M por completo y el problema de autovalores resulta:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

En este caso se ha perdido toda la rigidez membranal, con lo cual se diluye la diferencia que había originalmente entre las zonas 1 y 2. Los valores de la matriz \mathbf{K}^G no se ven afectados por ninguna reducción ya que dependen de los esfuerzos precríticos. Las diferencias entre \mathbf{K}_{22}^B y \mathbf{K}_{11}^B ya no son tan marcadas y el modo que aparece como solución tiene $\Phi_2' \neq 0$ y $\Phi_1 \neq \Phi_1'$. Esto origina que se produzca una transferencia de deformaciones de la zona 1 a la zona 2 y pueden aparecer formas de modo asociadas a λ' que presentan deformaciones por flexión que no son compatibles con las obtenidas en un análisis no lineal geométrico con seguimiento de trayectoria.

Un análisis alternativo es considerar que la rigidez reducida se aplica de manera selectiva, eliminando solamente las componentes membranales asociadas a la zona donde el modo crítico tiene desplazamientos significativos. En este caso la ecuación (5), donde se ha eliminado el aporte membranal que corresponde a la zona 1, resulta:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{12}^M \\ \mathbf{K}_{21}^M & \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda'' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1'' \\ \Phi_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

o bien:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda''' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1''' \\ \Phi_2''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Como \mathbf{K}_{22}^M no se ha perdido y es la mayor rigidez original del sistema, entonces no habrá transferencia de deformaciones hacia la zona 2 y continuará siendo $\Phi_2''' \cong 0$. De esta manera el problema se compacta en:

$$(\mathbf{K}_{11}^B + \lambda''' \mathbf{K}_{11}^G) \Phi_1''' = 0 \quad (12)$$

Esta formulación es consistente con las observaciones para los cilindros con cambios de espesor, en los que hasta se puede trabajar con un cilindro sustituto igual a la zona 1 y olvidarse de la zona 2 con mayor espesor y más rígida.

5 RESULTADOS CLASICOS PARA PROBLEMAS CON DIFERENTES RIGIDECES

Se estudió un modelo correspondiente a un cilindro empotrado en la base con relación de aspecto $r/L = 1$ sometido a una carga radial unitaria que presenta dos espesores diferentes en la altura de la cáscara. Los datos geométricos considerados fueron los siguientes: radio (r) de 4.5 m, longitud (L) de 4.5 m y los espesores son de $t_1 = 0.003$ m en la parte superior y $t_2 = 2 t_1 = 0.006$ m en la parte inferior. El material constitutivo es acero, con un módulo de elasticidad de $E = 2.06 \times 10^{11}$ N/m² y coeficiente de Poisson 0.3.

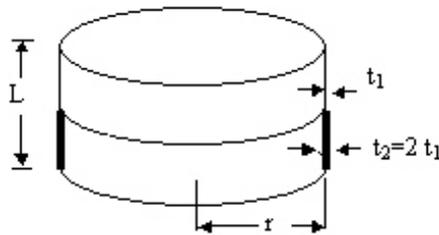


Figura 4: Estructura con dos zonas de rigideces diferentes ($r=4.5$ m y $L=4.5$ m).

El modelo fue estudiado con un programa de propósitos específicos (Flores y Godoy, 1991) y con uno de propósitos múltiples (ABAQUS, 2002) obteniéndose en cada caso la carga crítica y la forma de modo asociada mediante un análisis de autovalores. La carga crítica obtenida fue de 1840 N/m², mientras que la forma del modo se muestra en la Figura 5 y presentó buen acuerdo entre ambos modelos. Como se puede observar, la forma de modo obtenida es global, afectando a toda la cáscara, por ser una carga aplicada en forma axilsimétrica.

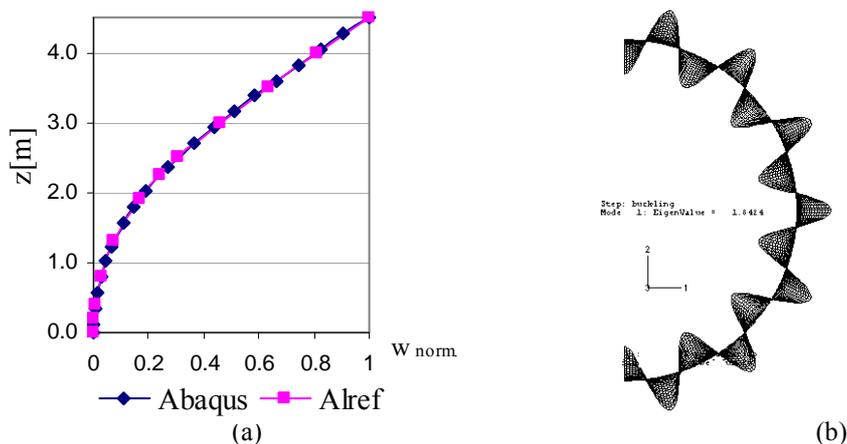


Figura 5: Forma de primer modo para la estructura de la Figura 4, (a) en el meridiano; (b) en el paralelo.

A continuación se realizó un análisis no lineal de sensibilidad ante imperfecciones para comparar los límites inferiores con los obtenidos posteriormente con la metodología de rigidez reducida. Mediante ABAQUS se realizó un análisis no lineal geométrico de seguimiento de trayectoria usando el método de Riks (1972, 1979) con el objeto que la estructura pueda exhibir su comportamiento poscrítico. Se consideraron imperfecciones geométricas según la forma del primer modo con diferente amplitud de imperfección: $\xi/t=1$, $\xi/t=2$ y $\xi/t=2.5$, expresadas en función del menor espesor. En la Tabla 2 se muestra la carga máxima hallada en cada caso y el correspondiente factor de reducción con respecto a la carga crítica, y en la Figura 6 se presenta la curva carga-desplazamiento correspondiente al nodo ubicado en la parte superior sobre el meridiano en el eje de simetría, donde w es el desplazamiento perpendicular a la cáscara.

Magnitud imperfección	Carga máxima [kN/m ²]	Coefficiente de reducción
$\xi/t=1$	1.437	0.78
$\xi/t=2$	1.257	0.68
$\xi/t=2.5$	1.228	0.66

Tabla 2: Análisis no lineal geométrico.

