

## DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DEL DAÑO EN VIGAS MEDIANTE EL CAMBIO EN SUS FRECUENCIAS NATURALES

Hernán Kunert <sup>a,b</sup>, Daniel Ambrosini <sup>c</sup>

<sup>c</sup>Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo

<sup>a</sup>Instituto de Estructuras "A. Guzmán" – Universidad Nacional de Tucumán

<sup>b</sup>División Soldadura y Fractomecánica – INTEMA – Universidad Nacional de Mar del Plata

e-mail: [hgkunert@fi.mdp.edu.ar](mailto:hgkunert@fi.mdp.edu.ar), [dambrosini@uncu.edu.ar](mailto:dambrosini@uncu.edu.ar)

**Palabras clave:** daño, vigas, parametrización.

**Resumen.** La existencia de daño estructural en un sistema ingenieril conduce a la modificación de las propiedades dinámicas del mismo que se manifiestan como cambios en los parámetros modales tales como frecuencias naturales, modos de vibración y valores de amortiguamiento modal, los cuales pueden ser obtenidos de ensayos dinámicos. La identificación del daño estructural a través del cambio en las propiedades dinámicas, ha tenido un amplio desarrollo en los últimos años. En general, se intenta desarrollar técnicas confiables para la identificación del deterioro estructural mediante procedimientos basados en las características dinámicas de una estructura. Las técnicas mencionadas presentan ventajas respecto a los métodos tradicionales de auscultación, tales como inspección visual o pruebas de carga. Considerando que la variación de las frecuencias naturales está directamente ligada al deterioro de las propiedades mecánicas, en este trabajo se proponen tres funciones que describen la variación del módulo de elasticidad con la coordenada espacial en vigas de hormigón armado, caracterizando la distribución espacial del daño estructural.

En cuanto al modelo físico teórico-numérico se utiliza un modelo general de vigas. La formulación inicial, basada en las hipótesis de Vlasov, fue modificada permitiendo la inclusión de deformaciones angulares inducidas por el esfuerzo de corte, sección variable en la dirección longitudinal e inercias rotacionales en las ecuaciones de movimiento. Se utiliza un método de integración numérica conjuntamente con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para trabajar en el dominio de la frecuencia.

Los resultados obtenidos son contrastados con un modelo teórico-numérico, sometido a distintos escenarios de daño, inducidos artificialmente.

## 1 INTRODUCCIÓN

La existencia de daño estructural en un sistema ingenieril lleva a la modificación de los modos de vibrar. Estas modificaciones se manifiestan como cambios en los parámetros modales (frecuencias naturales, formas de los modos y valores de amortiguamiento modal). La frecuencia natural es un indicador sensitivo de la integridad estructural. De este modo un análisis periódico de la frecuencia natural permite evaluar la integridad de la estructura, sin embargo existen múltiples metodologías para monitorear el daño. Los métodos presentados en la literatura pueden ser categorizados por el tipo de datos o las técnicas usadas para identificar el daño. La primera clase de métodos usa los cambios en frecuencias naturales (Crema et al 1997, Williams et al 1997, Zembaty Z. 2006, Yang Q.W. 2006, Ngwangwa H.M. 2006, Escobar J.A. 2004, He R.S 2006, ), por otro lado Jeyasehar C.A. (2006) incorpora redes neuronales entrenadas con las frecuencias para la detección de daño en vigas. Otra clase de métodos usan las formas modales (Ismail Z. 2006) y definen los índices MAC (Modal assurance criteria) u otros criterios similares (Kim et al 1992). En los últimos años varios autores han presentados distintos métodos para detectar daño, también basados en las formas modales o frecuencias, sumada a la teoría de ondas (Yang Q.W 2006, Lee T.P.2004, Zhu X.Q 2005, Rucka M. 2006). Otros autores presentan métodos alternativos derivados de las formas modales, tales como curvaturas (Salawu et al 1994), energía de deformación (Carrasco et al 1997 y Doebling et al 1997) o cambios en los nodos (Gladwell et al 1999). Esos métodos se han mostrado más sensibles al daño que los métodos basados en las frecuencias modales. En otra clase de métodos se compara la matriz de flexibilidad dinámica de la estructura sin daño con la correspondiente a la estructura dañada (Pandley et al 1994). Una clase importante de métodos se basa en la modificación de las matrices estructurales de masa, rigidez y amortiguamiento (Liu 1995, Alvin 1997, Cobb et al 1997 y Escobar J.A. 2004 entre otros). Información adicional de métodos alternativos puede encontrarse en los excelentes estados del arte presentados por Salawu (1997) o Doebling et al (1996).

Dado que las frecuencias son fácilmente adquiribles, proveen un método económico de evaluación de integridad estructural. Por otro lado, el uso de datos dinámicos es conveniente porque los acelerómetros pueden ser fácilmente colocados en cualquier estructura (a diferencia de los transductores de desplazamiento). Los cambios en los parámetros modales pueden no ser los mismos para cada modo, pues estos cambios dependen de la naturaleza, severidad y ubicación del daño, por lo cual es siempre recomendable utilizar más de un modo en la evaluación. Estos efectos permiten utilizar al ensayo dinámico para detectar, localizar y cuantificar el daño. Los ensayos desarrollados en diferentes épocas permiten el monitoreo de la condición estructural a lo largo del tiempo. Otra ventaja de usar la frecuencia natural como parámetro de evaluación, es el hecho de que brinda un dato que involucra a toda la estructura, es decir, da un comportamiento global

En síntesis, la presencia del daño o deterioro en una estructura causa cambios en la frecuencia natural de la misma. De este modo, cuando las frecuencias naturales son substancialmente menores que las esperadas indica generalmente una pérdida anormal de rigidez. Contrariamente, frecuencias más altas que las esperadas indican una rigidización de la estructura por algún motivo.

Este trabajo se concentra en el primero de los supuestos anteriores (pérdida de rigidez), esto es, habiendo monitoreado las frecuencias de vibración, poder cuantificar el daño, para luego en etapas posteriores de esta línea de investigación poder caracterizarlo (daño concentrado,

distribuido, simétrico, asimétrico, transición abrupta, suave, etc) al estilo de lo propuesto M M Abdel Wahad (1999-a y b). Todos los desarrollos de este trabajo están aplicados exclusivamente a estructuras tipo viga.

La cuantificación del daño se hace a través del parámetro de daño  $\alpha$ . Para ello se presentan tres funciones de daño cuyo objetivo es introducir el parámetro  $\alpha$  en la formulación matemática que permite modelar la estructura y calcular sus frecuencias naturales de vibración en estado intacto y en estado dañado. .

Estas funciones, originalmente propuestas en este trabajo, modifican el modulo de elasticidad con una distribución simétrica a lo largo del eje longitudinal de las vigas, lo cual representa una condición de daño generalmente encontrada en vigas de hormigón armado y, en particular, en estructuras de puente.

## 2 FUNCIONES DE DAÑO

### 2.1 Función de daño “F1a”

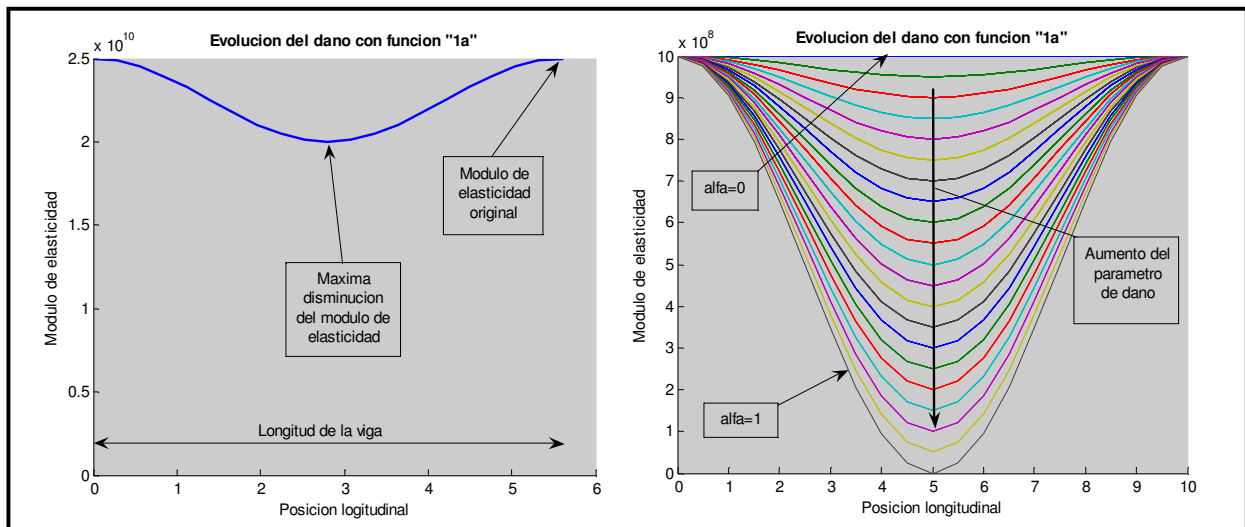
Esta función, es propuesta para identificar y cuantificar el daño en una viga de hormigón. La función tiene la forma:

