

## FORMULACIÓN COMPUTACIONAL DE CONDICIONES DE BORDE EN SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

Ariel E. Matusevich<sup>a</sup>, José A. Inaudi<sup>a</sup> y Julio C. Massa<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Facultad de C. E. F y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, [ariel.matusevich@gmail.com](mailto:ariel.matusevich@gmail.com), <http://www.efn.uncor.edu>

<sup>b</sup> Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800, Río Cuarto, Argentina, [jmassa@efn.uncor.edu](mailto:jmassa@efn.uncor.edu), <http://www.ing.unrc.edu.ar>

**Palabras clave:** sistemas continuos, condiciones de contorno, análisis modal.

**Resumen.** Para obtener la respuesta en vibraciones libres de un sistema continuo es necesario hallar la solución de las ecuaciones de movimiento que gobiernan el problema, junto con sus respectivas condiciones de contorno. Utilizando el método de separación de variables, es posible obtener soluciones matemáticas cerradas para las ecuaciones de movimiento de ciertos elementos simples, tales como barras, vigas o ejes con propiedades mecánicas uniformes y área seccional constante a lo largo de las mismas. Para hallar la solución en tales casos es necesario plantear un sistema de ecuaciones de condiciones de contorno, el cual puede ser expresado en forma matricial a través de lo que los autores denominan una matriz de condiciones de contorno. Una vez obtenida dicha matriz, el proceso para obtener las frecuencias naturales y modos de vibrar del sistema es directo y simple. Si bien los sistemas continuos poseen un número infinito de frecuencias naturales y modos de vibrar, un número adecuado modos puede ser utilizado para resolver problemas de vibraciones forzadas mediante la técnica de superposición modal, también conocida como análisis modal. En el presente trabajo se propone un procedimiento para el ensamble de la matriz de condiciones de contorno de estructuras continuas tridimensionales formadas por barras, vigas, ejes, masas concentradas y resortes. Este procedimiento fue implementado computacionalmente en el ambiente de programación Matlab<sup>®</sup> y forma parte de un conjunto de programas para el análisis modal de sistemas dinámicos continuos. Este software se encuentra disponible en la caja de herramientas para análisis de estructuras SAT-Lab<sup>®</sup>.

# 1 INTRODUCCIÓN

Las vibraciones de sistemas continuos, se estudian usualmente en cursos de dinámica estructural para estudiantes de ingeniería (Humar, 2002). Debido a que el método de separación de variables aplicado al análisis modal de sistemas de parámetros distribuidos, implica solucionar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema junto con un conjunto especificado de condiciones de borde, los libros de texto cubren típicamente, elementos unidimensionales y bidimensionales simples tales como barras, vigas, ejes, cables pretensados, placas y membranas.

El análisis de estructuras reales como reticulados o pórticos, se realiza generalmente discretizando la estructura por medio del método de elementos finitos (MEF). También es factible, considerar a la estructura como un sistema continuo combinando elementos con deformación axial, flexional y torsional. La formulación de las condiciones de borde en estructuras complejas no es un proceso trivial y los autores no tienen conocimiento de un procedimiento disponible para dicho fin.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. Primero, mediante un ejemplo sencillo se repasa el método de separación de variables aplicado a la dinámica de sistemas continuos. A continuación se plantean problemas más complejos, los cuales introducen contenidos importantes acerca del planteo de condiciones de borde. Posteriormente, se presenta una metodología para el planteo general de las ecuaciones de contorno y se presentan algunos ejemplos de aplicación donde se comparan resultados con las diversas técnicas disponibles. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y lineamientos para futuros desarrollos.

# 2 ANÁLISIS MODAL DE SISTEMAS CONTINUOS SIMPLES

A modo de ejemplo se presenta un modelo simplificado de un avión, mostrado en la Figura 1. Las alas del avión están representadas por dos vigas de Euler-Bernoulli de longitud  $l_w$ , sección transversal  $A$ , momento de inercia  $I$ , densidad del material  $\rho$  y módulo de elasticidad  $E$ . El fuselaje se modela como un elemento de masa concentrada  $M_f$  e inercia rotacional concentrada  $J_f$ .

En la parte de abajo de la misma [Figura 1](#) se presenta un diagrama de cuerpo libre de la estructura del avión. Los esfuerzos de corte se indican con la letra  $V$  y los momentos flectores con la letra  $M$ .

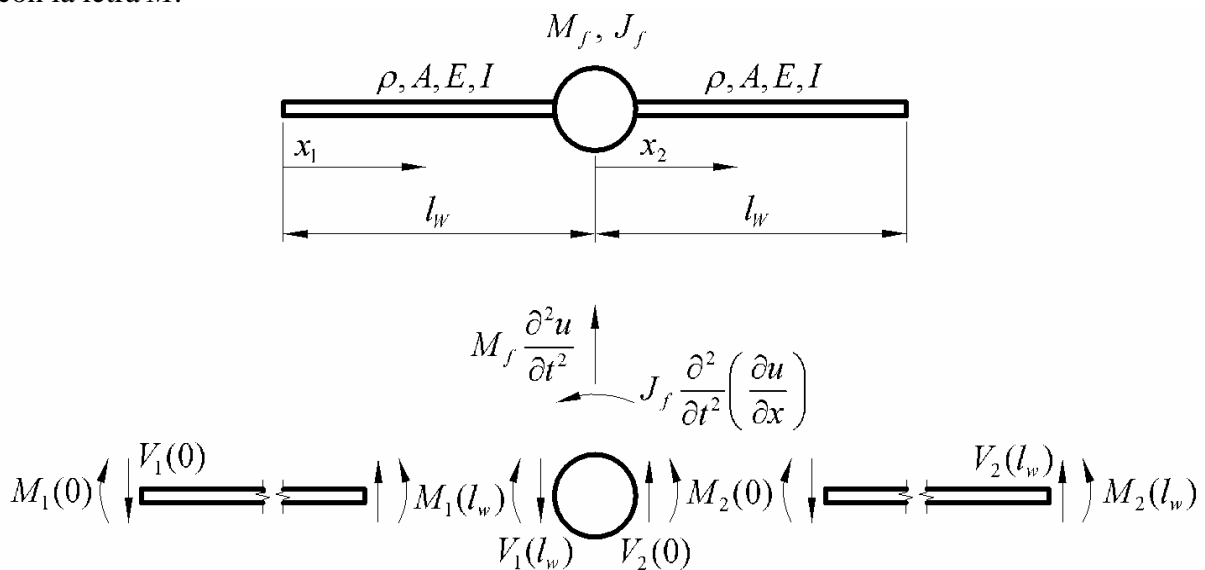


Figura 1: Modelo simplificado de una aeronave

## 2.1 Vibraciones libres

A continuación se repasa la forma obtener los modos no rígidos de vibrar de la estructura.

Las ecuaciones de movimiento del sistema están gobernadas por las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$EI \left( \frac{\partial^4 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^4} \right) + \rho A \left( \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$EI \left( \frac{\partial^4 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^4} \right) + \rho A \left( \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2)$$

Las condiciones de contorno se presentan a continuación.

