

UN MODELO DE RIGIDEZ DE VIGAS PARA SECCIONES NO HOMOGÉNEAS Y GRANDES DESPLAZAMIENTOS

A. D. Otero*, F. L. Ponta*, P. M. Jacovkis†

*Grupo ISEP, Facultad de Ingeniería, UBA,
Paseo Colón 850, Buenos Aires C1063ACV, Argentina,
e-mail: aotero@fi.uba.ar

†Departamento de Computación e Instituto de Cálculo,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA,
Ciudad Universitaria, Buenos Aires C1428EGA, Argentina

Key Words: vigas no prismáticas, vigas no-lineales, secciones no homogéneas, elementos finitos.

Abstract. *En este trabajo se describe el desarrollo e implementación de un modelo de deformación de la sección para vigas de secciones no homogéneas, que considera las curvaturas y torsión iniciales de la viga y la libre deformación de la sección relajando la hipótesis de Timoshenko. Se interpolan los alabeos en la sección utilizando el método de elementos finitos y se resuelve el vector de alabeos nodales en función de las medidas de deformación de la viga en forma aproximada por medio de métodos perturbativos. Como resultado de este modelo se obtiene la matriz de rigidez de la viga a ser utilizada en un modelo de vigas no lineal apto para grandes desplazamientos. Se presenta la discretización por medio de elementos isoparamétricos tricuatrilaterales. Además, se muestran las mallas correspondientes al análisis de varias secciones complejas y las matrices de rigidez resultantes, enfatizando la aparición de acoplamientos no convencionales entre las medidas de deformación.*

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo del desarrollo presentado es la obtención de la matriz de rigidez de vigas de sección no homogénea, cuyas líneas de referencia pueden estar inicialmente torcidas y/o curvadas, de forma que esta rigidez pueda ser utilizada en un programa de cálculo de vigas, el cual podría ser no lineal, contemplando grandes desplazamientos de los puntos de la línea de referencia y rotaciones de las secciones. Para ello se reduce el problema tridimensional de deformación del sólido a uno unidimensional equivalente, en el sentido de la energía de deformación, basándonos en el desarrollo presentado en ⁽¹⁾. Esto, aprovechando que en las vigas una dimensión, la que corresponde a la generatriz, es relativamente mucho mayor que las otras dos. Para ello se comienza planteando la energía de deformación de la sección o densidad de energía.

2. MODELO MATEMÁTICO DE LA DEFORMACIÓN EN LA SECCIÓN DE LAS VIGAS

2.1. Cinemática de la viga

Denominamos R a la línea de referencia de la viga en la configuración sin deformar o de referencia. En esta configuración, se asocia a cada sección normal una triada ortogonal $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$, de forma tal que en cada punto de la viga el vector \mathbf{B}_1 sea paralelo a la tangente a R en el punto que ésta interseca al plano de la sección y $\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ estén contenidos en la sección. Además, se utiliza un sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3) donde x^1 es la coordenada a lo largo de R y x^2, x^3 son las coordenadas cartesianas de la sección. Salvo indicación contraria los índices denominados por letras griegas toman valores 2, 3 y los denominados por letras latinas, 1, 2, 3. Además, se adopta la convención de que la repetición de índices indica sumatoria sobre todo su rango.

La posición de cualquier punto de la viga en la configuración de referencia puede describirse en función de las coordenadas x^i a partir de la triada \mathbf{B}_i según

$$\mathbf{R}(x^i) = \bar{\mathbf{R}}(x^1) + x^\alpha \mathbf{B}_\alpha(x^1), \quad (1)$$

donde $\bar{\mathbf{R}}$ es la posición de los puntos de R . Los vectores base covariantes en la configuración de referencia se calculan a partir de la ec. 1 según

$$\mathbf{G}_A = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^a}; \quad (2)$$

para esto se utiliza que $\bar{\mathbf{R}}' = \mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_i' = \mathbf{K} \times \mathbf{B}_i = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{B}_i$, donde $()'$ denota diferenciación respecto de x^1 , $\mathbf{K} = K^i \mathbf{B}_i$ es el vector de curvatura de la configuración de referencia y $\tilde{\mathbf{K}}$ es el tensor de curvatura correspondiente definido por $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \mathbf{I} = \tilde{K}^{ij} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j = -e^{ijl} K^l \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j$. Aquí, K^1 es la torsión y K^α las curvaturas de R . A partir de estos vectores base covariantes se calculan las componentes del tensor métrico de la configuración de referencia como