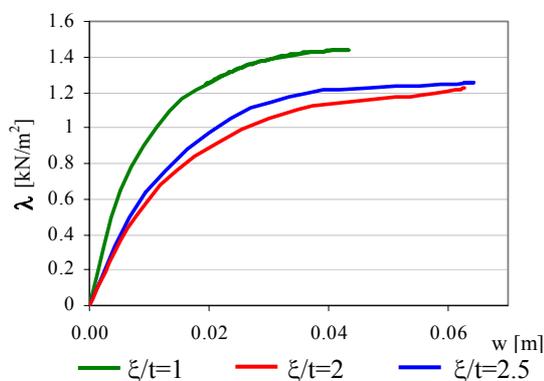


Figura 6: Análisis no lineal geométrico para la estructura de la Figura 4. Curva carga-desplazamiento del nodo superior.

La curva correspondiente al nivel de imperfección $\xi/t=2.5$ muestra un cambio de

comportamiento en la respuesta, por esta razón se toma ese nivel de imperfección como un límite de carga que puede tomar la estructura. Para imperfecciones mayores la estructura se comporta de una manera diferente, porque se ha apartado demasiado de su configuración original.

Al llegar a la carga máxima la deformada en el meridiano tiene una forma similar a la correspondiente al modo crítico en los casos estudiados, como se muestra en la Figura 7(a) para el meridiano ubicado sobre el eje de simetría. En la dirección del paralelo, el modo exhibe una forma similar al modo crítico para una magnitud de imperfección $\xi/t=1$ y algo diferente para $\xi/t=2.5$, con la misma cantidad de semiondas en cada caso ($j=14$) como se presenta en la Figura 7(b) y (c) respectivamente.

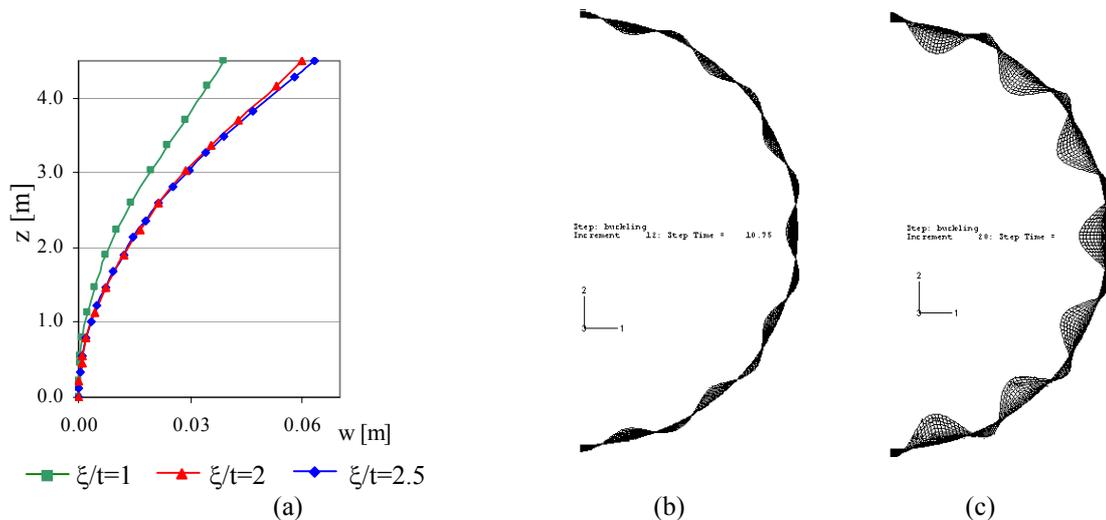


Figura 7: Deformada para carga máxima en análisis no lineal, para la estructura de la Figura 4, (a) en el meridiano; (b) en el paralelo para $\xi/t=1$; (c) en el paralelo para $\xi/t=2.5$.

6 ANÁLISIS DE RIGIDEZ REDUCIDA PARA PROBLEMAS CON DIFERENTES RIGIDECES

La implementación de rigidez reducida consiste en eliminar en el problema de autovalores expresado en la ecuación (4), el aporte de las componentes estabilizantes de rigidez, previo análisis de la distribución de las mismas. Analizando la energía potencial total del sistema e identificando aquellas componentes de rigidez membranar que puede perderse durante el pandeo, el método de límites inferiores consiste en un análisis de autovalores para el mismo sistema pero con las componentes apropiadas de rigidez membranar eliminadas, obteniéndose un nuevo estado crítico caracterizado por λ^* y Φ^* con esa versión de rigidez reducida.

6.1 Eliminación total de las componentes

Se intenta comparar los resultados obtenidos en un análisis de rigidez reducida al plantear la eliminación de las componentes membranar de rigidez en toda la cáscara cilíndrica, según lo expresado en la ecuación (9), o solamente en la zona de menor espesor de la cáscara donde se presentan los mayores desplazamientos, según lo expresado en la ecuación (12). Por esta razón se trabajó sobre dos modelos diferentes: en uno de ellos se propone eliminar las componentes membranar en toda la cáscara y en el otro reducir de manera selectiva solamente en la zona donde el espesor es menor, mencionada anteriormente como zona 1. Sobre ambos modelos se realizó un análisis de rigidez reducida suprimiendo en forma sucesiva la componente membranar meridional (U-U_{mss}), la meridional y torsional (U-U_{mss}-

Umst) y por último, al eliminar la circunferencial también (U-Um), se suprimió todo el aporte membranar. El planteo se realizó en ese orden, ya que la componente meridional representa en el punto crítico el 92% de la rigidez membranar, la torsional el 7.8 % y el resto (que es casi nulo) corresponde a la circunferencial.

En la Tabla 3 se muestran las cargas críticas halladas en cada caso al eliminar las componentes de rigidez sucesivamente y los factores de reducción con respecto a la carga crítica obtenida con rigidez completa para la cantidad de armónicas correspondiente a la carga crítica resultante del análisis de autovalores ($j=14$).