Equilibrio de momentos y equilibrio de fuerzas en  $x_1 = 0$ :

$$M_1(0) = EI \left[ \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=0} = 0 \quad V_1(0) = -EI \left[ \frac{\partial^3 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^3} \right]_{x_1=0} = 0 \quad (3)$$

Equilibrio de momentos y fuerzas en  $x_2 = l_w$ :

$$-M_2(l_w) = EI \left[ \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=l_w} = 0 \quad -V_2(l_w) = -EI \left[ \frac{\partial^3 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^3} \right]_{x_2=l_w} = 0 \quad (4)$$

Finalmente, en la unión de las alas (donde se ubica la masa del fuselaje), se requieren cuatro condiciones de contorno.

a) Equilibrio de momentos:

$$-M_1(l_w) + M_2(0) = J_f \ddot{\theta}$$

$$-EI \left[ \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=l_w} + EI \left[ \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=0} = J_f \left[ \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1=l_w} = J_f \left[ \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right) \right]_{x_2=0} \quad (5)$$

b) Equilibrio de fuerzas:

$$-V_1(l_w) + V_2(0) = M_f \ddot{u}$$

$$EI \left[ \frac{\partial^3 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^3} \right]_{x_1=l_w} - EI \left[ \frac{\partial^3 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^3} \right]_{x_2=0} = M_f \left[ \frac{\partial x_1^2(x_1, t)}{\partial t^2} \right]_{x_1=l_w} = M_f \left[ \frac{\partial x_2^2(x_2, t)}{\partial t^2} \right]_{x_2=0} \quad (6)$$

c) Compatibilidad de desplazamientos:

$$u_1(x_1, t)_{x_1=l_w} = u_2(x_2, t)_{x_2=0} \quad (7)$$

d) Compatibilidad de rotaciones:

$$\left[ \frac{\partial u_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=l_w} = \left[ \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]_{x_2=0} \quad (8)$$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento junto con las condiciones de contorno prescritas, constituyen lo que se denomina un problema de valores de frontera.

Las ecuaciones de movimiento pueden resolverse mediante el método de separación de variables, proponiendo:

$$u_1(x_1, t) = \psi_1(x) q(t) \quad u_2(x_2, t) = \psi_2(x) q(t) \quad (9)$$

Introduciendo las expresiones (9) en las ecuaciones de movimiento (1) y (2), se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias para  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  y  $q(t)$  cuyas soluciones tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi_1(x_1) &= C_1 \sin(a_1 x_1) + C_2 \cos(a_1 x_1) + C_3 \sinh(a_1 x_1) + C_4 \cosh(a_1 x_1) \\ \psi_2(x_2) &= C_5 \sin(a_2 x_2) + C_6 \cos(a_2 x_2) + C_7 \sinh(a_2 x_2) + C_8 \cosh(a_2 x_2) \\ q(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (10)$$

donde:  $a_1 = a_2 = [(\rho A)/(EI)]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega}$

Las constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$  y  $C_8$  de (10) deben ser evaluadas para satisfacer las condiciones de contorno del problema.

Adoptando las notaciones prima y punto para indicar derivadas parciales respecto de  $x$  y de  $t$  respectivamente, escribimos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \psi(x) q(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \psi'(x) q(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \psi(x) \ddot{q}(t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \psi'(x) \ddot{q}(t)\end{aligned}\quad (11)$$

Usando las expresiones (11), describimos las ecuaciones de condiciones de contorno. Las condiciones de contorno (3) conducen a:

$$\begin{aligned}EI \left[ \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=0} &= 0 & EI \psi_1''(0) &= 0 \\ -EI \left[ \frac{\partial^3 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^3} \right]_{x_1=0} &= 0 & EI \psi_1'''(0) &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

De una manera similar la expresión (4) lleva a:

$$\begin{aligned}-EI \left[ \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=l_w} &= 0 & EI \psi_2''(l_w) &= 0 \\ EI \left[ \frac{\partial^3 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^3} \right]_{x_2=0} &= 0 & EI \psi_2'''(0) &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

Separando variables en la ecuación (5) teniendo en cuenta que  $\ddot{q}(t)/q(t) = -\omega^2$ , se tiene:

$$\begin{aligned}-EI \left[ \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=l_w} + EI \left[ \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=0} &= I_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_1(x_2, t)}{\partial x_2} \right) \right]_{x_2=0} \\ -EI \psi_1''(l) q(t) + EI \psi_2''(0) q(t) &= J_f \psi_2'(0) \ddot{q}(t) \\ -EI \psi_1''(l_w) + EI \psi_2''(0) &= -\omega^2 I_0 \psi_2'(0)\end{aligned}\quad (14)$$

Operando de manera idéntica en la ecuación (6)

$$\begin{aligned}EI \left[ \frac{\partial^3 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^3} \right]_{x_1=l_w} - EI \left[ \frac{\partial^3 u_2(x_2, t)}{\partial x_2^3} \right]_{x_2=0} &= M_f \left[ \frac{\partial x_2^2(x_2, t)}{\partial t^2} \right]_{x_2=0} \\ EI \psi_1'''(l_w) - EI \psi_2'''(0) &= -\omega^2 M \psi_2(0)\end{aligned}\quad (15)$$

La ecuación (7) requiere que:

$$u_1(l_w, t) = u_2(0, t) \quad \psi_1(l_w) = \psi_2(0) \quad (16)$$

Finalmente, la expresión (8) impone:

$$u_1'(l_w, t) = u_2'(0, t) \quad \psi_1'(l_w) = \psi_2'(0) \quad (17)$$

Introduciendo las expresiones (10) y sus derivadas parciales en las ecuaciones (12), (13), (14), (15), (16) y (17), y escribiendo las ecuaciones resultantes en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 & -H_2 & H_3 & -H_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \\ -Ela_1^2 D_1 & -Ela_1^2 D_2 & Ela_1^2 D_3 & Ela_1^2 D_4 & \omega^2 J_f a_2 & -Ela_2^2 & \omega^2 J_f a_2 & Ela_2^2 \\ -Ela_1^3 D_2 & Ela_1^3 D_1 & Ela_1^3 D_4 & Ela_1^3 D_3 & Ela_2^3 & \omega^2 M_f & -Ela_2^3 & \omega^2 M_f \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ a_1 D_2 & -a_1 D_1 & a_1 D_4 & a_1 D_3 & -a_2 & 0 & -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

donde

$$\begin{aligned} D_1 &= \sin(a_1 l_w); & D_2 &= \cos(a_1 l_w); & D_3 &= \sinh(a_1 l_w); & D_4 &= \cosh(a_1 l_w) \\ H_1 &= \sin(a_2 l_w); & H_2 &= \cos(a_2 l_w); & H_3 &= \sinh(a_2 l_w); & H_4 &= \cosh(a_2 l_w) \end{aligned} \quad (19)$$

Denominaremos a la matriz cuadrada en la expresión (18), matriz de condiciones de contorno  $\mathbf{B}_c$  de la estructura. Notar que los elementos de  $\mathbf{B}_c$  dependen de  $a_1$  y  $a_2$  y por lo tanto de la frecuencia  $\omega$  que se debe encontrar como parte de la solución. La existencia de una solución no trivial para la ecuación (18), requiere que  $\mathbf{B}_c$  sea singular, por lo tanto:

$$\det[\mathbf{B}_c(\omega)] = 0 \quad (20)$$

La ecuación (20) posee un número infinito de raíces y puede resolverse mediante métodos numéricos. Cada solución corresponde a una frecuencia natural del sistema continuo.

Las funciones modales,  $\psi_1(x)$  y  $\psi_2(x)$  representan los modos de vibración de la estructura y se obtienen calculando los coeficientes no nulos  $C_i$  que satisfacen la ecuación lineal homogénea para cada frecuencia natural.

$$\mathbf{B}_c \big|_{\omega_i} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Como ilustra este simple ejemplo, el análisis en vibraciones libres de un sistema continuo se reduce a la definición de formas modales y al ensamble de una matriz de condiciones de contorno a partir de dichas funciones. Cada condición de contorno define una fila en  $\mathbf{B}_c$ , cuyos coeficientes dependen de la forma modal, sus derivadas y los parámetros de masa y rigidez definidos en el contorno.

Resulta evidente la necesidad de una implementación computacional, ya que aún en el caso de una estructura simple de dos elementos, el cálculo resulta muy costoso de realizar en forma manual (Matusevich e Inaudi, 2005).