$$E(x) = E_0 \times \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \times \left( 1 - \cos\left(\frac{2 \times \pi \times x}{L}\right) \right) \right] \quad (1)$$

donde

- L Longitud de la viga
- x Distancia desde un extremo de la viga
- $\alpha$  Parámetro que caracteriza el daño
- $\alpha \rightarrow 1$  Viga con rigidez flexional nula en el centro
- $\alpha \rightarrow 0$  Viga sana en toda su longitud
- $E_0$  Modulo de elasticidad sin daño
- $E(x)$  Modulo de elasticidad dañado

Nótese que esta función es un coseno, y que a pesar de ser una función par, por la forma en que esta expresado su argumento no es necesario considerar su origen en el centro de la viga, como ocurre con la función propuesta por Abdel Wahab M.M. et al (1999-b). El parámetro  $\alpha$  modula la amplitud del coseno, dependiendo de su posición relativa x, a lo largo de la longitud L de la viga (**Figura 1**). Obsérvese también que la función no está definida por tramos, lo que aporta ventajas adicionales a la propuesta por Abdel Wahab M.M.



**Figura 1a:** Variación del módulo elástico con la posición para la función “1a”. Viga de G. Palazzo(2001)

**Figura 1b:** Variación del parámetro de daño entre 0 y 1, con incrementos de 0.05 para función “1a”. Viga genérica.

Para interpretar mejor los límites de la función se considera un caso práctico. Se utiliza una viga de hormigón ensayada por Palazzo G.L. (2001), cuya longitud es de 5.6m. Se supone además que presenta un daño tal que provoca que su módulo de elasticidad original de  $2.5 \times 10^{10}$  MPa se reduzca un 20% ( $\alpha=0.2$ ). Luego, la función “1a” (ecuación 1) determina un valor del módulo de elasticidad dañado de  $2.0 \times 10^{10}$  Mpa en el centro de la viga y su variación cosenoidal hacia ambos extremos. En la **Figura 1a** se observa la variación del módulo de elasticidad con la posición para toda la longitud de la viga. En la parte derecha de la **Figura 1b** se hace variar el parámetro  $\alpha$ , a incrementos de 0.05 desde 0 (totalmente sano) hasta 1 (pérdida total de la rigidez flexional en el centro de la viga). La viga hipotética es de longitud 10m y módulo de elasticidad original de  $1.0 \times 10^{10}$  Mpa.

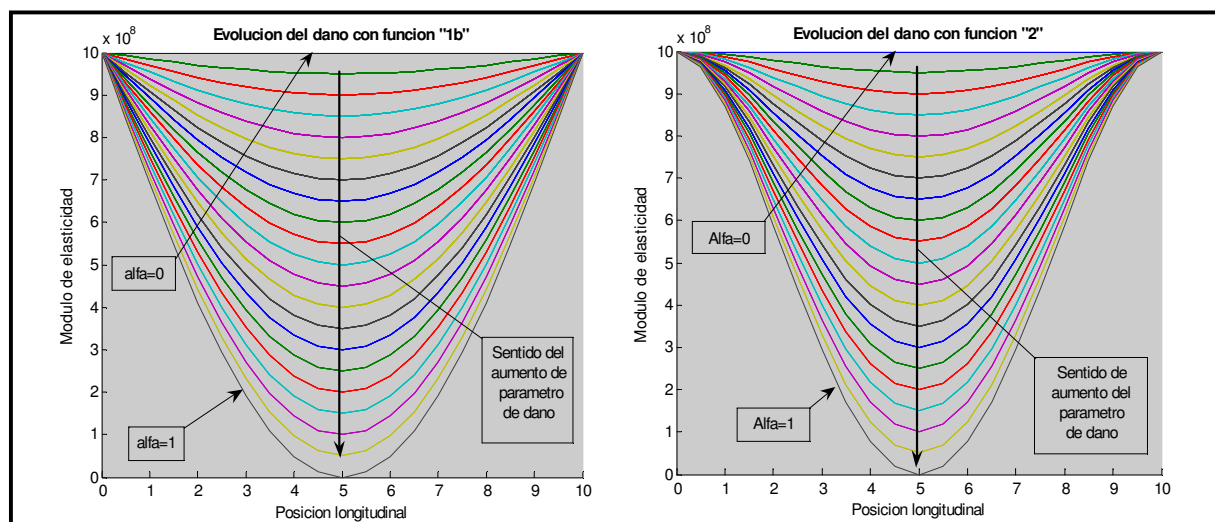
## 2.2 Función de daño “F1b”

Esta función también sirve para identificar y cuantificar el daño distribuido en una viga de hormigón, a través del mismo parámetro  $\alpha$ . La función utilizada en este caso es una función seno con su argumento expresado de modo tal de usar un semiciclo, lo que conduce necesariamente a encuentros no tangentes al eje longitudinal de la viga en ambos extremos pero como se mostrara más adelante cumple correctamente la función para la cual fue pensada. La función es:

$$E(x) = Eo \times \left[ 1 - \alpha \times \text{sen} \left( \frac{\pi \times x}{L} \right) \right] \quad (2)$$

donde las variables tienen el mismo significado que para la ecuación (1)

En la **Figura 2a** se muestra el aspecto de la función “F1b”, el sentido de aumento del parámetro de daño y la consecuente disminución del módulo de elasticidad en la parte central de la misma viga hipotética presentada en el subtítulo anterior.



**Figura 2a:** Variación del parámetro de daño  $\alpha$  para la función “1b”

**Figura 2b:** Variación del parámetro de daño  $\alpha$  para la función “2”

### 2.3 Función de daño “F2”

Esta función, también sirve para identificar y cuantificar el daño simétrico distribuido en vigas. Esta función tiene el mismo parámetro  $\alpha$  de daño que las anteriores, pero carece de funciones trigonométricas en su definición, lo que eventualmente podría aportar ventajas adicionales. Su interpretación es similar a las hechas para las funciones anteriores. Su expresión matemática es:

$$E(x) = Eo \times \left[ 1 - \frac{\alpha \times 16 \times x^2}{L^4} \times (L - x)^2 \right] \quad (3)$$

donde las variables tienen el mismo significado que para la ecuación (1)

Se presenta en la **Figura 2b** donde se puede ver su apariencia. Como en los casos anteriores, se hace variar el parámetro de daño  $\alpha$  entre 0 y 1 con incrementos de 0.05.

## 3 MODELO TEÓRICO NUMÉRICO

### 3.1 La herramienta numérica

A continuación se presenta la herramienta numérica en la cual se implementa la detección del daño. Esta herramienta desarrollada por R. D. Ambrosini (1991), llamada FREC, es un programa desarrollado en lenguaje Fortran que incorpora una teoría general de vigas y el método de las *Variables de Estado* para encontrar las frecuencias de vibración de diferente tipos de estructuras. Este programa fue modificado mediante la incorporación de las tres funciones de daño presentadas anteriormente. Esta nueva versión, el FREC-DAMAGE, encuentra las frecuencias de

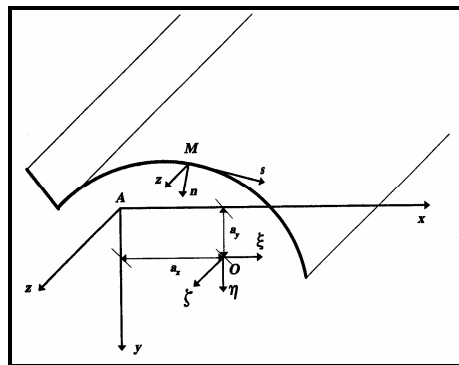
vibración a medida que va variando el parámetro de daño ( $\alpha$ ) en cualquiera de las tres funciones de daño presentadas.