	Reducción en toda la cáscara		Reducción selectiva	
	λ^* [kN/m ²]	η	λ^{**} [kN/m ²]	η
U-Umss	1.177	0.64	1.186	0.64
U-Umss-Umst	1.177	0.64	1.177	0.64
U-Um	1.038	0.56	1.023	0.55

Tabla 3: Análisis de rigidez reducida.

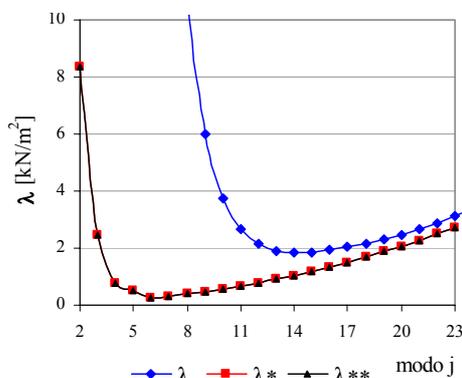


Figura 8: Espectro de cargas para: (a) Rigidez completa (λ); (b) Rigidez reducida en toda la altura (λ^*); (c) Rigidez reducida en zona de espesor menor (λ^{**}).

Se observa que las cargas críticas presentan muy poca variación al considerar que la reducción se realiza sobre toda la altura del cilindro o solamente en la zona superior de menor espesor. Esto también puede observarse en la Figura 8, donde se muestra la distribución de cargas críticas para las diferentes armónicas al eliminar todas las componentes de rigidez membranar, reduciendo en toda la altura o en la región de espesor menor.

Las diferencias con los resultados clásicos aparecen en los modos. La Figura 9 exhibe las formas de modo en el meridiano asociadas a los diferentes casos considerados en la Tabla 3. En la Figura 9(a) se presenta la eliminación en forma homogénea en toda la cáscara según lo indicado en la ecuación (9), mientras que en la Figura 9(b) se muestran los resultados obtenidos con la eliminación selectiva de componentes membranarales en la zona menos rígida según la ecuación (12).

En ambos casos se observa que la forma de modo obtenida al eliminar las componentes meridional y torsional es parecida a la hallada en el análisis no lineal con seguimiento de trayectoria. Pero al eliminar la restante componente membranar, la circunferencial, aunque es muy reducida aparecen formas de modo totalmente diferentes. Cuando se plantea la eliminación homogénea en toda la cáscara, hasta una cierta altura la deformada acompaña las formas obtenidas con las eliminaciones anteriores pero luego se aparta. Al aplicar la eliminación solamente en la zona de menor espesor, esta forma mantiene una mayor

semejanza a las obtenidas con las otras dos eliminaciones, apartándose solamente en la parte superior que representa un 10% de toda la altura.

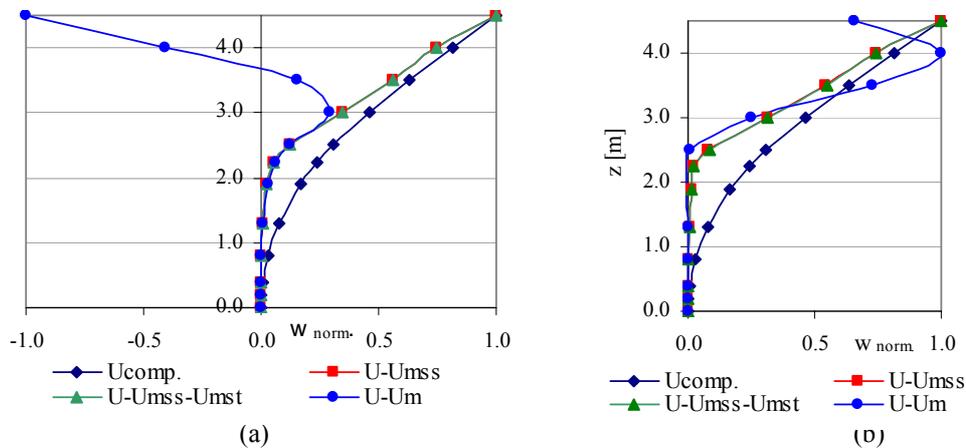


Figura 9: Formas de modo para reducción de componentes membranales:
(a) homogénea en toda la cáscara; (b) selectiva en zona de menor espesor.

En la Figura 10 se comparan las formas de modo obtenidas eliminando todas las componentes membranales en toda la altura o solamente en la zona de menor espesor. Aunque no es exactamente la forma que presenta el modo crítico o el obtenido en el seguimiento de trayectorias al llegar a la carga máxima, pareciera que la forma obtenida reduciendo todas las componentes membranales en la zona de menor espesor es más adecuada que la obtenida al eliminarlas en toda la altura. En cuanto a las cargas críticas, las diferencias de los valores obtenidos en ambos modelos de reducción no son significativas, llegándose en ambos casos a un factor de reducción similar, como se muestra en la Tabla 3.

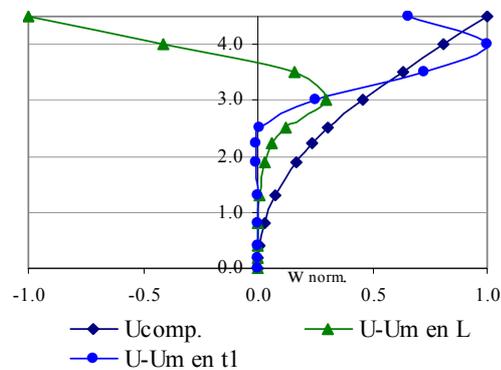


Figura 10: Formas de modo con reducción de toda la rigidez membranal.

6.2 Reducción parametrizada de la rigidez membranal

A pesar que la forma de modo obtenida reduciendo todas las componente membranales en la parte superior del cilindro aproxima mejor que aquella que se obtiene eliminando en toda la cáscara, se observa una diferencia en la parte superior como lo muestra la Figura 10. Esas formas mantienen una similitud con la observada en seguimiento no lineal de trayectoria mientras no se eliminan todas las componentes membranales, aunque se mantenga solamente la componente asociada a la rigidez circunferencial que es de muy bajo valor relativo. Esta característica sugiere que el mantener algo de la rigidez membranal hace que las formas de modo se aproximen a las observadas en el tratamiento no lineal geométrico. Por esta razón se analiza la posibilidad de eliminar no completamente la rigidez membranal sino en forma

parametrizada, ya sea en toda la altura o solamente donde los espesores son menores. Además se estudia su influencia sobre las cargas críticas asociadas.