## 2.2 Vibraciones forzadas

Los modos de vibración pueden utilizarse para resolver problemas de vibraciones forzadas, mediante el método de descomposición modal. En este método se transforman las coordenadas de desplazamiento a coordenadas normales o modales y la respuesta  $u(x,t)$  se expresa como superposición de las formas modales  $\phi_n(x)$  multiplicadas por coordenadas generalizadas  $q_n(t)$  dependientes del tiempo.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (22)$$

Aunque un sistema continuo posee un número infinito de formas modales, se puede alcanzar una precisión aceptable eligiendo un número limitado de modos asociados a las frecuencias naturales más bajas.

Se puede demostrar (Humar, 2002) que las relaciones de ortogonalidad en sistemas continuos conducen a una serie de ecuaciones de movimiento desacopladas para cada coordenada modal, del tipo:

$$M_n \ddot{q}(t) + \omega^2 M_n q(t) = P_n(t) \quad (23)$$

donde  $M_n$  y  $P_n(t)$ , son respectivamente la masa generalizada y la carga generalizada asociadas al modo  $\phi_n(x)$ :

$$M_n = \int_0^l [\phi_n(x)]^2 \rho(x) A(x) dx \quad P_n(t) = \int_0^l \phi_n(x) p(x,t) dx \quad (24)$$

Las expresiones (23) son válidas para el análisis de vibraciones longitudinales o transversales de una estructura de un solo miembro, de longitud  $l$ , área transversal  $A(x)$  y densidad másica  $\rho(x)$ . En modelos estructurales de varios elementos que incluyen deformaciones axiales, flexionales y torsionales, este cálculo requiere de un proceso de ensamble para cada elemento de la estructura (Matusevich, 2002).

## 3 ESTRUCTURAS MAS COMPLEJAS

En esta sección se plantean problemas algo más complejos, reticulados y pórticos, los cuales introducen conceptos importantes acerca del planteo de condiciones de borde. Se presentan dos ejemplos que permiten ilustrar la metodología propuesta en este trabajo.

### 3.1 Elementos conectados en diferentes direcciones

Como primer ejemplo se presenta el sistema de dos barras de la Figura 2, donde uno de los elementos está ubicado a un ángulo  $\alpha$  respecto al eje  $X_g$ . Cada barra tiene propiedades uniformes, como se indica, pero las mismas pueden variar de un elemento a otro.

Al tratarse de barras de propiedades uniformes en deformación axial, la aplicación del método de separación de variables conduce a las siguientes soluciones para las formas modales de cada elemento:

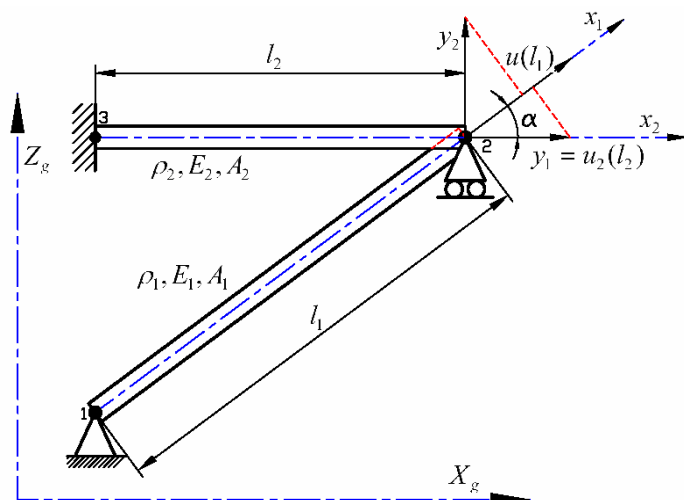


Figura 2: Elementos conectados en diferentes conexiones

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) &= C_1 \sin(\beta_1 x_1) + C_2 \cos(\beta_1 x_1) \\ \phi_2(x_2) &= C_3 \sin(\beta_2 x_2) + C_4 \cos(\beta_2 x_2)\end{aligned}\quad \text{donde: } \beta_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \omega \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \omega \quad (25)$$

Una mirada rápida a este problema, nos induce a pensar que se necesitan cuatro condiciones de contorno para evaluar los coeficientes de participación modal  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ . Esta suposición no es correcta ya que los desplazamientos  $y_1$  e  $y_2$  del nudo 2 también representan incógnitas del problema. Por lo tanto, se requieren dos condiciones de contorno adicionales.

A continuación se analizan las condiciones de contorno del problema.

Ambos desplazamientos en el nudo 1 están restringidos, por lo tanto:

$$\begin{cases} u_1(0, t) \cos(\alpha) = 0 \\ u_1(0, t) \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1(0, t) = 0 \Rightarrow \phi_1(0) = 0 \quad (26)$$

Lo mismo sucede con el nudo 3, entonces:

$$u_2(0, t) = 0 \Rightarrow \phi_2(0) = 0 \quad (27)$$

El nudo 2 está libre para desplazarse en las direcciones  $X_g$  e  $Y_g$  por lo tanto se deben escribir ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de compatibilidad de desplazamientos.

Equilibrio de fuerzas en dirección  $X_g$ :

$$-N_1(l_1, t) \cos(\alpha) - N_2(l_2, t) = 0 \quad -A_1 E_1 \phi_1'(l_1) \cos(\alpha) - A_2 E_2 \phi_2'(l_2) = 0 \quad (28)$$

Equilibrio de fuerzas en dirección  $Z_g$ :

$$-N_1(l_1, t) \sin(\alpha) = 0 \quad -A_1 E_1 \phi_1'(l_1) \sin(\alpha) = 0 \quad (29)$$

Usando la expresión (62) del Apéndice, podemos escribir las ecuaciones (28) y (29) en forma vectorial:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad [\mathbf{L}_v]_1^T [(S_x)_1(l_1)] + [\mathbf{L}_v]_2^T [(S_x)_2(l_2)] = 0 \quad (30)$$

donde:

$$[\mathbf{L}_v]_1^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{L}_v]_2^T = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} (S_x)_1(l_1) &= N_1(l_1) = -A_1 E_1 \phi_1'(l_1) \\ (S_x)_2(l_2) &= N_2(l_2) = -A_2 E_2 \phi_2'(l_2) \end{aligned} \quad (31)$$

Las siguientes relaciones de compatibilidad son ciertas:

$$\begin{aligned} u_1(l_1, t) &= y_1 \cos(\alpha) + y_2 \sin(\alpha) & u_2(l_2, t) &= y_1 \\ \phi_1(l_1) &= y_1 \cos(\alpha) + y_2 \sin(\alpha) & \phi_2(l_2) &= y_1 \end{aligned} \quad (32)$$

Usando la expresión (60) del apéndice, podemos escribir las ecuaciones de compatibilidad (32) en forma vectorial.

$$u_1(l_1, t) = \phi_1(l_1) = [\mathbf{L}_v]_1 \mathbf{y} \quad u_2(l_2, t) = \phi_2(l_2) = [\mathbf{L}_v]_2 \mathbf{y} \quad (33)$$

donde:

$$[\mathbf{L}_v]_1 = [\cos(\alpha) \quad \sin(\alpha)]; \quad [\mathbf{L}_v]_2 = [\cos(0) \quad \sin(0)]; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Sustituyendo las ecuaciones (25), y sus derivadas parciales en las expresiones (26) (27) (30) y (33), llegamos a una ecuación matricial del tipo  $\mathbf{B}_c \mathbf{C} = \mathbf{0}$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -A_1 E_1 D_2 \cos(\alpha) & A_1 E_1 D_1 \cos(\alpha) & -A_2 E_2 H_2 & A_2 E_2 H_1 & 0 & 0 \\ -A_1 E_1 D_2 \sin(\alpha) & A_1 E_1 D_1 \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_2 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & H_1 & H_2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

donde:

$$D_1 = \sin(\beta_1 l_1); \quad D_2 = \cos(\beta_1 l_1); \quad H_1 = \sin(\beta_2 l_2); \quad H_2 = \cos(\beta_2 l_2) \quad (36)$$

De este ejemplo se extrae una importante conclusión: cuando dos o más elementos están conectados en direcciones diferentes, los desplazamientos nodales son también incógnitas del problema.