En este trabajo, se describen brevemente las ventajas y limitaciones del FREC y las ecuaciones principales. Por último, se aplica la nueva herramienta a vigas con daño inducido artificialmente lo que permite establecer la exactitud, versatilidad y, a la vez, limitaciones de la herramienta.

### 3.2 El modelo físico-matemático de FREC

La teoría de vigas de Vlasov fue formulada para vigas de pared delgada y sección abierta que se caracterizan por tener las tres dimensiones (largo, ancho y espesor) de órdenes diferente. Esta teoría no solo considera flexión como las de Euler-Bernoulli, Rayleigh, o Timoshenko; sino que incorpora además la torsión y tiene en cuenta el alabeo de la sección transversal. Sin embargo, no tiene en cuenta inercias rotacionales (a diferencia de Rayleigh y Timoshenko), ni las deformaciones por corte a diferencia únicamente de la teoría de Timoshenko.

Ambrosini R.D (1991, 1995) modificó la teoría original de Vlasov y obtuvo una teoría con las siguientes características: flexión y torsión acopladas, inercias rotacionales, deformaciones por corte, alabeo de la sección, y sección variable. Siguiendo el sistema de coordenadas rectangulares (x,y,z) mostrado en la **Figura 3** y asociándole respectivamente los desplazamientos  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  se obtuvo:



**Figura 3:** Sistema de coordenadas utilizado

$$E \left[ F_T(z) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{dF(z)}{dz} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] - \rho F_T(z) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -q_z \quad (4 a)$$

$$E \left[ J_y(z) \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) + 2 \left( \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \gamma_{mx}}{\partial z^2} \right) \frac{dJ_y(z)}{dz} \right] - \rho J_y(z) \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{mx}}{\partial t^2} \right) \frac{dJ_y(z)}{dz} + \rho F_T(z) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = q_y \quad (4 b)$$

$$\begin{aligned}
& E \left[ J_x(z) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) + 2 \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \gamma_{my}}{\partial z^2} \right) \frac{dJ_x(z)}{dz} \right] \\
& - \rho J_x(z) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{my}}{\partial t^2} \right) \frac{dJ_x(z)}{dz} \\
& + \rho F_T(z) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = q_x
\end{aligned} \tag{4 c}$$

$$\begin{aligned}
& E \left[ J_\varphi(z) \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} \frac{dJ_\varphi(z)}{dz} \right] - \rho J_\varphi(z) \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \\
& - \rho \frac{dJ_\varphi(z)}{dz} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} + \rho R_T(z) \left( a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \\
& - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - G \frac{dJ_d(z)}{dz} \frac{\partial \theta}{\partial z} = m_A
\end{aligned} \tag{4 d}$$

En la cual  $\theta$  es la rotación de la sección transversal alrededor del centro de corte (punto O en la **Figura 3**),  $J_x$  y  $J_y$  son los momentos de inercia de la sección transversal en relación a los ejes de referencia  $x$  e  $y$  que pasan a través del centro de gravedad de la sección transversal,  $J_\varphi$  es el momento de inercia sectorial,  $J_d$  el módulo de torsión,  $a_x$  y  $a_y$  las coordenadas del centro de corte (**Figura 3**).  $E$  y  $\rho$  representan el módulo de Young y la densidad del material de la viga respectivamente, mientras que  $q_x$ ,  $q_y$  y  $m_A$  representan las cargas aplicadas externamente por unidad de longitud en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  respectivamente. En la teoría de Vlasov, las deformaciones angulares de membrana  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{zy}$  asociadas con los esfuerzos de corte inducidos por flexión son despreciadas.

El sistema de ecuaciones (4) es un sistema de 4 ecuaciones diferenciales con 4 incógnitas ( $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\theta$ ). Pero para resolverlo resta eliminar las deformaciones medias por corte  $\gamma_{mx}$  y  $\gamma_{my}$  lo que conduciría a expresiones intratables. Por otro lado, si no se tiene en cuenta la vibración axial que puede resolverse separadamente por estar desacoplada, el sistema de ecuaciones a resolver es uno de 3 ecuaciones diferenciales de 4° orden en las funciones incógnitas  $\xi(z,t)$ ,  $\eta(z,t)$  y  $\theta(z,t)$  que se transformará en uno equivalente de 12 ecuaciones diferenciales de 1° orden. A tal efecto, es conveniente transformar el problema al dominio de la frecuencia a través de la transformada compleja de Fourier.

Seleccionando seis incógnitas estáticas (esfuerzos y momentos) y seis incógnitas geométricas (desplazamientos y giros) para formar el “vector de estado”

$$v(x,w) = \{\eta, \phi_y, Q_y, M_x, \xi, \phi_x, Q_x, M_y, \theta, \theta', M_T, B\}^T \tag{5}$$

donde  $M_T$  denota el momento torsional total dado por

$$M_T = H_\varphi + H_k \tag{6}$$

Con  $H_k = GJ_d \theta'$  = momento torsor de Saint Venant.

Con los elementos mencionados anteriormente se forma el sistema de ecuaciones en variables de estado.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = Av + q \quad (7)$$

donde

$A \in R^{12 \times 12}$  es la matriz del sistema

$q \in R^{12 \times 1}$  es el vector de cargas externas.

$$q(z, w) = \{0, 0, -q_x, 0, 0, 0, -q_y, 0, 0, 0, -m_A, 0\}^T \quad (8)$$

Finalmente el sistema de ecuaciones (7) puede ser fácilmente integrado utilizando procesos de integración numérica estándar, tales como Runge Kutta de 4° orden y predictor-corrector en FREC. Sin embargo, el proceso de integración exige el conocimiento de un vector inicial, especificado en  $z=0$ , así el problema de valores de borde es transformado en un problema de valores iniciales.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{k_y FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho J_x \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_y FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho J_y \omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_\theta} \\ \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B\theta & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Es posible evaluar la respuesta en el dominio de la frecuencia de un material general de comportamiento viscoelástico lineal. En esta situación tanto E como G adoptan la forma:

$$E(\omega) = E_o (1 + i\mu(\omega)) \quad (10)$$

$$G(\omega) = G_o (1 + i\mu(\omega)) \quad (11)$$

en las cuales  $E_o$  (o  $G_o$ ) y  $\mu$  pueden ser funciones de  $\omega$ , caracterizando de esta forma al material.

Al trabajar en el dominio de la frecuencia, todas las variables de estado son funciones complejas de  $\omega$ . De este modo se hace necesario particionar  $v$  en una parte real y otra imaginaria (lo que duplica su dimensión de 12 a 24 componentes):



$$v = \begin{Bmatrix} v_R \\ \dots \\ v_I \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Procediendo en forma análoga con la matriz A se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \dots & & \dots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

La submatriz  $A_{11}$  está asociada a la parte real  $v_R$ , la submatriz  $A_{22}$  está asociada a la parte compleja  $v_I$ , mientras que  $A_{12}$  y  $A_{21}$  definen el acoplamiento entre ambas. Está demostrado además que:

$$A_{11} = A_{22} \quad \text{y} \quad A_{12} = \overline{A_{21}} \quad (14)$$

donde

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{k_y F G \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E J_y \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_x \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_x F G \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E J_y \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho I_y \omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E J_z \mu} \\ \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \theta & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\mu}{k'_y FG \mu_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{EJ_x \mu_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{k'_x FG \mu_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{EJ_y \mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{EJ_\phi \mu_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu G J_d & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera queda presentado el problema físico-matemático que combinó una teoría general de vigas con el método de las variables de estado.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Generación de curvas de daño