Se plantearon dos alternativas: (i) reducir en forma simultánea todas las componentes membranales meridional, torsional y circunferencial en función de un parámetro de disminución (α) resultando así una componente membranal $(1-\alpha) U_m$, o bien (ii) reducir por completo las componentes más importantes, meridional y torsional en este caso, y posteriormente una reducción parametrizada sobre la restante, $(1-\alpha) U_{mtt}$.

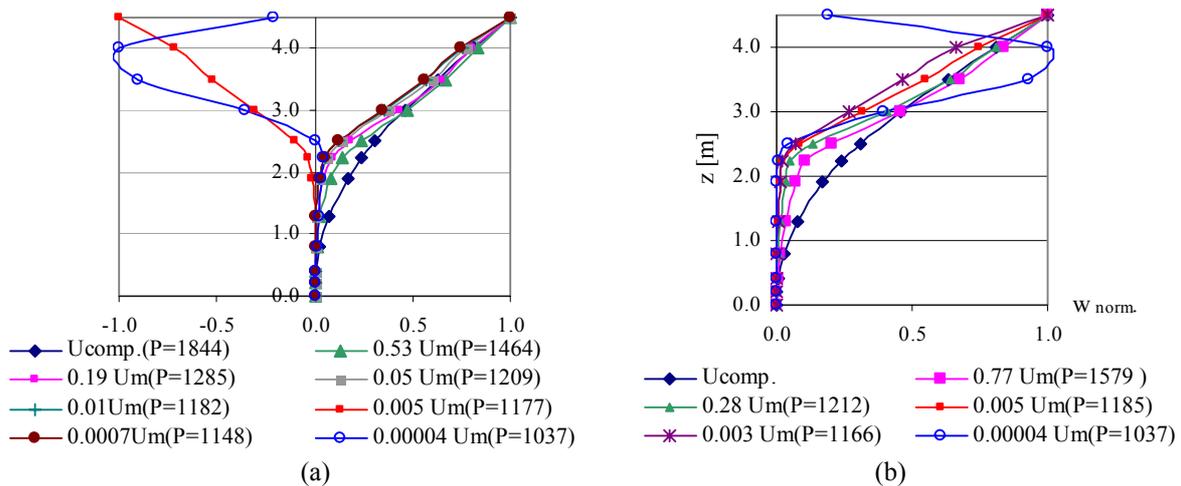


Figura 11: Formas de modo con eliminación parametrizada de toda rigidez membranal $(1-\alpha)U_m$: (a) homogénea en toda la cáscara; (b) selectiva en zona de menor espesor.

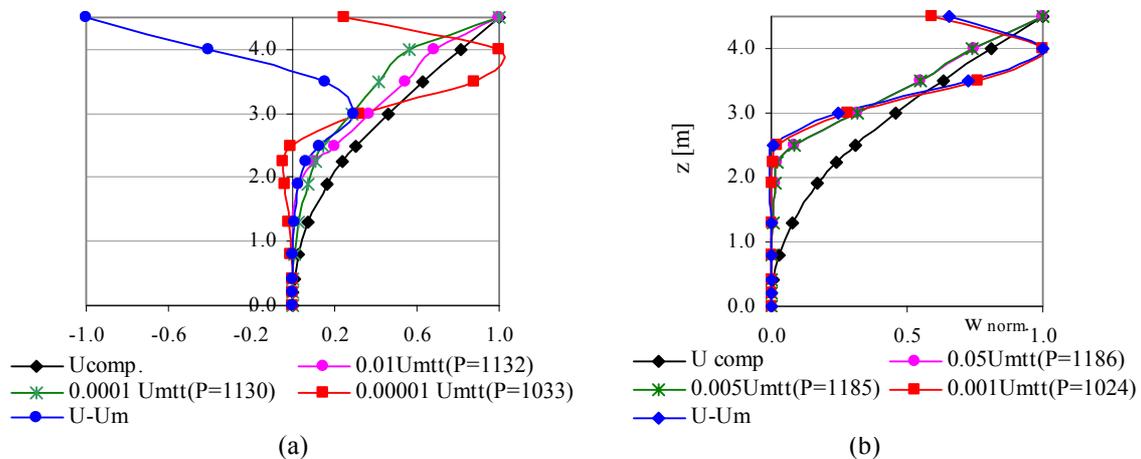


Figura 12: Formas de modo con eliminación total de rigidez meridional y torsional y parcial de rigidez circunferencial: (a) homogénea en toda la cáscara; (b) selectiva en zona de menor espesor.

En la Figura 11 pueden observarse los resultados obtenidos al eliminar en forma parametrizada todas las componentes de rigidez membranal en toda la altura del cilindro o solamente en la zona de menor espesor, junto con la forma asociada a la carga crítica obtenida con la totalidad de la rigidez membranal. En cada caso se indica la carga crítica alcanzada, expresada en N/m^2 , como así también la rigidez membranal considerada. Se observa que, al ir reduciéndose la rigidez membranal, las cargas críticas van disminuyendo y las formas de modo se van apartando de la forma de modo obtenida con toda la rigidez membranal acercándose a las obtenidas eliminando por completo las componentes membranales. En ambas figuras la forma de modo crítica se mantiene aproximadamente salvo para $0.005 U_m$ en la Figura 11(a) o bien cuando se plantea una reducción muy importante donde ya la respuesta pasa a tener una forma similar a la obtenida reduciendo todas las componentes

membranales como se presenta cuando se considera $0.00004 U_m$ en la Figura 11 (a) y (b).

Si se considera que las componentes meridional y torsional son totalmente erosionadas y la reducción se practica solamente sobre la componente circunferencial, se obtienen en cada caso formas de modo asociadas como las mostradas en la Figura 12 según la reducción sea en toda la altura o solamente en la zona de menor espesor. Como referencia se incluyen la forma de modo obtenida con la rigidez completa y aquella obtenida con toda la rigidez membranal eliminada, también se indica la carga crítica asociada a cada caso expresada en N/m^2 . Se observa que las cargas críticas disminuyen desde el valor obtenido para $U_{mss}=U_{mst}=0$ y se requieren importantes reducciones de U_{mtt} para llegar a formas similares a las obtenidas con $U_{mtt}=0$ y su correspondiente carga crítica.