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j. \quad (3)$$

Así la métrica de la configuración de referencia resulta

$$G = |\mathbf{G}| = \det G_{ij} = (1 - x^2 K^3 + x^3 K^2)^2. \quad (4)$$

Los vectores base contravariantes son tales que $\mathbf{G}^i \mathbf{G}_j = \delta_j^i$ y se calculan según

$$\mathbf{G}^i = \frac{1}{2\sqrt{G}} e^{ijl} \mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_l. \quad (5)$$

En la configuración deformada de la viga, se nota con r a la línea de referencia, que corresponde a R luego de la deformación. Se asocia a cada sección una triada ortogonal $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$, de forma que en cada punto de la viga el vector \mathbf{t}_1 es paralelo a la tangente a r y $\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ están contenidos en la sección normal a r correspondiente.

La figura 1 muestra la ubicación de las ternas \mathbf{B}_i y \mathbf{t}_i en relación con línea de referencia de la viga en las configuraciones de referencia y deformada.

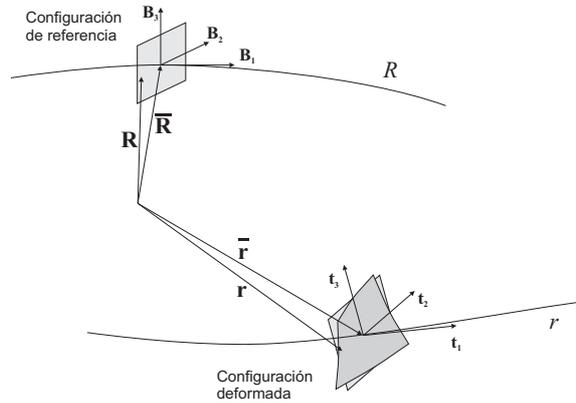


Figura 1: Configuraciones de referencia y deformada de la viga.

De esta forma, un punto que tenía posición \mathbf{R} en la configuración de referencia luego de la deformación tendrá posición

$$\mathbf{r}(x^j) = \bar{\mathbf{r}}(x^1) + x^\alpha \mathbf{t}_\alpha(x^1) + w^i(x^j) \mathbf{t}_i(x^1), \quad (6)$$

donde w^i son los desplazamientos de los puntos de la sección debidos a los alabeos de la misma.

Al definir los alabeos de esta forma, éstos incluyen también las deformaciones debidas a las distorsiones por corte. Es decir, si no se tuvieran en cuenta los mismos estaríamos en el caso de deformación correspondiente a la Hipótesis de Bernoulli. La ec. 6 es cuatro veces redundante por la forma en que se definieron los alabeos w^i . Se pueden aplicar cuatro restricciones apropiadas para eliminar esta redundancia. Las restricciones a aplicar son

$$\langle w^i \rangle = 0, \quad \langle x^2 w^3 - x^3 w^2 \rangle = 0; \quad (7)$$

donde $\langle \bullet \rangle = \int_s \bullet \sqrt{G} dx^2 dx^3$ y s es el dominio de la sección de la viga en configuración de referencia. De esta forma, se eliminan de los alabeos los cuatro movimientos de cuerpo rígido de la sección, los cuales quedan incluidos en los grados de libertad de la viga, es decir, los desplazamientos de la línea de referencia y los giros de la sección.

Los vectores base covariantes de la configuración deformada se calculan a partir de la ec. 6 según

$$\mathbf{g}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^a}, \quad (8)$$

utilizando que $\bar{\mathbf{r}}' = (1 + \bar{\gamma}_{11}) \mathbf{t}_1$ y $\mathbf{t}_i' = \mathbf{k} \times \mathbf{t}_i = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{t}_i$, donde las componentes del vector de curvatura \mathbf{k} de la configuración deformada son $k^i = K^i + \kappa^i$; $\bar{\gamma}_{11}$ es el estiramiento de la línea de referencia de la viga; κ^1 es la torsión y κ^α las curvaturas en dos ejes de la línea de referencia debidas a la deformación, o sea las medidas de deformación asociadas a las rotaciones de la línea de referencia de la viga respecto de la terna \mathbf{t}_i .