En los desarrollos siguientes se utiliza una viga cuyos datos se presentan a continuación:

➤ *VIGA SIMPLEMENTE APOYADA*

<i>Largo</i>	$L = 6.00 \text{ m}$
<i>Sección</i>	$F_T = 4.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$
<i>Momento de inercia x</i>	$J_x = 1.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
<i>Momento de inercia y</i>	$J_y = 1.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
<i>Momento de inercia sectorial</i>	$J_\phi = 9.9 \cdot 10^9 \text{ m}^6$
<i>Modulo de torsión</i>	$J_d = 2.256 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
<i>Coord. x centro de corte</i>	$a_x = 0 \text{ m}$
<i>Coord. y centro de corte</i>	$a_y = 0 \text{ m}$
<i>Modulo de elasticidad</i>	$E_0 = 2.50 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
<i>Densidad</i>	$\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$
<i>Coficiente de Poisson</i>	$\nu = 0.2$
<i>Coficientes de Cowper</i>	$k'_x = k'_y = 9.9 \cdot 10^9$

Teniendo en cuenta la distribución del daño que se observa comúnmente en vigas, se indujeron en forma artificial los siguientes escenarios de daño a través de modificar el modulo de elasticidad de la viga según el siguiente detalle:

***Escenario de daño 1:***

*2.5 m desde cada extremo con el E original*

*1m en el centro con  $E=2e10$*

**Escenario de daño 2:**

2 m desde cada extremo con el E original

2m en el centro con  $E=1.5e10$

**Escenario de daño 3:**

Toda la viga con  $E=1e10$

Estas variaciones en el modulo de elasticidad de la viga resultaron en los siguientes escenarios de daño a nivel de frecuencias naturales de vibración:

**a) Viga sin daño**

$$f_1 = 7.81 \text{ Hz} \qquad f_2 = 31.16 \text{ Hz} \qquad f_3 = 69.86 \text{ Hz}$$

**b) Escenario de daño 1**

$$f_1 = 7.50 \text{ Hz} \qquad f_2 = 31.01 \text{ Hz} \qquad f_3 = 67.81 \text{ Hz}$$

**c) Escenario de daño 2**

$$f_1 = 6.58 \text{ Hz} \qquad f_2 = 29.27 \text{ Hz} \qquad f_3 = 64.66 \text{ Hz}$$

**d) Escenario de daño 3**

$$f_1 = 4.93 \text{ Hz} \qquad f_2 = 19.70 \text{ Hz} \qquad f_3 = 44.20 \text{ Hz}$$

Con el programa FREC-DAMAGE se calculan las tres primeras frecuencias de vibración flexional de la viga anterior. Esto a partir del escenario cero o viga “sin daño”. Se realizan tres corridas, una para cada función de daño. FREC-DAMAGE repite el procedimiento anterior variando en forma automática el parámetro de daño  $\alpha$  en incrementos de 0.1 entre 0 y 1.

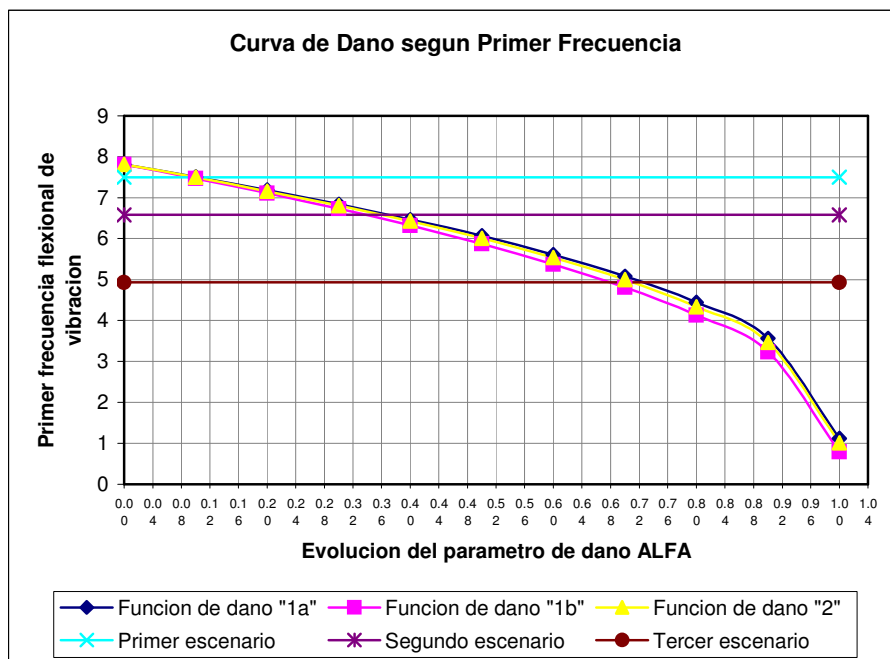
Los resultados se muestran en la **Tabla 1**

Curvas de Daño	frec función "1a"	ALFA	frec función "1b"	ALFA	frec función "2"	ALFA
1er frec.	7.81	0.0	7.81	0.0	7.81	0.0
2da frec	31.16	0.0	31.16	0.0	31.16	0.0
3er frec	69.86	0.0	69.86	0.0	69.86	0.0
1er frec.	7.51	0.1	7.47	0.1	7.5	0.1
2da frec	30.36	0.1	30.08	0.1	30.28	0.1
3er frec	68.06	0.1	67.51	0.1	67.93	0.1
1er frec.	7.19	0.2	7.11	0.2	7.16	0.2
2da frec	29.51	0.2	28.94	0.2	29.35	0.2
3er frec	66.15	0.2	65.04	0.2	65.89	0.2
1er frec.	6.84	0.3	6.73	0.3	6.81	0.3
2da frec	28.61	0.3	27.73	0.3	28.36	0.3
3er frec	64.11	0.3	62.41	0.3	63.7	0.3
1er frec.	6.47	0.4	6.32	0.4	6.43	0.4
2da frec	27.63	0.4	26.43	0.4	27.3	0.4
3er frec	61.91	0.4	59.6	0.4	61.35	0.4
1er frec.	6.07	0.5	5.87	0.5	6.01	0.5
2da frec	26.57	0.5	25.04	0.5	26.14	0.5
3er frec	59.5	0.5	56.55	0.5	58.78	0.5
1er frec.	5.61	0.6	5.37	0.6	5.54	0.6

2da frec	25.39	0.6	23.5	0.6	24.86	0.6
3er frec	56.81	0.6	53.19	0.6	55.92	0.6
1er frec.	5.08	0.7	4.81	0.7	5	0.7
2da frec	24.04	0.7	21.78	0.7	23.4	0.7
3er frec	53.73	0.7	49.38	0.7	52.64	0.7
1er frec.	4.44	0.8	4.13	0.8	4.34	0.8
2da frec	22.44	0.8	19.75	0.8	21.66	0.8
3er frec	50.02	0.8	44.88	0.8	48.71	0.8
1er frec.	3.56	0.9	3.23	0.9	3.46	0.9
2da frec	20.31	0.9	17.14	0.9	19.38	0.9
3er frec	45.07	0.9	39.02	0.9	43.48	0.9
1er frec.	1.12	1.0	0.79	1.0	1.01	1.0
2da frec	14.92	1.0	10.89	1.0	13.65	1.0
3er frec	34.37	1.0	25.81	1.0	31.71	1.0

**Tabla 1:** Primeras 3 frecuencias flexionales verticales de vibración obtenidas variando el parámetro de daño con cada función 1a, 1b y 2

Cuando  $\alpha=0$  las 3 funciones de daño mantienen el valor del modulo de elasticidad original del material y sus frecuencias de vibración coinciden exactamente para las tres funciones. A partir de que  $\alpha=0.1$ , se observa que cada función de daño genera frecuencias diferentes producto de la modificación que cada una de ellas provoca en el modulo de elasticidad. A partir de la **Tabla 1** se generan los siguientes gráficos, el primero para la primer frecuencia de vibración (**Figura 4**) y el segundo para la tercer frecuencia de vibración (**Figura 5**). Se destaca que la segunda frecuencia de vibración no se considera teniendo en cuenta que su aporte a las funciones de distribución del daño adoptadas será nulo por tener un nodo modal en su centro.