Comparando todas las formas de modo obtenidas y las cargas críticas asociadas parece más conveniente plantear una reducción proporcional de todas las componentes membranales en forma simultánea como se mostró en la Figura 11, ya que las deformadas obtenidas se aproximan más a la forma de modo crítica salvo para reducciones muy importantes donde aparecen formas y cargas críticas similares a las obtenidas reduciendo toda la rigidez membranal. Considerando reducciones de hasta $0.005 U_m$, las formas de modo obtenidas son mejores en el caso de reducción solamente en la zona de menor espesor conduciendo a cargas críticas del orden de $1180 N/m^2$. En la Figura 13 se muestra las formas obtenidas con ese límite en la reducción.

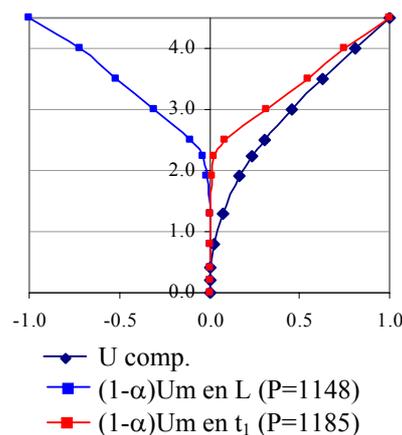


Figura 13: Formas de modo con reducción parametrizada de toda la rigidez membranal.

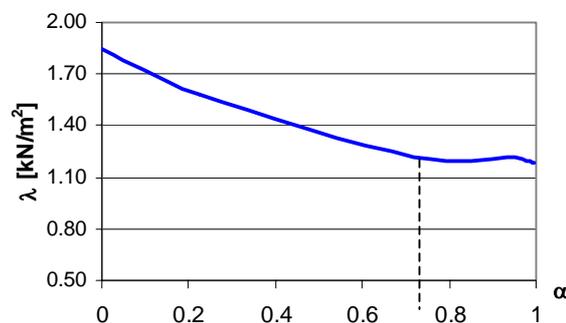


Figura 14: Variación de cargas críticas para una reducción parametrizada de todas las componentes membranales en zona de menor espesor.

En general, al reducir solamente en espesor t_1 se requiere una reducción parametrizada significativa para pasar formas que se alejan de la del seguimiento de trayectoria no lineal, lo que hace que los resultados aproximen mejor la forma de modo. Las cargas críticas halladas son superiores a las obtenidas cuando se eliminan todas las componentes membranales pero

aún así constituyen un límite confiable si se comparan con los valores obtenidos en seguimiento de trayectoria indicados en la Tabla 3.

En la Figura 14 se puede observar la variación de las cargas críticas al cambiar el parámetro de disminución (α), a partir de un cierto valor del parámetro las cargas críticas no presentan variación manteniéndose en un valor de 1.18 kN/m² para caer en un valor de 1.037 kN/m² cuando las reducciones son tan grandes que se aproxima al valor y forma de modo obtenida al eliminar por completo todas las componentes membranales.

7 FORMULACION DEL PROBLEMA DE MODOS LOCALIZADOS

Otra fuente de diferencias entre zonas de una misma estructura puede originarse por la localización de modos, generando esfuerzos considerablemente mayores en una zona respecto a la otra, como en el caso de acción de viento. La zona a barlovento, zona 1, presenta esfuerzos mayores que la zona a sotavento considerada como zona 2, entonces la matriz de estados precríticos \mathbf{N}^F tiende a ser mayor en la zona 1 afectando a \mathbf{K}^G resultando $\mathbf{K}_{11}^G \gg \mathbf{K}_{22}^G$. En este caso suponemos que $K_1 \approx K_2$ y $D_1 \approx D_2$ por lo que no hay cambios relativos de rigidez entre las zonas y la matriz \mathbf{K}_0 no tiene cambios. Entonces el problema queda de la forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^0 & \mathbf{K}_{12}^0 \\ \mathbf{K}_{21}^0 & \mathbf{K}_{22}^0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

con lo que el autovector λ queda asociado a Φ_1 :

$$\mathbf{K}_{11}^0 \Phi_1 + \mathbf{K}_{12}^0 \Phi_2 + \lambda \mathbf{K}_{11}^G \Phi_1 = 0 \quad (14)$$

o bien:

$$(\mathbf{K}_{11}^0 + \lambda \mathbf{K}_{11}^G) \Phi_1 + \mathbf{K}_{12}^0 \Phi_2 = 0 \quad (15)$$

resultando nuevamente que $\Phi_2 \approx 0$.

El problema de rigidez reducida cuando se elimina toda \mathbf{K}^M hace que se modifiquen las relaciones entre términos de zonas 1 y 2 en la matriz de rigidez \mathbf{K}^0 original del sistema y ahora sí resulta $\Phi_2 \neq 0$, apareciendo nuevamente una transferencia de deformaciones que no concuerda con las evidencias de daño.

Si por el contrario se plantea una reducción selectiva de las componentes membranales, nuevamente como \mathbf{K}_{22}^M en \mathbf{K}_0 no desaparece pero sí las otras resultando $\Phi_2 \approx 0$.

8 RESULTADOS CLASICOS PARA PROBLEMAS DE MODOS LOCALIZADOS

En esta sección se analizan tanques con techo cónico ya estudiados anteriormente por Jaca, Sosa y Godoy (2006) con el objeto de evaluar límites inferiores para cargas de pandeo bajo acción de viento. Los seis modelos estudiados (identificados como MC1, MC2, MC3, MC4, MC5 y MC6) tienen el mismo diámetro de 30.48 m y se suponen construidos usando virolas de acero de 2.438 m de altura. El cilindro se considera empotrado en la base y el material constitutivo es acero. La parte cilíndrica de cada modelo tiene diferente altura con relaciones de aspecto altura del cilindro-diámetro (H/D) variando de 0.24 a 0.95, con un espesor de la cáscara cilíndrica reducido gradualmente mediante el método de un pie especificado en la Norma API 650 Sección 3.6.3 (API, 1988).