Las componentes del tensor gradiente de deformación expresado en las bases \mathbf{B}_i y \mathbf{t}_j se calculan como

$$F_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{g}_k \mathbf{G}^k \cdot \mathbf{B}_j. \quad (9)$$

Como medida de deformación utilizamos el tensor (Lagrangeano) de deformaciones de Jaumann - Biot - Cauchy, denotado $\mathbf{\Gamma}$. La ventaja de utilizar este tensor surge debido a que en el caso de deformaciones y rotaciones locales pequeñas la expresión de dicho tensor es

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \quad (10)$$

que resulta equivalente a la expresión del tensor de deformaciones ingenieriles cuando se consideran hipótesis lineales. La expresión surge en el caso de grandes desplazamientos y rotaciones globales por medio de la descomposición del tensor de rotación según lo expuesto en (2), donde se descompone la deformación de la viga utilizando la descomposición polar en una rotación y un estiramiento. Luego, la rotación se descompone en dos: una rotación rígida de la sección y una rotación local pequeña dependiente de cada punto de la sección considerado.

Despreciando los productos entre los alabeos y las medidas de deformación de la viga, ambos mucho menores que la unidad, las componentes del tensor $\mathbf{\Gamma}$ expresado en las bases \mathbf{B}_i y \mathbf{t}_j resultan en forma abreviada

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w} + \mathbf{\Gamma}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} + \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}', \quad (11)$$

donde los vectores que aparecen en la ec. 11 son: $\mathbf{\Gamma} = [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad 2\Gamma_{13} \quad \Gamma_{22} \quad 2\Gamma_{23} \quad \Gamma_{33}]^T$, arreglo de las componentes del tensor $\mathbf{\Gamma}$; $\mathbf{w} = [w^1 \quad w^2 \quad w^3]^T$, vector de alabeos; $\boldsymbol{\varepsilon} = [\bar{\gamma}_{11} \quad \kappa^1 \quad \kappa^2 \quad \kappa^3]^T$, arreglo de las medidas de deformación de la línea de referencia de la viga, equivalentes a las de la teoría clásica de Bernoulli.

Los operadores que aparecen en la ec. 11 son

$$\mathbf{\Gamma}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^3 & -x^2 \\ 0 & -x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_l = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_R = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} K^1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) & -K^3 & K^2 \\ K^3 & K^1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) & -K^1 \\ -K^2 & K^1 & K^1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

En la ec. 11 se ve la considerable ventaja existente en utilizar este tensor de deformaciones, ya que el mismo resulta lineal en las medidas de deformación de la viga, los alabeos de la sección y las derivadas de estos. Los términos de la ec. 11 tienen los siguientes órdenes de magnitud: $\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w} = \mathcal{O}(\epsilon)$, $\mathbf{\Gamma}_\varepsilon \varepsilon = \mathcal{O}(\epsilon)$, $\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} = \mathcal{O}(\epsilon \frac{h}{R})$ y $\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}' = \mathcal{O}(\epsilon \frac{h}{l})$; donde ϵ es un valor típico de las componentes del tensor $\mathbf{\Gamma}$, h es una dimensión característica de la sección de la viga, l es una longitud típica de cambio del estado de cargas y R representa un valor típico de las inversas de las componentes del vector de torsión y curvaturas iniciales \mathbf{K} , equivalente a un radio de curvatura. Supondremos que l y R tienen el mismo orden de magnitud y consideraremos $\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} = \mathcal{O}(\epsilon \frac{h}{l})$.

2.2. Energía de deformación de la sección

La energía de deformación de la sección o densidad de energía viene dada por

$$2U = \langle \mathbf{\Gamma}^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma} \rangle, \quad (13)$$

donde \mathcal{D} es la matriz simétrica de características del material en la base \mathbf{B}_i .