**Figura 4:** Curvas de daño según primer frecuencia

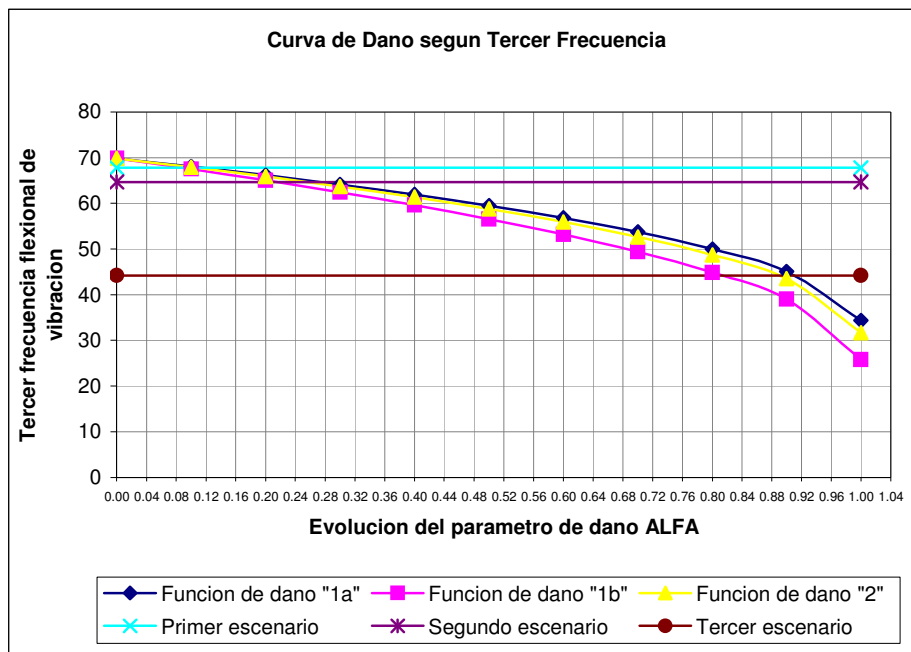


Figura 5: Curvas de daño según tercer frecuencia

De la inspección de las Figuras 4 y 5 se pueden extraer los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ . Por ejemplo, en la Figura 4, de la intersección de la línea del segundo escenario de daño con cada una de las curvas 1a, 1b y 2 respectivamente se obtiene: 0.37, 0.335 y 0.36 como valores del parámetro de daño  $\alpha$  para la primera frecuencia flexional de vibración (parámetro  $\alpha_1$ ).

Los resultados obtenidos se presentan **Tabla 2**.

1er frecuencia	Dano 1a	Dano 1b	Dano 2	3er frecuencia	Dano 1 <sup>a</sup>	Dano 1b	Dano 2
1er escenario	0.1	0.1	0.1	1er escenario	0.12	0.1	0.115
2do escenario	0.37	0.335	0.36	2do escenario	0.265	0.21	0.26
3er escenario	0.725	0.68	0.71	3er escenario	0.91	0.815	0.89

Tabla 2: Valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  obtenidos de las curvas de daño

#### 4.2 Determinación de los parámetros de daño

En función de la **Tabla 2** se puede calcular el parámetro  $\alpha$  que surge del promedio ponderado de cada uno de los  $\alpha$  obtenidos de las curvas de daño para la primer y tercer frecuencia ( $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ ). De este modo ponderando con  $k_1=0.8$  y  $k_3=0.2$  resulta el parámetro final de daño  $\alpha$ :

$$\alpha = \alpha_1 k_1 + \alpha_3 k_3 \tag{15}$$

Los parámetros de ponderación elegidos representan una propuesta, basada en el estudio y análisis de varios resultados experimentales, la cual tiene en cuenta la influencia de los modos en la respuesta global y en el daño en particular

A continuación, se presenta la evolución del parámetro de daño  $\alpha$  para cada una de las funciones de daño adoptadas (funciones “1a”, “1b” y “2”).

EVOLUCIÓN DEL PARÁMETRO DE DAÑO			
Parámetro de daño ALFA	Según función de daño 1a	Según función de daño 1b	Según función de daño 2
1er escenario	0.104	0.100	0.103
2do escenario	0.349	0.310	0.340
3er escenario	0.762	0.707	0.746

Tabla 3: Valores de  $\alpha$  obtenidos por promedio ponderado

Se presenta en Figuras 6 a 8 la evolución del daño para cada función:

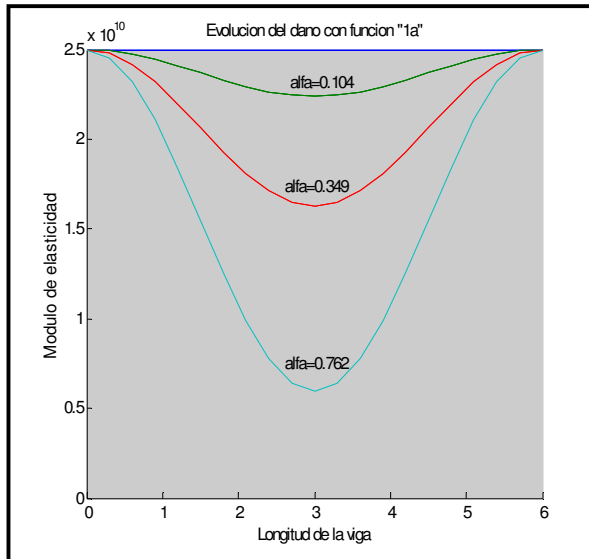


Figura 6: Evolución del daño con función “1a”

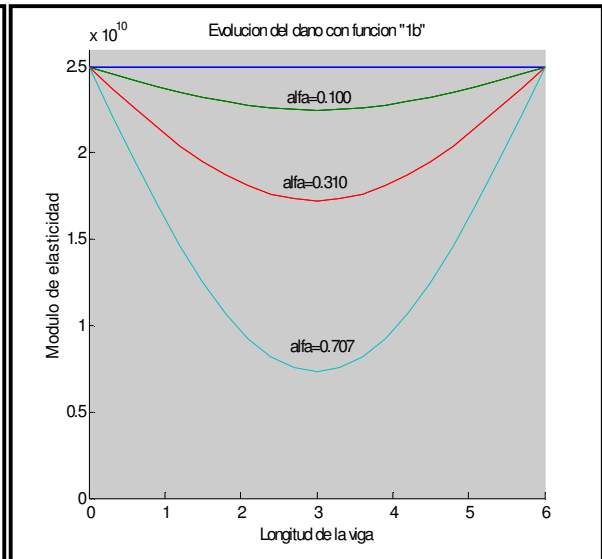
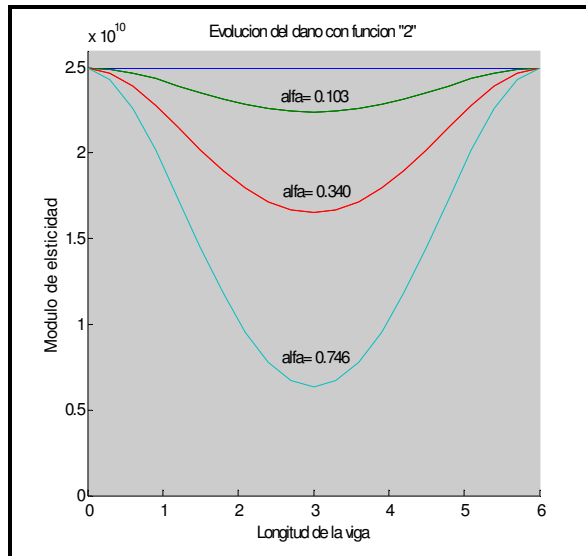


Figura 7: Evolución del daño con función “1b”