En ese trabajo, al estudiar los modelos como un problema del autovalores clásico se

observó que el modelo más corto parece ser más rígido y que las cargas críticas clásicas para los modelos más altos tienden a un valor constante a medida que aumenta la relación H/D, además la zona pandeada se concentra en las virolas con menor espesor en el cilindro. Al realizar un análisis no lineal de sensibilidad ante imperfecciones se observó que las cargas máximas halladas resultan prácticamente las mismas para todos los modelos conduciendo a factores de reducción $\eta = \lambda^c/\lambda_{\max}$ casi constantes y del orden de 0.6 para imperfecciones geométricas según la forma del primer modo crítico con amplitud máxima $\xi/t=1$.

Estos resultados concuerdan con lo planteado por Resinger y Greiner (1982) quienes proponen el concepto de cilindro sustituto reemplazando el tanque de espesor variable por uno equivalente con los espesores de las tres virolas superiores y empotrado por debajo. Este concepto se basa en la evidencia exhibida en estos casos en los que el pandeo es parcial, afecta a la parte superior de menores espesores y no se extiende a toda la cáscara ya que las virolas inferiores de mayor espesor no permiten un pandeo global aportando un efecto estabilizante.

La Figura 15 muestra las formas de modo crítico para los modelos planteados, semejantes a las halladas para carga máxima en el análisis no lineal. Se puede observar este efecto de pandeo localizado que se presenta en la zona de menores espesores próxima el techo y en la zona a barlovento, mencionada anteriormente como zona 1 ya sea por tener menor rigidez y/o mayores tensiones en estado precrítico por la acción de la carga de viento.

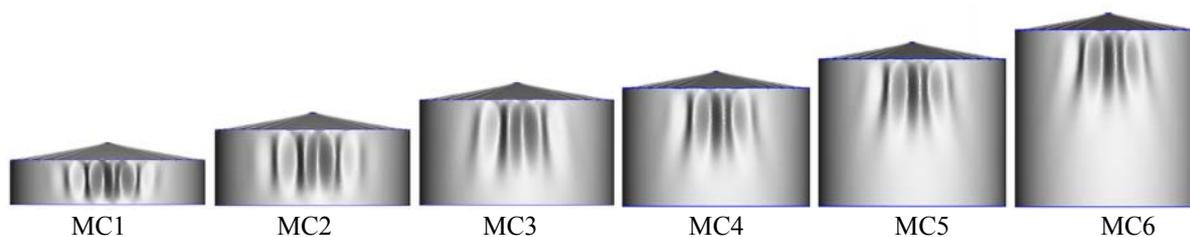


Figura 15: Formas de modo crítico bajo viento.

9 ANALISIS DE RIGIDEZ REDUCIDA PARA PROBLEMAS DE MODOS LOCALIZADOS

Al estudiar estos casos con la metodología de rigidez reducida eliminando las componentes membranales en toda la cáscara resultan factores de reducción variables entre los diferentes modelos y las formas de modo asociadas no son consistentes con las obtenidas en el análisis no lineal de seguimiento de trayectoria. Esto ocurre porque al reducir las componentes membranales en toda la cáscara no se tiene en cuenta ese efecto de pandeo localizado y se produce una transferencia de desplazamientos a zonas más rígidas, como lo analizado en la ecuación (9).

9.1 Eliminación total de las componentes

Teniendo en cuenta el concepto de cilindro sustituto y los resultados obtenidos anteriormente, se planteó la eliminación de todas las componentes membranales en las tres virolas superiores y no reducirlas en la parte inferior del cilindro ni en el techo (que tampoco se ve afectado en los modos de pandeo observados). Nótese que el planteo conduce a que todos los cilindros presenten un comportamiento similar al del modelo denominado MC1, que posee tres virolas solamente en su cáscara cilíndrica.

La Tabla 4 muestra las cargas críticas halladas en el análisis de autovalores clásico (λ), las

correspondientes a reducción de todas las componentes membranales en toda la cáscara (λ^*) y las halladas con reducción selectiva de todas las componentes membranales en las tres virolas superiores solamente (λ^{**}). Además se indican los factores de reducción correspondientes para cada caso. Se puede notar que los factores de reducción hallados con esta reducción sectorizada disminuyen con respecto a los hallados con reducción en toda la cáscara y en general llegan a valores del orden del hallado para el tanque MC1, confirmando el hecho que el comportamiento de todos los modelos es semejante debido a que el modo de pandeo es efectivamente localizado y afecta a la parte superior de la cáscara cilíndrica.

	λ [kN/m ²]	λ^* [kN/m ²]	η^*	λ^{**} [kN/m ²]	η^{**}
MC1	3.885	1.994	0.51		0.51
MC2	2.551	1.320	0.52	1.320	0.52
MC3	2.921	1.612	0.55	1.459	0.50
MC4	2.512	1.443	0.57	1.266	0.50
MC5	2.542	1.358	0.53	1.183	0.46
MC6	2.497	1.479	0.59	1.331	0.53

Tabla 4: Análisis de rigidez reducida.