### 3.2 Modelado de pórticos

Como se mencionó anteriormente, existen soluciones matemáticas exactas para las ecuaciones de movimiento de elementos continuos simples de sección constante y propiedades de material uniformes. Algunas soluciones útiles se resumen en la siguiente tabla:

Elemento	Tipo de vibración	Función de forma modal	
barra	Axial	$\phi(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$	$\beta = \sqrt{(\rho/E)} \omega$
eje	Torsional	$\gamma(x) = C_1 \sin(\eta x) + C_2 \cos(\eta x)$	$\eta = \sqrt{(\rho/G)} \omega$
viga Bernoulli	Transversal	$\psi(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 \sinh(ax) + C_4 \cosh(ax)$	$a = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \omega$

Tabla 1: Funciones de forma de elementos continuos simples

Los elementos de la Tabla 1 pueden combinarse para construir modelos estructurales tridimensionales relativamente complejos, por ejemplo el pórtico de la Figura 3:

Cada elemento (viga) del pórtico está sometido a deformación flexional, axial y torsional y se puede modelar usando los elementos de la Tabla 1. Este enfoque requiere el cálculo de funciones de forma para cada tipo de deformación. Por ejemplo, el miembro que conecta los nudos 2 y 3 requiere funciones de forma que corresponden a, vibración axial, vibración torsional, vibración flexional en el plano XY y vibración flexional en el plano XZ.

Estas funciones deben satisfacer las condiciones de contorno del problema. Por ejemplo, para el nudo 2 de la estructura se debe plantear, equilibrio de fuerzas, equilibrio de momentos, compatibilidad de desplazamientos nodales y compatibilidad de rotaciones nodales. La especificación (o planteo) de las condiciones de contorno en todos los nudos de la estructura conduce al ensamble de la matriz de condiciones de contorno  $\mathbf{B}_e$ .

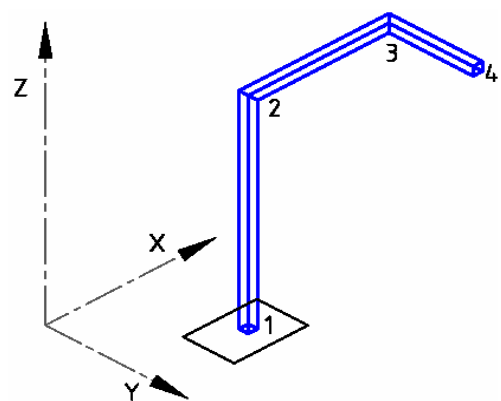


Figura 3: Pórtico espacial



## 4 FORMULACIÓN GENERAL DE LAS CONDICIONES DE BORDE

En esta sección se presenta una metodología para plantear las condiciones de borde (que constituyen las filas de la matriz  $\mathbf{B}_c$ ) de una estructura continua.

Se consideran estructuras en las cuales los desplazamientos están restringidos, o bien son considerados grados de libertad, es decir, estructuras con soportes estructurales ideales que restringen ciertos desplazamientos nodales.

La especificación de las condiciones cinemáticas de los desplazamientos nodales de la estructura, determina el número correcto de condiciones de borde. El tipo de ecuación a plantear depende de las condiciones cinemáticas de los desplazamientos del nudo considerado y de los tipos de elementos conectados.

La notación de esta sección y algunos conceptos de cinemática se detallan en el apéndice.

### 4.1 Consideraciones preliminares

#### a) Número de incógnitas

Los coeficientes  $C_i$  que determinan las formas modales de los elementos de la estructura, son incógnitas del problema de valores propios para sistemas continuos.

Como se vio en la sección 3.1, cuando los elementos están conectados en diferentes direcciones, los desplazamientos nodales también son incógnitas del problema. Para que el planteo sea lo mas general posible, los desplazamientos nodales siempre se consideran como incógnitas en esta formulación.

#### b) Metodología

Se plantean ecuaciones de contorno en cada nudo de la estructura. Estas ecuaciones dependen básicamente de las condiciones cinemáticas de las rotaciones y desplazamientos del nudo considerado, como veremos a continuación.

### 4.2 Análisis de las condiciones cinemáticas de los desplazamientos nodales.

Se lleva a cabo este análisis cuando están presentes deformaciones axiales y transversales, es decir, cuando hay elementos viga o elementos barra conectada al nudo. Se pueden presentar dos casos:

#### a) Todos los desplazamientos están restringidos:

Si  $n$  es el número de elementos conectados al nudo, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$u_1(0 | l_1) = 0; \quad u_2(0 | l_2) = 0; \quad \dots \quad u_n(0 | l_n) = 0 \quad (37)$$

donde  $u_i(0 | l_i)$  representa el desplazamiento del elemento  $i$  evaluado en  $x = 0$  ó  $x = l_i$ , dependiendo de qué extremo del elemento corresponde al nudo considerado.

#### b) Existen desplazamientos nodales libres:

En esta situación, debemos plantear ecuaciones de equilibrio de fuerzas y ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos:

#### *Compatibilidad de desplazamientos:*

Teniendo en cuenta la ecuación (60) del apéndice, para los elementos que concurren al nudo se debe cumplir:

$$u_1(0 | l_1) = [\mathbf{L}_v]_1 \mathbf{y}; \quad u_2(0 | l_2) = [\mathbf{L}_v]_2 \mathbf{y} \quad \dots \quad u_n(0 | l_n) = [\mathbf{L}_v]_n \mathbf{y} \quad (38)$$

### ***Equilibrio de Fuerzas***

Haciendo uso de la ecuación (62) del apéndice, planteamos ecuaciones de equilibrio según las direcciones de los grados de libertad:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_v]_i^T [S_i(0 | l_i)] = 0 \quad (39)$$

donde  $S_i$  puede ser un esfuerzo normal o de corte, dependiendo del elemento considerado.

### **4.3 Análisis de las condiciones cinemáticas de las rotaciones nodales.**

Se lleva a cabo este análisis cuando están presentes deformaciones rotacionales, es decir, cuando hay elementos viga y/o elementos eje conectadas al nudo. Se pueden presentar dos casos:

#### **a) Todas las rotaciones están restringidas:**

Si  $n$  es el número de elementos conectados al nudo, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\theta_1(0 | l_1) = 0; \quad \theta_2(0 | l_2) = 0; \quad \dots \quad \theta_n(0 | l_n) = 0 \quad (40)$$

#### **b) Existen desplazamientos nodales libres:**

En esta situación, debemos plantear ecuaciones de equilibrio de momentos y ecuaciones de compatibilidad de rotaciones:

#### ***Compatibilidad de rotaciones:***

Teniendo en cuenta la ecuación (61) del apéndice, para los elementos que concurren al nudo se debe cumplir:

$$\theta_1(0 | l_1) = [\mathbf{L}_v]_1 \mathbf{y}_\theta; \quad \theta_2(0 | l_2) = [\mathbf{L}_v]_2 \mathbf{y}_\theta; \quad \dots \quad \theta_n(0 | l_n) = [\mathbf{L}_v]_n \mathbf{y}_\theta \quad (41)$$

#### ***Equilibrio de momentos:***

Haciendo uso de la ecuación (62) del apéndice, planteamos ecuaciones de equilibrio según las direcciones de los grados de libertad:

$$(\mathbf{F}_\theta)_1 + (\mathbf{F}_\theta)_2 + \dots + (\mathbf{F}_\theta)_n = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_\theta)_i = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_v]_i^T [(S_\theta)_i(0 | l_i)] = 0 \quad (42)$$

donde  $(S_\theta)_i$  puede ser un momento flector o un momento torsor, dependiendo del elemento considerado.