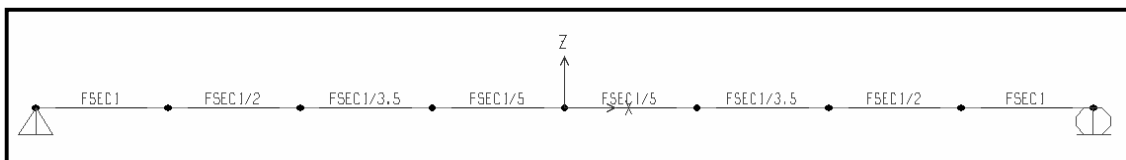
**Figura 8:** Evolución del daño con función “2”

### 4.3 Verificación utilizando un modelo de elementos finitos

Se planteo en principio un modelo de 8 barras (ver **Figura 9**) con variaciones del modulo de elasticidad original de  $E_0=2.5e10$  desde cada borde hacia el centro según el criterio:

**Escenario MEF de daño 1:**  $E_0, E_0/1.33, E_0/2, E_0/3.5$ , simétrico

**Escenario MEF de daño 2:**  $E_0, E_0/2, E_0/3.5, E_0/5$ , simétrico



**Figura 10:** Modelo de elementos finitos

Las frecuencias del modelo se muestran en las **Tablas 4 y 5** Teniendo en cuenta que con el FREC-DAMAGE se estaba trabajando con las 3 primeras frecuencias flexionales *verticales* de vibración, en este modelo corresponden a las frecuencias 1, 3 y 5. (indicadas en negrita)

TABLA 1er Escenario: Periodos Modales y Frecuencias						
Caso Salida	Tipo Paso	Paso Num	Periodo	Frecuencia	FrecCirc	Autoval
Texto	Texto	Sin unid	Seg	Cic/seg	rad/seg	rad2/seg2
MODAL	Modo	1	0.206032	<b>4.854</b>	30.496	930.02
MODAL	Modo	2	0.07115	14.055	88.309	7798.5
MODAL	Modo	3	0.043082	<b>23.21</b>	145.84	21270
MODAL	Modo	4	0.026887	37.193	233.69	54610
MODAL	Modo	5	0.019359	<b>51.66</b>	324.56	105340
MODAL	Modo	6	0.014225	70.296	441.68	195090

MODAL	Modo	7	0.011159	89.612	563.05	317030
MODAL	Modo	8	0.010952	91.308	573.7	329130
MODAL	Modo	9	0.008967	111.51	700.67	490940
MODAL	Modo	10	0.007509	133.17	836.76	700160
MODAL	Modo	11	0.00659	151.75	953.46	909090
MODAL	Modo	12	0.005203	192.21	1207.7	1458500

**Tabla 4:** Resultado MEF 1er escenario

<b>TABLA 2do Escenario: Periodos Modales y Frecuencias</b>						
<b>Caso Salida</b>	<b>Tipo Paso</b>	<b>Paso Num</b>	<b>Periodo</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>FrecCirc</b>	<b>Autoval</b>
Texto	Texto	Sin unid	Seg	Cic/seg	rad/seg	rad2/seg2
MODAL	Modo	1	0.253587	<b>3.9434</b>	24.777	613.91
MODAL	Modo	2	0.078057	12.811	80.495	6479.5
MODAL	Modo	3	0.054088	<b>18.488</b>	116.17	13494
MODAL	Modo	4	0.031128	32.126	201.85	40745
MODAL	Modo	5	0.02349	<b>42.571</b>	267.48	71546
MODAL	Modo	6	0.016721	59.806	375.77	141200
MODAL	Modo	7	0.013353	74.888	470.54	221410
MODAL	Modo	8	0.013299	75.195	472.46	223220
MODAL	Modo	9	0.010585	94.47	593.58	352330
MODAL	Modo	10	0.00898	111.35	699.65	489510
MODAL	Modo	11	0.007842	127.53	801.26	642020
MODAL	Modo	12	0.006235	160.39	1007.7	1015500

**Tabla 5:** Resultado MEF 2do escenario

Para determinar el parámetro  $\alpha$  se utilizan los valores de frecuencia de la **Tabla 4** en las curvas de daño de la viga (Ver **Figuras 10 y 11**):



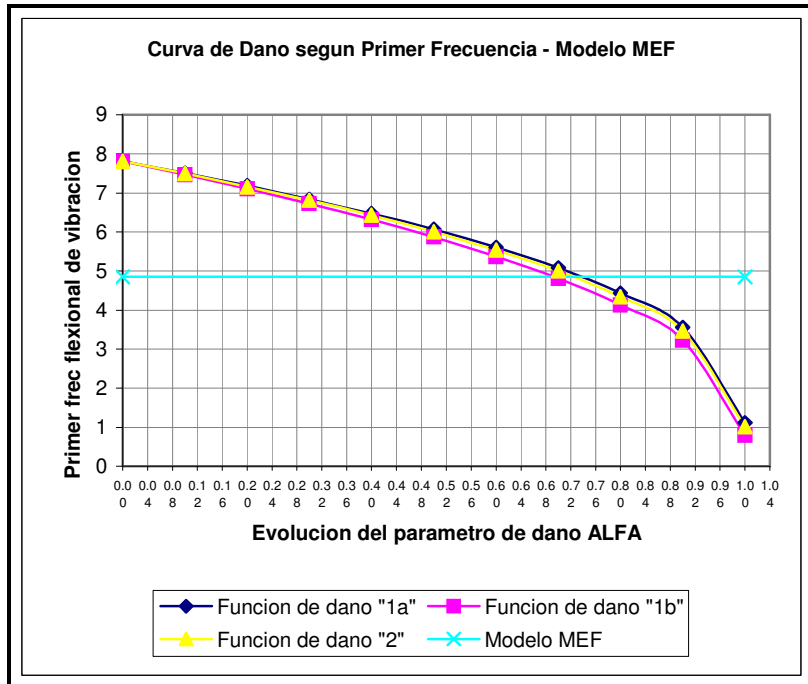


Figura 10: Curvas de daño primer frecuencia y 1er escenario de daño MEF

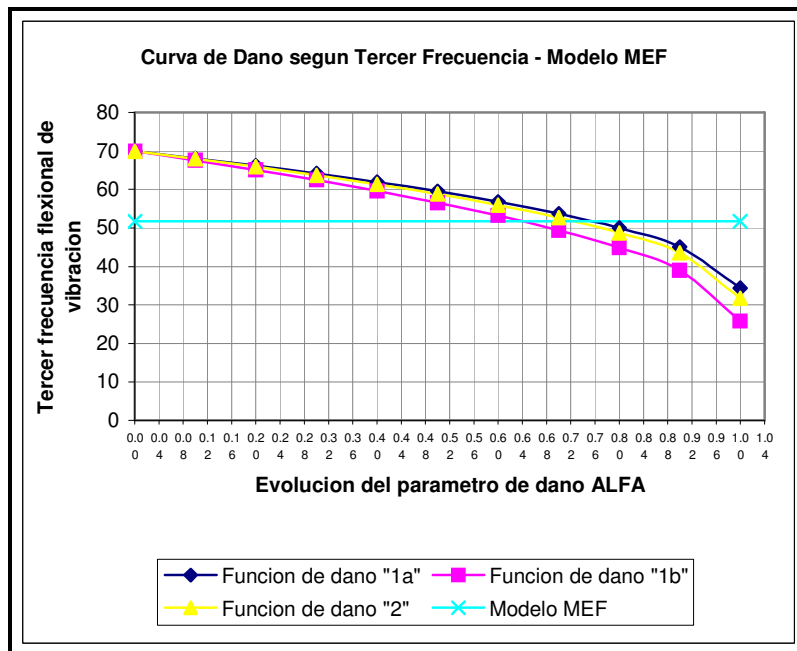


Figura 11: Curvas de daño tercer frecuencia y 1er escenario de daño MEF

De las Figuras 10 y 11 se obtienen los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ :

1er frecuencia	Daño 1 <sup>a</sup>	Daño 1b	Daño 2	3er frecuencia	Daño 1 <sup>a</sup>	Daño 1b	Daño 2
<b>Escenario MEF</b>	0.74	0.70	0.72	<b>Escenario MEF</b>	0.76	0.64	0.69