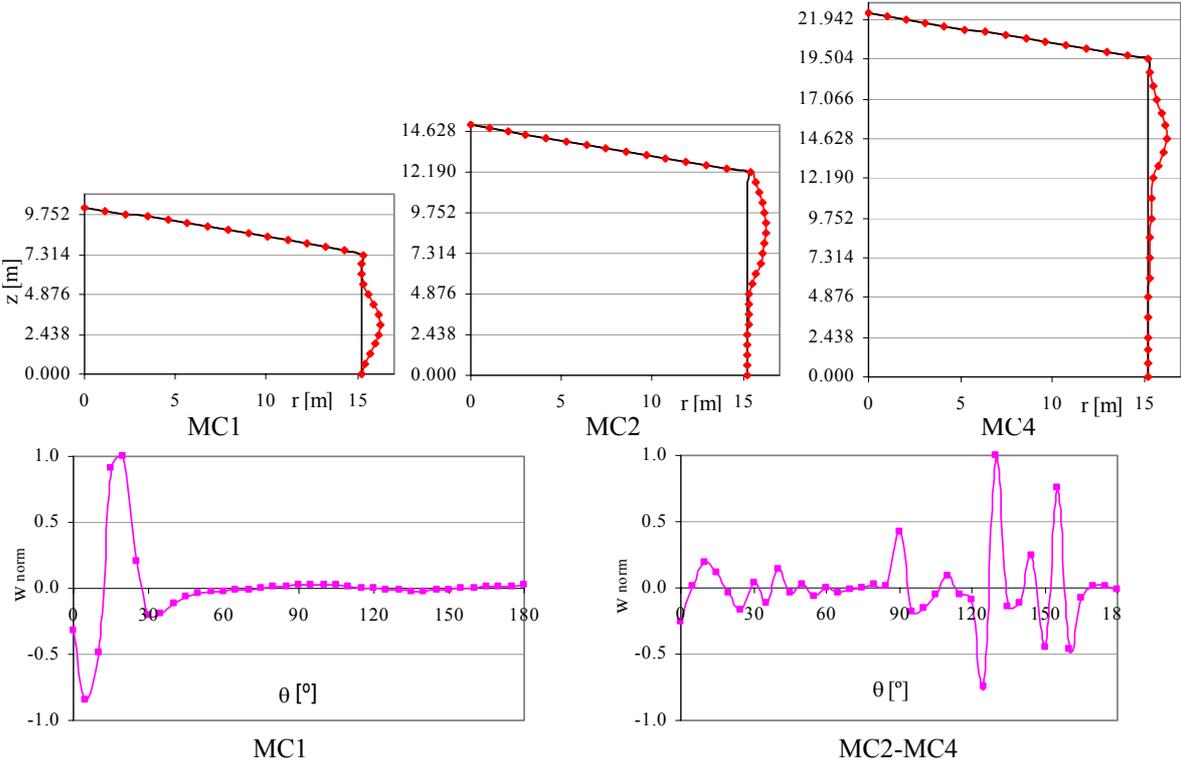


Figura 16: Formas de modo obtenidas con eliminación selectiva de componentes membranales en virolas superiores

La Figura 16 muestra las formas de modo para los modelos denominados MC1, MC2 y MC4, ya sea en el meridiano a barlovento ubicado sobre el eje de simetría o en el paralelo correspondiente al nodo de mayor desplazamiento, cuando se plantea la eliminación selectiva de todas las componentes membranales en las virolas superiores. Se observa que las formas obtenidas son acordes a las observadas en el análisis no lineal en su distribución en el

meridiano pero no en el paralelo para los modelos MC2 y MC4. La reducción selectiva en función del concepto del cilindro sustituto permite controlar la transferencia de desplazamientos a zonas más rígidas por el mayor espesor que presentan las virolas inferiores, pero no logran impedir el paso de deformaciones en el paralelo hacia zonas inactivas por la presencia de menores esfuerzos.

9.2 Reducción parametrizada de la rigidez membranal

En esta sección se plantea una reducción parametrizada de todas las componentes membranales $(1-\alpha) U_m$ en las tres virolas superiores con el objeto de analizar la forma de modo en el paralelo.

La Figura 17 muestra la variación de las cargas críticas halladas en función del parámetro de disminución α , para los modelos MC2 y MC4. Se observa que para $0.92 < \alpha < 1$ en el modelo MC2 o para $0.89 < \alpha < 1$ en el modelo MC4, las cargas críticas toman un valor casi constante y del orden de las indicadas en la Tabla 4.

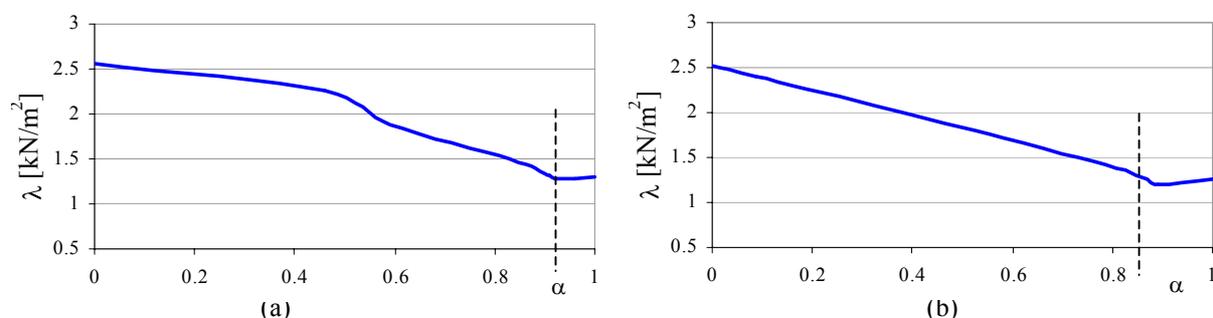


Figura 17: Variación de cargas críticas para una reducción parametrizada de todas las componentes membranales en las tres virolas superiores: (a) modelo MC2; (b) modelo MC4.

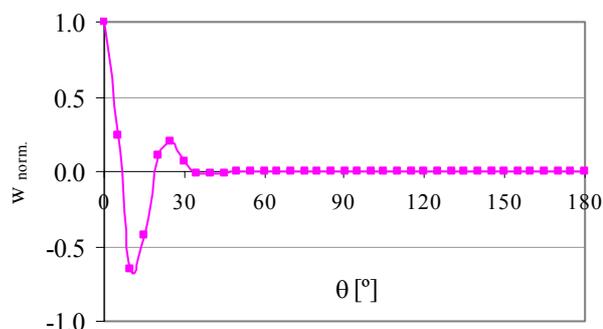


Figura 18: Forma de modo en el paralelo para los modelos MC2 y MC4 con reducción parametrizada de todas las componentes membranales.

En ese rango de valores la forma de modo en el meridiano se mantiene similar a la obtenida en la Figura 16 pero la distribución en el paralelo cambia adoptando una forma como la mostrada en la Figura 18 que se asemeja a las obtenidas en el análisis no lineal. En estos casos esa reducción parametrizada de todas las componentes membranales elimina esa transferencia de deformaciones hacia la zona con menores esfuerzos por acción del viento, como se mostraba en la Figura 16.