### **4.4 Condiciones de contorno no homogéneas.**

Si existen masas concentradas y/o apoyos elásticos en algunos nudos de la estructura, las ecuaciones de equilibrio de momentos y equilibrio de fuerzas, dejan de ser homogéneas. El resto de las ecuaciones de contorno, no se modifican.

#### **a) Ecuaciones de equilibrio de fuerzas, no homogéneas**

Mediante un ejemplo, ilustraremos la manera de tratar ecuaciones de equilibrio no homogéneas. Consideraremos el reticulado de 7 barras de la [Figura 4](#), el cual tiene una masa

concentrada  $M$  en el nudo 3. En este problema, las ecuaciones de equilibrio del nudo 3 resultan ser no homogéneas, por lo tanto analizaremos el conjunto de condiciones de borde a plantear en dicho nudo. Como muestra la [Figura 4](#) los grados de libertad del nudo se identifican como  $y_3$  e  $y_4$ .

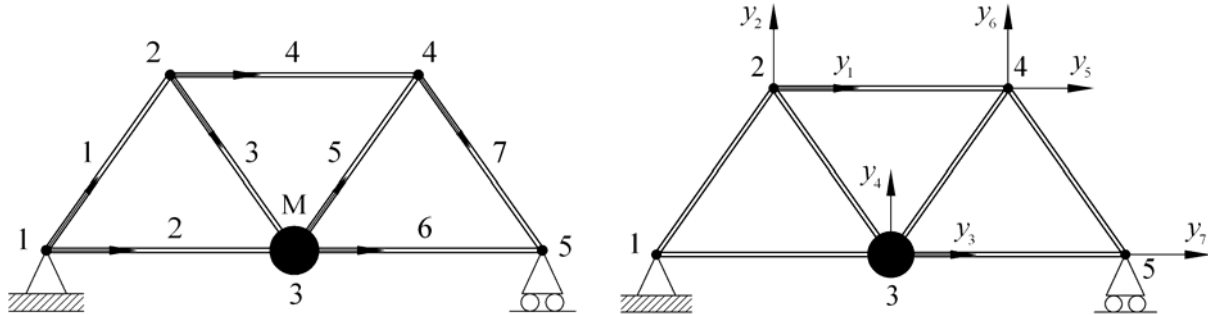


Figura 4: Estructura de barras con una masa concentrada

Escribimos las siguientes ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} u_2(l_2, t) &= [\mathbf{L}_v]_2 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} & u_3(l_3, t) &= [\mathbf{L}_v]_3 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \\ u_5(0, t) &= [\mathbf{L}_v]_5 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} & u_6(0, t) &= [\mathbf{L}_v]_6 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{L}_v]_2^T \{ [S_x]_2(l_2, t) \} + [\mathbf{L}_v]_3^T \{ [S_x]_3(l_3, t) \} + \\ &+ [\mathbf{L}_v]_5^T \{ [S_x]_5(0, t) \} + [\mathbf{L}_v]_6^T \{ [S_x]_6(0, t) \} = \begin{bmatrix} M \ddot{y}_3 \\ M \ddot{y}_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

Para obtener las aceleraciones de la ecuación (44), debemos conocer los desplazamientos incógnita  $y_3(x, t)$  e  $y_4(x, t)$ . Para ello utilizaremos dos de las ecuaciones de compatibilidad que sean linealmente independientes. Esta condición se satisface eligiendo dos elementos cuyos vectores de transformación cinemática  $\mathbf{L}_v$  sean independientes.

Claramente la única combinación de elementos que no cumple esta condición es la que corresponde a los elementos 2 y 6. Nosotros elegiremos por ejemplo a las ecuaciones correspondientes a los elementos 2 y 5.

$$u_2(l_2, t) = [\mathbf{L}_v]_2 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad u_5(0, t) = [\mathbf{L}_v]_5 \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos  $y_3$  e  $y_4$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_v]_2 \\ [\mathbf{L}_v]_5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_3(x, t) \\ y_4(x, t) \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} u_2(l_2, t) \\ u_5(0, t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

donde  $\mathbf{R}$  es la matriz cuyas filas contienen a los vectores de transformación cinemática  $\mathbf{L}_v$  de los elementos seleccionados.

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación (44), se llega a las siguientes ecuaciones de equilibrio de fuerzas:

$$[\mathbf{L}_v]_2^T \{[S_x]_2(l_2)\} + [\mathbf{L}_v]_3^T \{[S_x]_3(l_3)\} + \\ + [\mathbf{L}_v]_5^T \{[S_x]_5(0)\} + [\mathbf{L}_v]_6^T \{[S_x]_6(0)\} = -M\omega^2 [\mathbf{R}]^{-1} \begin{bmatrix} u_2(l_2) \\ u_5(0) \end{bmatrix} \quad (47)$$

Supongamos ahora, que también existe un apoyo elástico de rigidez  $k_{y_4}$  ubicado en la dirección del grado de libertad  $y_4$ . En ese caso, se debería agregar en el lado derecho de la ecuación de equilibrio de fuerzas según el grado de libertad  $y_4$  el término  $(k_{y_4} y_4)$ , que corresponde a la fuerza de reacción del resorte según el grado de libertad considerado. La ecuación (47) quedaría de la siguiente manera:

$$[\mathbf{L}_v]_2^T \{[S_x]_2(l_2)\} + [\mathbf{L}_v]_3^T \{[S_x]_3(l_3)\} + [\mathbf{L}_v]_5^T \{[S_x]_5(0)\} + \\ + [\mathbf{L}_v]_6^T \{[S_x]_6(0)\} = -M\omega^2 [\mathbf{R}]^{-1} \begin{bmatrix} u_2(l_2) \\ u_5(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{y_4} \end{bmatrix} [\mathbf{R}]^{-1} \begin{bmatrix} u_2(l_2) \\ u_5(0) \end{bmatrix} \quad (48)$$

La generalización de este ejemplo, nos permite proponer un procedimiento para formular las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en presencia de masas concentradas y resortes:

1. Identificar los nudos con masas concentradas y/o apoyos elásticos.
2. Reconocer los  $t$  grados de libertad de traslación del nudo considerado, donde  $t$  puede tomar los valores 1, 2 ó 3.
3. Elegir  $t$  elementos que concurren al nudo cuyos vectores de transformación cinemática  $\mathbf{L}_v$  sean linealmente independientes.
4. Formar la matriz  $\mathbf{R}$  cuyas filas son los vectores  $\mathbf{L}_v$  de los elementos seleccionados y calcular su inversa.
5. Calcular el vector  $\mathbf{u}$  que contiene los desplazamientos de los elementos elegidos en el nudo considerado.
6. En el caso de tener una masa concentrada el nudo considerado plantear la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_v]_i^T [S_i(0 | l_i)] + M\omega^2 [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{u} = 0 \quad (49)$$

7. En el caso de tener apoyos elásticos según  $i$  grados de libertad del nudo considerado, formar una matriz  $\mathbf{k}_y$  de dimensión  $t \times t$ , que contenga en su diagonal principal, a las rigideces de los apoyos elásticos  $k_{y_i}$  de cada grado de libertad y demás elementos nulos. Luego plantear la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_v]_i^T [S_i(0 | l_i)] - \mathbf{k}_y [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{u} = 0 \quad (50)$$

8. En el caso de presentarse una masa y un apoyo elástico en el nudo considerado se debe plantear la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_v]_i^T [S_i(0 | l_i)] + M\omega^2 [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{k}_y [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{u} = 0 \quad (51)$$

## b) Ecuaciones de equilibrio de momentos, no homogéneas

La metodología presentada para masas concentradas, también es válida para el caso de inercias rotacionales concentradas y/o apoyos elásticos rotacionales. En este caso, las ecuaciones de equilibrio de momentos resultan ser no homogéneas. Repetimos a continuación el procedimiento descrito anteriormente:

1. Identificar los nudos con inercias rotacionales concentradas.
2. Reconocer los  $b$  grados de libertad de rotación del nudo considerado, donde  $b$  puede tomar los valores 1, 2 ó 3.
3. Elegir  $b$  elementos que concurren al nudo cuyos vectores de transformación cinemática  $\mathbf{L}_{v\theta}$  sean linealmente independientes.
4. Formar la matriz  $\mathbf{R}$  cuyas filas son los vectores  $\mathbf{L}_{v\theta}$  de los elementos seleccionados y calcular su inversa.
5. Calcular el vector  $\boldsymbol{\theta}$  que contiene las rotaciones de los elementos elegidos en el nudo considerado.
6. Plantear la siguiente ecuación de equilibrio de momentos:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_{v\theta}]_i^T [(S_\theta)_i (0 | l_i)] + I_0 \omega^2 \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (52)$$

donde  $I_0$  es una matriz diagonal de dimensión  $b \times b$ , que contiene los valores de las inercias rotacionales concentradas en la direcciones de los grados de libertad del nudo considerado.