La forma de la energía de deformación de la sección al reemplazar la ec. 11 en la ec. 13

es:

$$\begin{aligned}
 2U = & \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w} \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} + \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}')^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}' \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} + \\
 & + 2 \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + 2 \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + 2 \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{w})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}' \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \\
 & + 2 \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w} \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + 2 \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}' \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + 2 \underbrace{\langle (\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{w})^T \mathcal{D} \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{w}' \rangle}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

En la ec. 14 se han indicado los órdenes de magnitud de cada término, siendo μ un valor representativo de las componentes de la matriz \mathcal{D} .

Los alabeos se interpolan en la sección utilizando algún método de discretización (en este caso Elementos Finitos), de forma que el vector de alabeos \mathbf{w} puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}(x^1, x^2, x^3) &= \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}(x^2, x^3) \mathbf{V}(x^1) = \\
 &= \begin{bmatrix} \dots & h^r(x^2, x^3) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & h^r(x^2, x^3) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h^r(x^2, x^3) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ w_r^1(x^1) \\ w_r^2(x^1) \\ w_r^3(x^1) \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{15}$$

donde h^r es la función de forma asociada al nodo r de la discretización de la sección y w_r^i es el valor del alabeo w^i en el nodo r . De la misma forma se interpolan las derivadas de los alabeos \mathbf{w}' .

Con la discretización descrita anteriormente y definiendo las matrices

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}] \rangle, & \mathbf{D}_{h\epsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\epsilon] \rangle, \\
 \mathbf{D}_{hR} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{H}] \rangle, & \mathbf{D}_{hl} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{H}] \rangle, \\
 \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_\epsilon]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\epsilon] \rangle, & \mathbf{D}_{RR} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{H}] \rangle, \\
 \mathbf{D}_{ll} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{H}] \rangle, & \mathbf{D}_{R\epsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\epsilon] \rangle, \\
 \mathbf{D}_{l\epsilon} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_\epsilon] \rangle, & \mathbf{D}_{Rl} &= \langle [\mathbf{\Gamma}_R \mathbf{H}]^T \mathcal{D} [\mathbf{\Gamma}_l \mathbf{H}] \rangle,
 \end{aligned} \tag{16}$$

la ec. 14 puede escribirse en su versión discreta como

$$\begin{aligned}
 2U = & \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{D}_{RR} \mathbf{V}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} + \underbrace{\mathbf{V}'^T \mathbf{D}_{ll} \mathbf{V}'}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2)} + \\
 & + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{R\epsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}'^T \mathbf{D}_{l\epsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 \frac{h}{l})} + \underbrace{2 \mathbf{V}^T \mathbf{D}_{Rl} \mathbf{V}'}_{\mathcal{O}(\mu \epsilon^2 (\frac{h}{l})^2)}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Energía de deformación en las variables de la teoría de Bernoulli

Lo que sigue es minimizar la versión discreta del funcional $2U$ de la ec. 17, respecto del vector de alabeos nodales \mathbf{V} y con las restricciones de las ecs. 7. Esto no puede hacerse exactamente pero puede resolverse en forma aproximada utilizando métodos perturbativos, analizando la componente de la densidad de energía en cada orden de magnitud. Para ello, se expande la incógnita \mathbf{V} en serie de un parámetro pequeño.

Para el caso de vigas h , la dimensión característica de la sección es mucho menor que la longitud característica de cambio del estado de cargas l y que los radios de curvatura cuya longitud característica es R . Donde esto no ocurre, por ejemplo en el entorno del punto de aplicación de una carga puntual o de una condición de vínculo, los estados de deformación y de tensión son tridimensionales y el sólido no se comporta como una viga. Sin considerar lo que ocurre en esta zona de deformación tridimensional el resto del sólido se comporta como una viga y se acostumbra estudiarlo como tal despreciando el efecto de esa área.