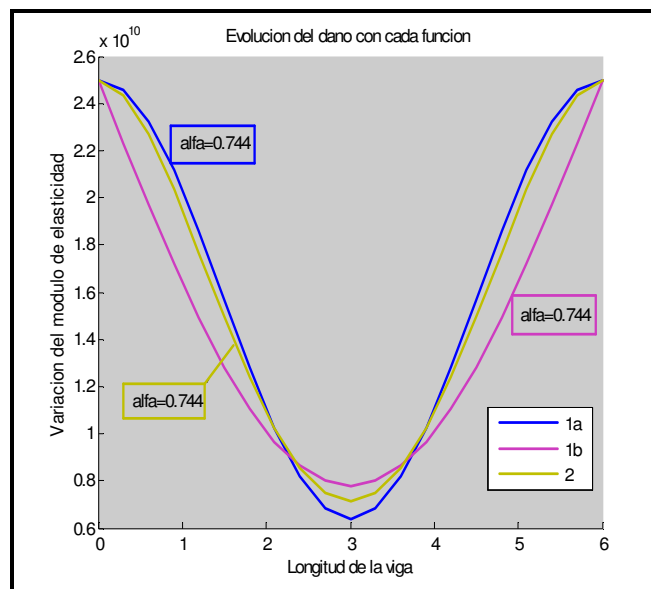
**Tabla 6:** Valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  obtenidos de las curvas de daño - 1er escenario

Luego en base a los valores de la **Tabla 6** y usando la ecuación (15) se puede calcular el  $\alpha$  resultando para cada función de daño:

EVOLUCIÓN DEL PARÁMETRO DE DAÑO			
Parámetro de daño ALFA	Según función de daño 1a	Según función de daño 1b	Según función de daño 2
<b>Escenario MEF</b>	<b>0.744</b>	<b>0.688</b>	<b>0.714</b>

**Tabla 7:** Valores de  $\alpha$  obtenidos por promedio ponderado –1er escenario

La **Figura 12** muestra la variación del modulo de elasticidad que cada función devuelve para el alfa calculado según ecuación (15).



**Figura 12:** 1er escenario MEF parametrizado según funciones 1a, 1b y 2

Luego con los valores de frecuencias determinados por el programa de elementos finitos en la **Tabla 5** se puede procesar la información para el 2do escenario de daño planteado en el MEF. Para los valores de frecuencia de la **Tabla 5** en las curvas de daño de la viga (ver **Figuras 13** y **14**)

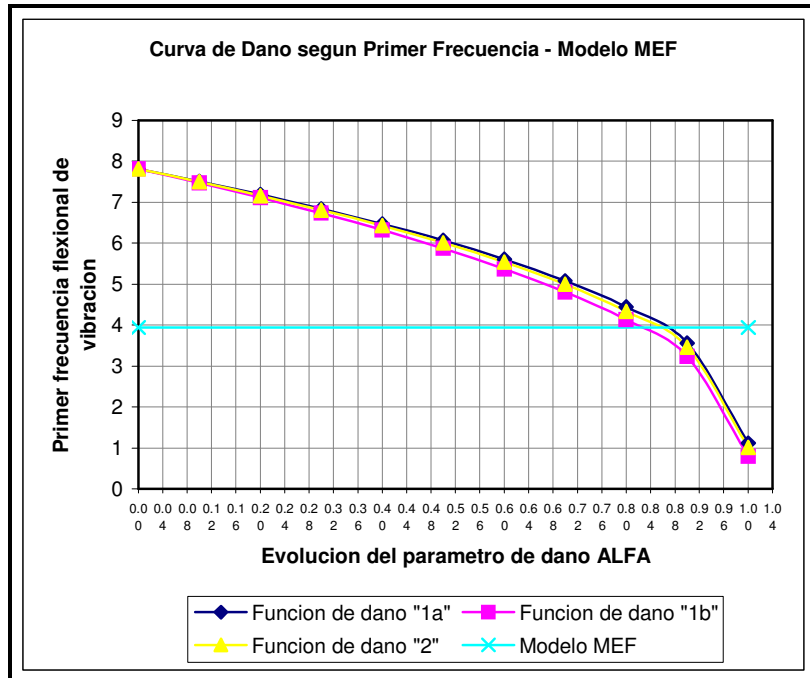


Figura 13: Curvas de daño primer frecuencia y 2do escenario de daño MEF

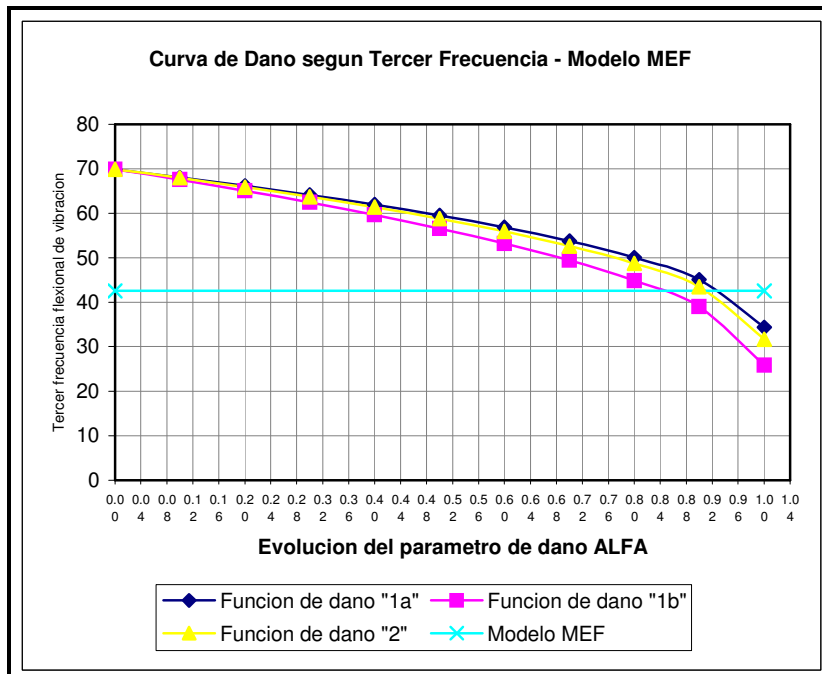


Figura 14 Curvas de daño tercer frecuencia y 2do escenario de daño MEF

De las Figuras 13 y 14 se obtienen los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ :

1er frecuencia	Daño 1 <sup>a</sup>	Daño 1b	Daño 2	3er frecuencia	Daño 1 <sup>a</sup>	Daño 1b	Daño 2
<b>Escenario MEF</b>	0.87	0.825	0.86	<b>Escenario MEF</b>	0.93	0.84	0.91

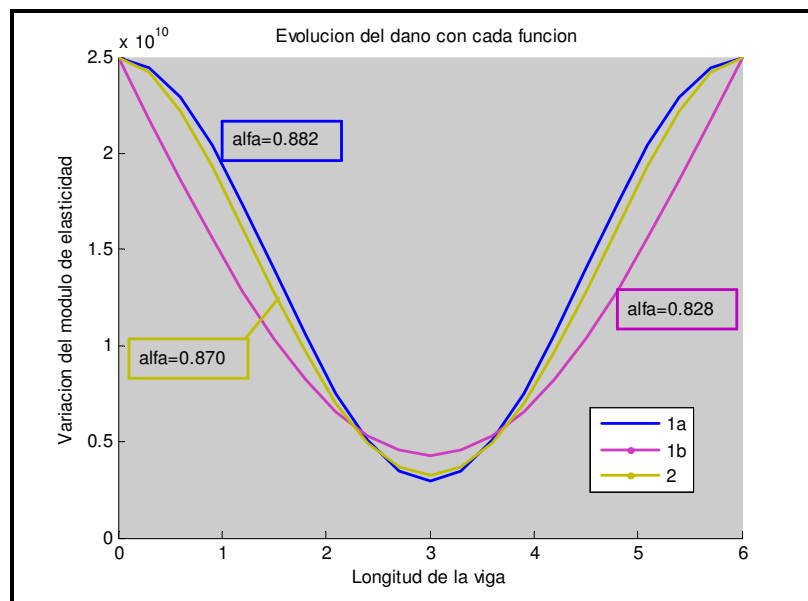
**Tabla 8:** Valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  obtenidos de las curvas de daño

Luego en base a los valores de la **Tabla 8** y usando la ecuación (15) se puede calcular el  $\alpha$  resultando para cada función de daño:

EVOLUCIÓN DEL PARÁMETRO DE DAÑO			
Parámetro de daño ALFA	Según función de daño 1a	Según función de daño 1b	Según función de daño 2
<b>Escenario MEF</b>	<b>0.882</b>	<b>0.828</b>	<b>0.870</b>

**Tabla 9:** Valores de  $\alpha$  obtenidos por promedio ponderado

La **Figura 15** muestra la variación del modulo de elasticidad que cada función determina para el coeficiente  $\alpha$  calculado según ecuación (15).