7. En el caso de tener apoyos elásticos rotacionales según  $i$  grados de libertad de rotación del nudo considerado, formar una matriz  $\mathbf{k}_\theta$  de dimensión  $b \times b$ , que contenga en su diagonal principal, a las rigideces de los apoyos elásticos  $k_{\theta i}$  de cada grado de libertad y demás elementos nulos. Luego plantear la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_{v\theta}]_i^T [(S_\theta)_i (0 | l_i)] - \mathbf{k}_\theta \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (53)$$

8. En el caso de presentarse una inercia rotacional concentrada y un apoyo elástico rotacional en el nudo considerado se debe plantear la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{L}_{v\theta}]_i^T [(S_\theta)_i (0 | l_i)] + I_0 \omega^2 \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{k}_\theta \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\theta} = 0 = 0 \quad (54)$$

## 5 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### 5.1 Viga con carga

Se considera una viga continua sometida a una carga concentrada en el medio del vano, como se describe en la [Figura 5](#):

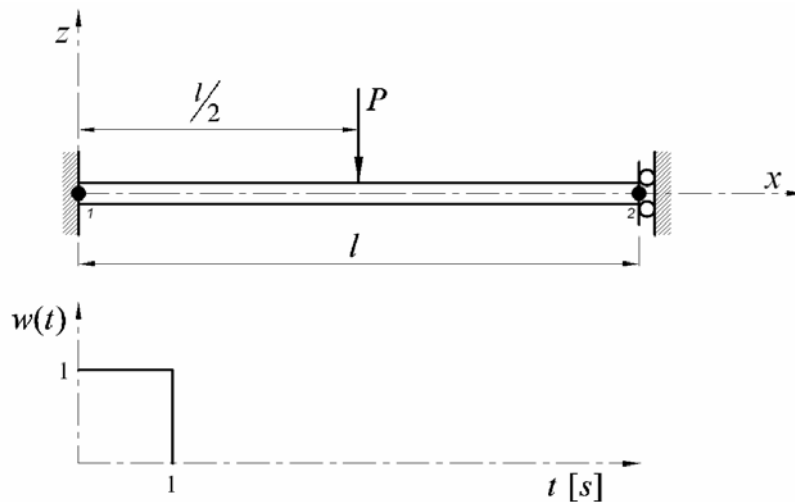


Figura 5: Viga continua con carga concentrada en el medio del vano

Los datos del ejemplo se muestran en la Tabla 2

Módulo de Young ( $E$ )	$2 \times 10^{11}$ [Pa]
Área de la sección transversal ( $A$ )	0.01 [m <sup>2</sup> ]
Densidad del material ( $\rho$ )	7800 [Kg/m <sup>3</sup> ]
Momento de inercia de la sección ( $I_y$ )	$8.3333 \times 10^{-6}$ [m <sup>4</sup> ]
Longitud de la viga ( $l$ )	6 [m]
Intensidad del pulso P	40 [N]
Duración del pulso	1 [s]

Tabla 2: Propiedades de la viga y características de la carga

En una primera instancia, para obtener una aproximación de la respuesta dinámica de la viga mediante el método de superposición modal, calculamos las cuatro primeras frecuencias naturales y modos de vibrar de la estructura. Usando las herramientas de SAT-Lab (<http://www.sat-lab.com>) se obtienen los siguientes resultados

Las primeras cuatro frecuencias naturales calculadas son:

$$\omega_i = \begin{bmatrix} 22.71 \\ 122.73 \\ 303.07 \\ 563.56 \end{bmatrix} \text{ [rad/s]}$$

Se obtuvieron las siguientes funciones de forma modal:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \sin(ax) - 1.0178 \cos(ax) - \sinh(ax) + 1.0178 \cosh(ax) & a &= 0.3942 \\ \phi_2(x) &= \sin(bx) - \cos(bx) - \sinh(bx) + \cosh(bx) & b &= 0.9163 \\ \phi_3(x) &= \sin(cx) - \cos(cx) - \sinh(cx) + \cosh(cx) & c &= 1.4399 \\ \phi_4(x) &= \sin(hx) - \cos(hx) - \sinh(hx) + \cosh(hx) & h &= 1.9635 \end{aligned}$$

Un gráfico de estas funciones se muestra en la [Figura 6](#):

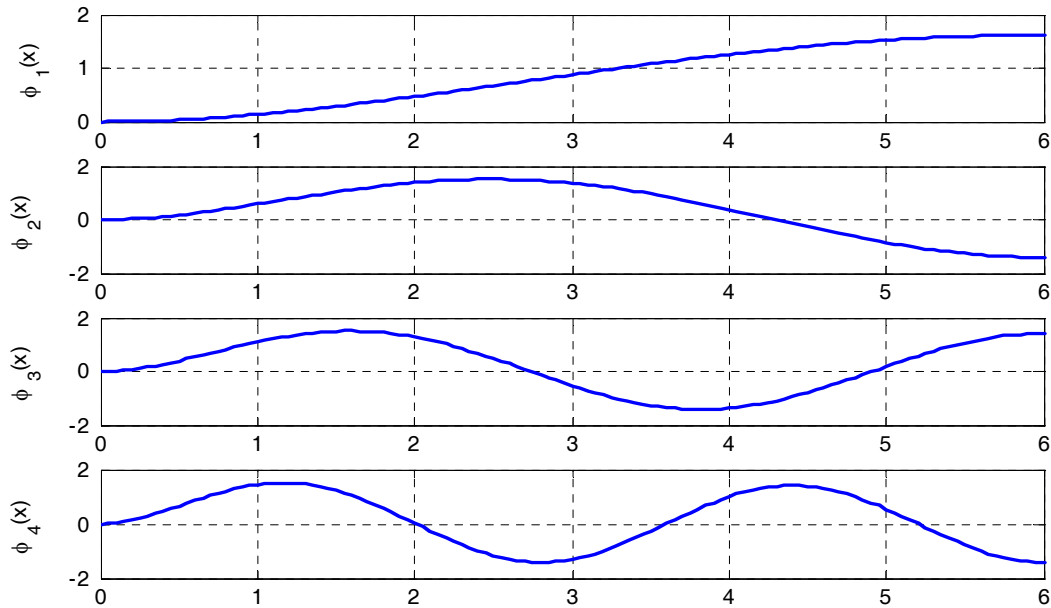


Figura 6: Primeros cuatro modos de vibrar de la viga

La utilización de coordenadas modales involucra un conjunto de ecuaciones de movimiento desacopladas de un grado de libertad para cada coordenada modal:

$$\mathbf{M}_q \ddot{q}(t) + \mathbf{K}_q q(t) = \mathbf{L}_{q_w} w(t); \quad \mathbf{K}_q = \mathbf{M}_q \mathbf{\Omega}^2$$

donde  $\mathbf{M}_q$  es la matriz de modal,  $\mathbf{K}_q$  es la matriz de rigidez modal,  $\mathbf{L}_{q_w}$  es el vector de influencia de carga,  $w(t)$  es la excitación y  $\mathbf{\Omega}$  es la matriz que contiene en su diagonal a las frecuencias naturales calculadas.