10 CONCLUSIONES

Este trabajo explora algunos problemas nuevos que se presentan en el método de rigidez reducida cuando se lo aplica a situaciones no previstas en los desarrollos originales de Croll y

colaboradores. En particular, se tratan dos situaciones. Primero, cuando hay zonas en la cáscara con rigideces diferentes, de manera que una parte tiene mayor rigidez que no se vería afectada por imperfecciones/interacción de modos, con lo que resulta discutible si debería quedar afectada por reducción de rigidez. Segundo, cuando hay modos localizados en una parte de la estructura, de modo que hay un sector sobre el cual no aparecen tensiones significativas y nuevamente se plantea la dificultad de identificar sobre que parte de la cáscara debería aplicarse la reducción de rigidez.

En el trabajo se definen tres formas de aplicar el procedimiento de rigidez reducida: (a) Reducción homogénea, en la cual se reduce la rigidez sobre toda la superficie de la cáscara; (b) Reducción selectiva, en la cual se reduce solamente en la zona en la cual hay rigideces menores o desplazamientos en el modo; (c) Reducción parametrizada, en la cual se reduce la rigidez de manera gradual (en lugar de eliminarse componentes completas).

En forma introductoria, se han resuelto casos específicos para investigar la incidencia de cada alternativa. Los resultados del estudio indican:

- Cuando hay dos espesores diferentes en una cáscara, el análisis no lineal clásico lleva a caídas en la capacidad resistente a pandeo de $1/3$ (con imperfecciones de amplitud de 2.5 veces el espesor). Los modelos de reducción homogénea y selectiva aproximan bastante bien la carga crítica como límite inferior, pero no reproducen el modo que se encuentra en el análisis no lineal. Hay un cambio fuerte en la respuesta entre eliminar U_{mss} y U_{mst} (que son las componentes más importantes) y eliminar todas las componentes que produce U_m . En el primer caso, los modos se aproximan mejor a lo que se obtiene en análisis no lineal, mientras que en el segundo caso se obtienen modos demasiado flexibles.
- Para espesores diferentes, si se parametriza la reducción de U_m , para reducciones del orden no menor de 1% se obtienen resultados razonables de carga y modo. Esto indica que la pérdida total de U_m no tiene consecuencias muy serias para la carga crítica pero sí para el modo crítico.
- Para modos localizados, debido a viento en tanques de espesor escalonado y con un techo, los factores de reducción son del orden de 0.50-0.53. Esto se logra nuevamente con cualquiera de los procedimientos de reducción. Pero las diferencias aparecen en los modos, que en el caso de reducción homogénea o selectiva en sentido vertical llevan a desplazamientos en sentido circunferencial en zonas donde se sabe que la cáscara no queda afectada.
- Si se parametriza la reducción en U_m , se obtienen modos adecuados en sentido circunferencial y vertical, además de una buena representación de la carga crítica.

Los resultados parecen indicar que la alternativa de no eliminar totalmente la energía membranal en la zona en la cual se desarrolla el modo de pandeo produce buenos resultados tanto en la carga límite inferior como en el modo en sentido vertical y circunferencial.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Fernando G. Flores (Universidad Nacional de Córdoba), quien desarrolló la versión original del programa ALREF, y al Dr. Eduardo M. Sosa, con quien mantuvieron discusiones sobre el tema. Este trabajo fue posible gracias a subsidios de la Universidad Nacional del Comahue (Grupo de Métodos Numéricos y Experimentales) y de la Universidad Nacional de Córdoba (SECYT-UNC).

REFERENCIAS

- Abaqus, *User's Manuals, Version 6.3*, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. Rhode Island, 2002.
- API Standard 650, *Welded steel tanks for oil storage*, American Petroleum Institute, Washington, D.C., 1988.
- Croll J.G.A., Towards simple estimates of shell buckling loads, *Der Stahlbau*, Part I, Heft, August; Part II Heft September. 1975
- Croll J.G.A., Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology, *Thin Walled Structures*, 23: 67-84, 1995.
- Flores, F.G. y Godoy, L.A., "Instability of shells of revolution using ALREF: Studies for wind loaded shells", In: *Buckling of Shells in Land, in the Sea and in the Air*, Elsevier Applied Science, Oxford, 213-222, 1991.
- Godoy L.A., Los programas de investigación científica surgidos a partir de la teoría de estabilidad estructural de Koiter, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Argentina*, 55: 99-112, 2003.
- Jaca, R.C., Sosa, E.M. y Godoy, L.A., "Estrategias de implementación de límites inferiores para pandeo de tanques bajo viento", *Mecánica Computacional* vol. 25, 585-604, 2006.
- Jaca R. C., Godoy L. A., Flores F. G. y Croll, J.G.A., A reduced stiffness approach for the buckling of open cylindrical tanks under wind loads, *Thin Walled Structures*, en prensa, 2007.
- Macdonald, P.A., Kwok, K.C.S. y Holmes, J.D., "Wind loads on circular storage bins and tanks: I. Point pressure measurements on isolated structures," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 31, 165-188, 1988.
- Portela, G. y Godoy, L.A., "Wind pressures and buckling of cylindrical steel tanks with conical roof," *Journal of Construction Steel Research*, vol. 61, No. 6, 786-807, 2005.
- Resinger, F. y Greiner, R., "Buckling of wind loaded cylindrical shells. Application to unstiffened and ring-stiffened tanks", *Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke Technische Universität Graz*, 305-331, Austria, 1982.
- Riks, E., "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, 529-551, 1979.
- Riks, E., "The application of Newton's method to the problem of elastic stability," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, 1060-1065, 1972.
- Rish, R.F., "Forces in cylindrical shells due to wind," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 36, 791-803, 1967.
- Sosa E. M. y Godoy L. A., Análisis computacional del pandeo de paneles cilíndricos bajo presión uniforme, *Revista Int. Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, en prensa, 2007.
- Sosa, E.M., Godoy, L.A. y Croll, J.G.A., "Computation of lower-bound buckling loads using general-purpose finite element codes," *Computers and Structures*, 84 (29-30): 1934-1945, 2006.
- Vera-Laboy J. y Godoy L. A., Instability of three dimensional solids, Proc. Third International Conference on *Structural Stability and Dynamics*, Kissimmee, Florida, June 19-22, 2005.