**Figura 15:** 2do escenario MEF parametrizado según funciones 1a, 1b y 2

Finalmente se obtiene para el modelo MEF y los escenarios de daño planteados una evolución coherente del mismo. Esto se grafica en la **Figura 16**.

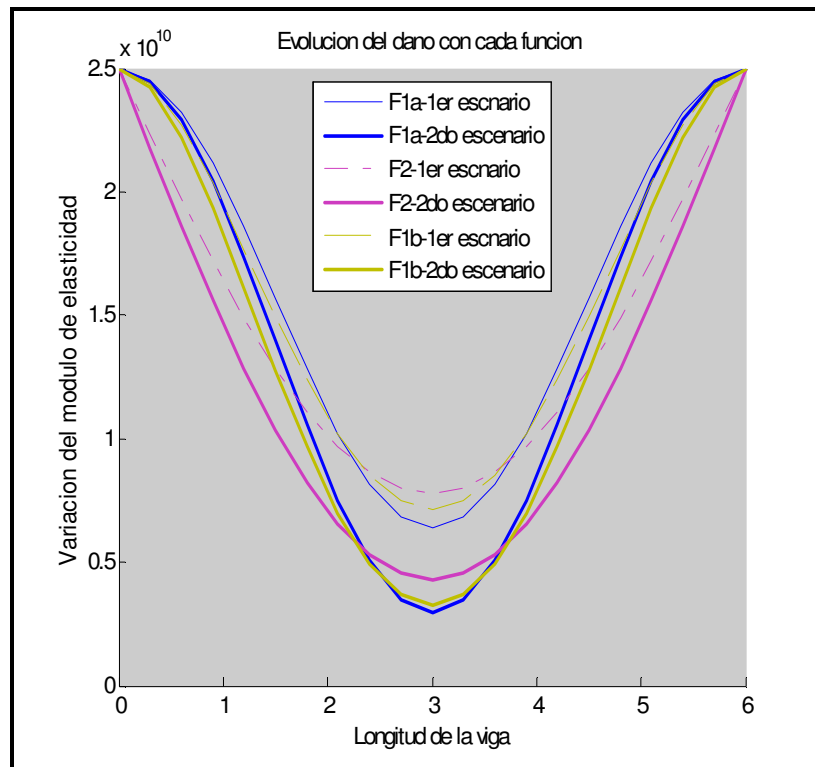


Figura 16: Evolución coherente del daño para escenarios MEF

## 5 CONCLUSIONES

Se presentaron *tres nuevas funciones* que permiten modificar el modulo de elasticidad de estructuras tipo vigas con el fin de introducir las en la formulación matemática de simulación de la distribución del daño estructural en vigas.

Se implementaron las funciones en la herramienta numérica FREC existente, modificando algunas subrutinas del programa.

Se presentó una herramienta numérica que efectivamente permite *parametrizar el daño en forma coherente* a medida que el mismo se va reflejando en las frecuencias flexionales de vibración de la estructura.

La herramienta funciona tanto para escenarios de daño generados con ella misma como con software comercial de elementos finitos de uso generalizado.

Se ha observado una coherencia total en la evolución del parámetro de daño con la realidad física que el mismo describe. Esta coherencia no se logró con otras funciones presentadas en la literatura (Wahab et al 1999b)

Como se ha demostrado en los ejemplos las funciones “F<sub>1a</sub>” y “F<sub>2</sub>” son aproximadamente equivalentes, por lo que una de ellas resultaría redundante, pudiéndose elegir cualquiera de ambas.

Las funciones “F<sub>1a</sub>” y “F<sub>2</sub>” resultarían más adecuadas para describir daño proveniente de cargas concentradas y la función “F<sub>1b</sub>” describiría mas adecuadamente daño proveniente de cargas distribuidas

#### 4 AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece a la Universidad Nacional de Tucumán por el financiamiento con una beca de Iniciación a la Investigación para el desarrollo del Magíster en Ingeniería Estructural del cual este trabajo forma parte parcial de su desarrollo. Se agradece además el apoyo económico del CONICET y de la Universidad Nacional de Cuyo.

#### 5 REFERENCIAS

- Abdel Wahab M M, G De Roeck and B Peeters (1999-b) "Parametrization of Damage in reinforced concrete structures usin model updating" *Journal of Sound and Vibration* 228(4) Pag 717 – 730.
- Abdel Wahad M M and G De Roeck (1999-a)"Effect of excitation type on dynamic system parameters of a reinforced concrete bridge" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol 7 N°4 Pag. 387 – 400.
- Ambrosini R.D. Riera J.D., Danesi R.F. (1995) "Dynamic análisis of thin-walled an variable open section beams with shear flexibility" *International Journal of Numerical Methods on Engineering* 38(17) Pag 2867- 85
- Ambrosini R.D.(1991) tesis de Magíster "Análisis dinámico de estructuras de pared delgada y sección abierta en el dominio de la frecuencia" Instituto de Estructuras Arturo M. Guzmán, Universidad Nacional de Tucumán.
- Escobar J.A.(2004)- Sosa J.J., Gomez R. "Structural damage detection using the transformation matrix" *Computers and Structures* 83, Pag. 357–368.
- Gladwell G.M.L. y Morassi A. (1999). Estimating damage in a rod from changes in node positions. *Inverse Problems in Engineering*, vol. 7, pages 215 - 233. © OPA (Overseas Publishers Association) N.V.
- He R.S (2006) – Hwang S.F "Damage detection by an adaptive real-parameter simulated annealing genetic algorithm" *Computers and Structures* xxx, Pag. xxx–xxx.
- Ismail Z.(2006)- Abdul Razak H., Abdul Rahman A.G."Determination of damage location in RC beams using mode shape derivatives" *Engineering Structures* 28, Pag. 1566–1573.
- Jeyasehar C.A. (2006) – Sumangala K. "Damage assessment of prestressed concrete beams using artificial neural network (ANN) approach" *Computers & Structures* 84 Pag 1709-1718.
- Lee T.P.(2004)- Argoul P. "Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response" *Journal of Sound and Vibration* 277, Pag. 73–100.
- Ngwangwa H.M. (2006)- Heyns P.S., Van Tonder F."Assessment of structural damage using operational time responses and finite element simulation" *Journal of Sound and Vibration* 296, Pag. 23–45.
- Palazzo G. L. (2001) Tesis de Magister "Identificación del daño estructural a través del cambio en las propiedades dinámicas" Instituto de Estructuras Arturo M. Guzmán, Universidad Nacional de Tucumán.
- Rucka M. (2006) - Wilde K. "Application of continuous wavelet transform in vibration based damage detection method for beams and plates" *Journal of Sound and Vibration* 297, Pag. 536–550.
- Salawu O S (1997) "Detection of structural damage through changes in frequency: a review" *Engineerig Structures*, Vol 19, No 9, Pag 718 – 723.

- Yang Q.W.(2006) - Liu J.K. "A coupled method for structural damage identification" *Journal of Sound and Vibration* 296, Pag. 401–405.
- Yang Q.W.(2006) - Liu J.K. "A coupled method for structural damage identification" *Journal of Sound and Vibration* 296, Pag. 401–405.
- Zembaty Z. (2006)- Kowalski M., Pospisil S. "Dynamic identification of a reinforced concrete frame in progressive states of damage" *Engineering Structures* 28, Pag. 668–681. (paper)
- Zhu X.Q (2005), S.S. Law "Wavelet-based crack identification of bridge beam from operational deflection time history" *International Journal of Solids and Structures* 43, Pag. 2299–2317.