Usando las herramientas disponibles en SAT-Lab, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\mathbf{M}_q = \begin{bmatrix} 484.82 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 468.0314 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 468.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 468 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0705 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4299 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4863 \end{bmatrix} \times 10^8$$

$$\mathbf{L}_{q_w} = \begin{bmatrix} -35.1401 \\ -54.8340 \\ 21.1156 \\ 52.1519 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de movimiento se resolvieron numéricamente mediante el Método de Newmark ([Newmark, 1959](#)) implementado en SAT-Lab.

Luego, estas soluciones se superpusieron para obtener la respuesta total. Un gráfico de la estructura deformada desde  $t=0$  hasta  $t=0.26$ , a intervalos de 0.02 segundos, se muestra la [Figura 7](#). La respuesta también puede visualizarse como una película usando funciones disponibles en la caja de herramientas.

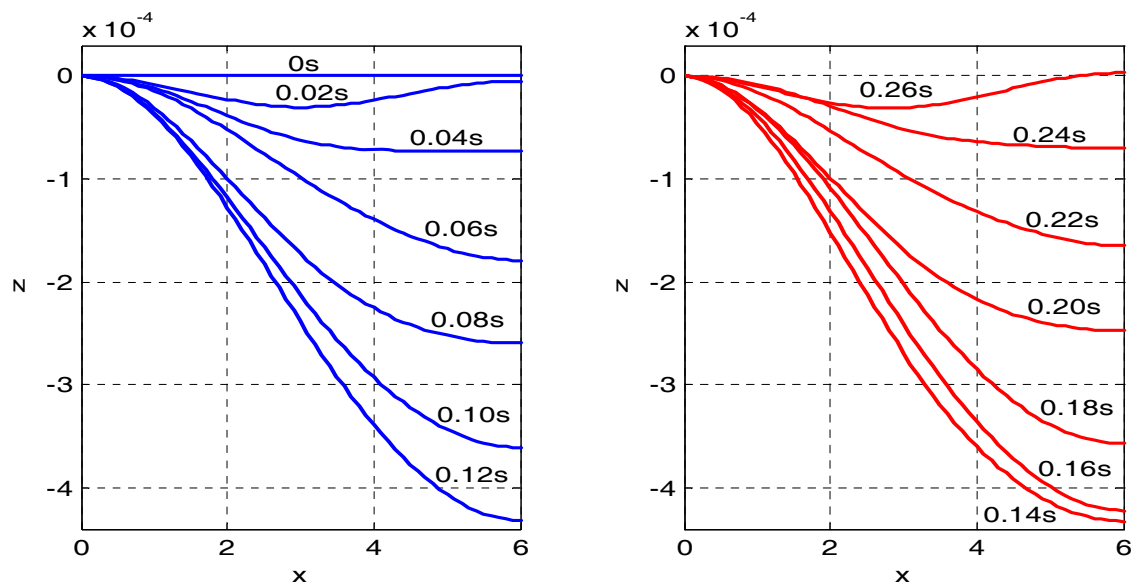


Figura 7: Configuración deformada de la viga

## 5.2 Pórtico tridimensional

En la [Figura 8](#) se muestra un pórtico tridimensional sometido a un impulso rectangular  $F(t)$  aplicado en el nudo (4). Las propiedades del pórtico y las características de la carga se definen en la [Tabla 3](#).

Módulo de Young ( $E$ )	$7.355 \times 10^{10}$ [Pa]
Área de la sección transversal ( $A$ )	$0.0314$ [m <sup>2</sup> ]
Densidad del material ( $\rho$ )	$2700$ [Kg/m <sup>3</sup> ]
Momento de inercia de la sección ( $I_y = I_z$ )	$4.9087 \times 10^{-6}$ [m <sup>4</sup> ]
Momento de Inercia polar ( $J$ )	$8.33 \times 10^{-6}$ [m <sup>4</sup> ]
Intensidad del pulso	$40$ [N]
Duración del pulso	$3$ [s]

Tabla 3: Características del pórtico y de la carga aplicada

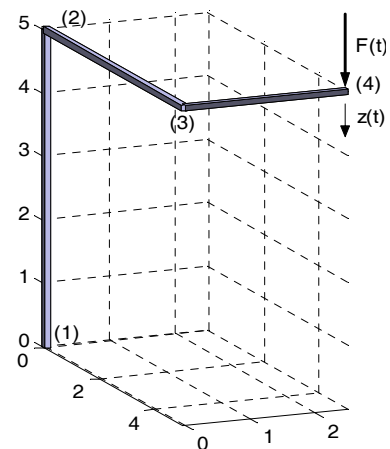


Figura 8: Pórtico

Como se discutió en la sección 3.2, cada miembro de este modelo incluye deformaciones axiales, torsionales y flexionales, por lo tanto puede modelarse superponiendo un elemento barra continua para la deformación axial, un elemento eje continuo para la deformación torsional, un elemento viga continua para la deformación flexional XZ y un elemento viga continua para la deformación flexional en el plano XY.

Las primeras cuatro frecuencias naturales calculadas con el modelo continuo (última fila de la [Tabla 4](#)) se comparan con las obtenidas mediante herramientas de Elementos Finitos también disponibles en SAT-Lab ([Inaudi y De la Llera, 2003](#)). Como se puede observar en la [Tabla 4](#), cuando la malla de elementos finitos se refina, la solución converge al resultado obtenido con elementos continuos. También se aprecia la falta de precisión del modelo de elementos finitos sin refinar, para frecuencias altas.



Método empleado	$\omega_1$ [rad/s]	$\omega_2$ [rad/s]	$\omega_3$ [rad/s]	$\omega_4$ [rad/s]
Malla de elementos finitos de 3 elementos	1.9349	2.0941	5.3228	5.8449
Malla de elementos finitos de 15 elementos	1.9317	2.1208	5.8413	6.2019
Elementos continuos (dominio del tiempo)	1.9314	2.1216	5.8389	6.2348

Tabla 4: Frecuencias naturales del pórtico

Usando los primeros cuatro modos de vibración, se obtuvo una aproximación de la respuesta en vibraciones forzadas. En la [Figura 9](#) se ha graficado el desplazamiento vertical  $z(t)$  del nudo 4, calculado con el modelo continuo.

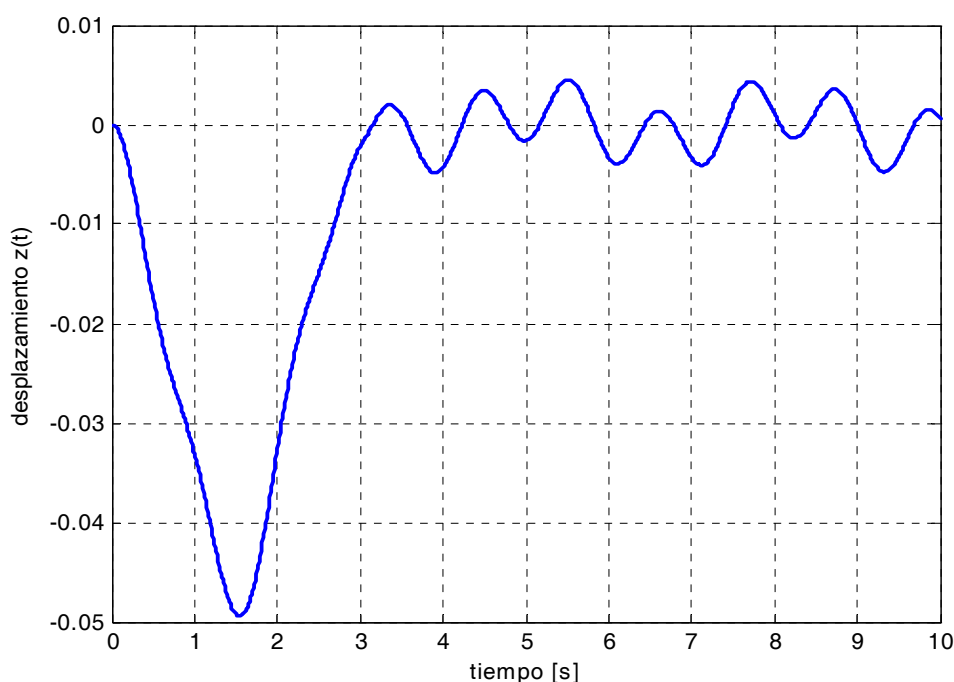


Figura 9: Desplazamiento  $z(t)$  del nudo 4

## 6 CONCLUSIONES Y FUTUROS DESARROLLOS

En este trabajo se presenta un procedimiento general para la formulación de condiciones de borde en estructuras continuas que lleva al ensamble de una matriz de condiciones de contorno denominada  $\mathbf{B}_c$ . La utilización de la matriz aquí propuesta resulta esencial para el análisis modal de sistemas dinámicos continuos.

Gracias a la generalidad del procedimiento presentado, el mismo es aplicable tanto a estructuras de barras planas como tridimensionales, ya que se consideran las contribuciones axiales, torsionales y flexionales asociadas a los dos planos principales de inercia. Al evitarse la discretización de la estructura, esta metodología permite una rápida modelización de sistemas complejos.

La metodología para ensamblar la matriz  $\mathbf{B}_c$  para estructuras con grados de libertad esclavos se ha omitido en este análisis y podría ser motivo de otro trabajo. Otro posible desarrollo futuro es la generalización de este procedimiento para incluir el análisis de sistemas bidimensionales, como placas o membranas.

## APÉNDICE

En esta sección se presenta la notación utilizada en el trabajo.

### 7.1 Direcciones locales del elemento

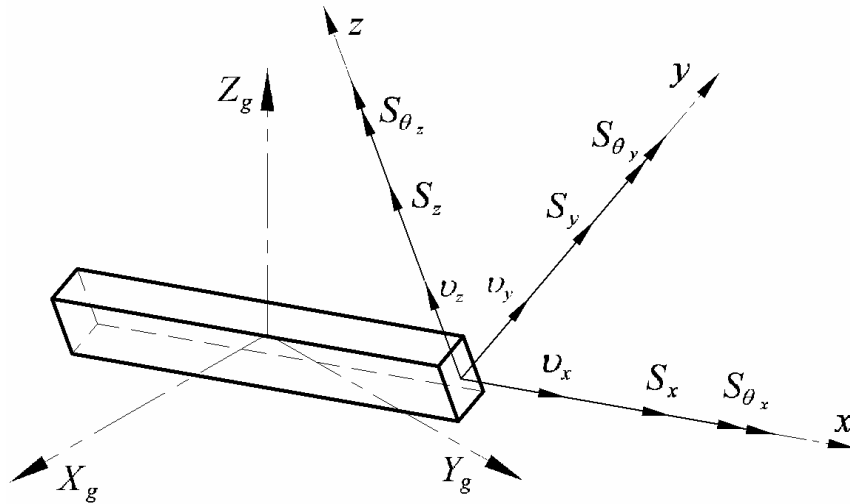


Figura 10: Direcciones locales del elemento y Esfuerzos locales

Los elementos continuos analizados en este trabajo, pueden definirse mediante dos nudos como en los modelos clásicos de elementos finitos.

Las direcciones locales  $x, y, y z$  del elemento están caracterizadas por los versores de dirección, como se muestra en la [Figura 10](#). Refiriendo las coordenadas de los nudos a un sistema de referencia global,  $X_g Y_g Z_g$ , el versor de dirección del nudo I al nudo J de un elemento recto se define como:

$$\mathbf{v}_x = \frac{\mathbf{J} - \mathbf{I}}{|\mathbf{J} - \mathbf{I}|} = [\cos \alpha_x, \cos \beta_x, \cos \gamma_x] \quad (55)$$

La dirección de los ejes locales  $y, z$  corresponde a los ejes principales de inercia de la sección del elemento y se pueden describir mediante los siguientes vectores unitarios:

$$\mathbf{v}_y = [\cos \alpha_y, \cos \beta_y, \cos \gamma_y] \quad \mathbf{v}_z = [\cos \alpha_z, \cos \beta_z, \cos \gamma_z] \quad (56)$$

### 7.2 Desplazamientos locales y esfuerzos locales

Los desplazamientos y los esfuerzos locales ([Figura 10](#)) están asociados con las direcciones locales del elemento. Utilizamos la siguiente notación:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (57)$$

donde  $u$  indica desplazamientos locales y  $\theta$  rotaciones locales.

Las fuerzas actuantes en elemento se designan con la letra  $S$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Esfuerzo Axial} \\ \text{Esfuerzo de Corte en dirección } y \\ \text{Esfuerzo de Corte en dirección } z \end{array} \quad (58)$$

Los momentos actuantes en el elemento se denotan con la letra  $\mathbf{S}_\theta$

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{bmatrix} S_{\theta_x} \\ S_{\theta_y} \\ S_{\theta_z} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Momento torsor (dirección } x) \\ \text{Momento flector respecto al eje } y \\ \text{Momento flector respecto al eje } z \end{array} \quad (59)$$

### 7.3 Relación en la deformaciones y desplazamientos nodales

Si  $v$  es la deformación correspondiente a uno de los nudos del elemento e  $\mathbf{y}$  es un vector columna que contiene los valores de los desplazamientos nodales (grados de libertad):

$$v = \mathbf{L}_v \mathbf{y} \quad (60)$$

donde  $\mathbf{L}_v$  es una transformación cinemática, que relaciona deformaciones y grados de libertad.

De manera idéntica, si  $v_\theta$  representa la deformación rotacional de un de los nudos del elemento e  $\mathbf{y}_\theta$  es un vector columna que contiene los valores de las rotaciones nodales (grados de libertad rotacionales):

$$v_\theta = \mathbf{L}_{v_\theta} \mathbf{y}_\theta \quad (61)$$

donde  $\mathbf{L}_{v_\theta}$  es la relación cinemática entre las deformaciones rotacionales y las rotaciones nodales.

### 7.4 Esfuerzos locales expresados en coordenadas globales

Un esfuerzo local  $\mathbf{S}$  o  $\mathbf{S}_\theta$  puede ser expresado en coordenadas globales usando las relaciones cinemáticas vistas en la sección anterior.

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}_v^T \mathbf{S} \quad \mathbf{F}_\theta = \mathbf{L}_{v_\theta}^T \mathbf{S}_\theta \quad (62)$$

donde  $\mathbf{F}$  contiene fuerzas asociadas a grados de libertad traslacionales y  $\mathbf{F}_\theta$  contiene momentos asociados a los grados de libertad rotacionales.

## REFERENCIAS

Humar, J., Dynamics of Structures, Taylor & Francis, 2º Edition, 2002.

Inaudi J.A. y De la Llera, J.C., SAT-Lab: Lenguaje de análisis estructural. *Revista de desastres naturales*, 3 /1:49-71, 2003.

Inaudi, J.A. y De la Llera J.C., SAT-Lab: <http://www.sat-lab.com>, Manuales de usuario y de referencia, 2002.

Matusevich, A., Desarrollo Computacional del Análisis Modal de Sistemas Dinámicos Continuos, Trabajo Final de grado carrera de Ingeniería Mecánica Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, 2002.

Matusevich, A.E. and Inaudi, J.A., A computer implementation of modal analysis of continuous dynamic systems. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 33/3:215-234, 2005.

Newmark, N.M., A method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 85:67-94, 1959.