La expansión adoptada es

$$\mathbf{V} = \underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^0 \hat{\mathbf{V}}_0}_{\mathbf{v}_0} + \underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^1 \hat{\mathbf{V}}_1}_{\mathbf{v}_1} + \underbrace{\left(\frac{h}{l}\right)^2 \hat{\mathbf{V}}_2}_{\mathbf{v}_2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{l}\right)^3\right). \quad (18)$$

En la ec. 18, $\hat{\mathbf{V}}_0$, $\hat{\mathbf{V}}_1$ y $\hat{\mathbf{V}}_2$ son del orden de la unidad. Reemplazando la ec. 18 en la ec. 17, agrupando los términos del mismo orden de magnitud y descartando aquellos términos de orden superior a $\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\right)$, lo que resultará suficiente para obtener una teoría de Timoshenko generalizada (es decir, una que utilice variables similares pero que deje de lado la hipótesis de que la sección se mantiene plana luego de la deformación), resulta

$$2U = \underbrace{2U_0}_{\mathcal{O}\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^0\right)} + \underbrace{2U_1}_{\mathcal{O}\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^1\right)} + \underbrace{2U_2}_{\mathcal{O}\left(\mu\epsilon^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\right)}, \quad (19)$$

donde

$$2U_0 = \mathbf{V}_0^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + 2\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (20)$$

$$2U_1 = 2 \left(\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{R\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{l\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}_1^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 \right) \quad (21)$$

$$2U_2 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{E} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{RR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{lR} \mathbf{V}'_0 + 2 \left(\mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_1 \right) + \quad (22)$$

$$+ 2 \left(-\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{R\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{l\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}' + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{Rl} \mathbf{V}'_0 \right) +$$

$$+ 2 \left(\mathbf{V}_2^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} \right).$$

En la ec. 22 se integraron por partes los dos términos donde aparecía \mathbf{V}'_1 descartando los términos constantes resultantes, que hubieran desaparecido al diferenciar la versión discreta del funcional $2U$.

Al discretizar los alabeos según lo expuesto anteriormente se obtienen las condiciones que se les deben imponer para que cumplan las condiciones de las ecs. 7. Estas condiciones discretas son:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x^2 & x^3 \end{bmatrix} \mathbf{H} \right\rangle \mathbf{V} = \mathbf{H}_\lambda \mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Analizando la componente $2U_0$ de la densidad de energía a fin de obtener la componente \mathbf{V}_0 y utilizando multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones, el funcional a minimizar resulta

$$\Pi_0 = \mathbf{V}_0^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + 2\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} \varepsilon + \varepsilon^T \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon + 2\mathbf{V}_0^T \mathbf{H}_\lambda^T \lambda_0. \quad (24)$$

Imponiendo la estacionaridad del funcional Π_0 respecto del vector de alabeos nodales \mathbf{V}_0 y del vector λ_0 de multiplicadores de Lagrange, para un vector fijo de las medidas de deformación de la viga ε ,

$$\delta \Pi_0 = \delta \mathbf{V}_0^T (\mathbf{E} \mathbf{V}_0 + \mathbf{D}_{h\varepsilon} \varepsilon + \mathbf{H}_\lambda^T \lambda_0) + \delta \lambda_0^T (\mathbf{H}_\lambda \mathbf{V}_0) = 0, \quad (25)$$

se obtienen la ecuaciones de Euler - Lagrange asociadas al problema de minimización de $2U_0$, las que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}_\lambda^T \\ \mathbf{H}_\lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{h\varepsilon} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \varepsilon. \quad (26)$$

Resolviendo el sistema de ecs. 26 se obtiene el vector de alabeos nodales $\mathbf{V}_0 = \bar{\mathbf{V}}_0 \varepsilon$ buscado.

Analizando la componente $2U_1$ de la ec. 21 se ve que ésta no puede minimizarse respecto de \mathbf{V}_1 estableciendo alguna relación entre \mathbf{V}_1 y las medidas de la deformación de la viga ε . Para obtener la expresión de \mathbf{V}_1 hay que minimizar la componente $2U_2$ de la ec. 22 sujeta a las restricciones $\mathbf{H}_\lambda \mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$. Entonces aplicando multiplicadores de Lagrange, el funcional a minimizar es

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \mathbf{V}_1^T \mathbf{E} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{RR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{ll} \mathbf{V}'_0 + 2 (\mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hR} \mathbf{V}_1) + \\ & + 2 \left(-\mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{hl} \mathbf{V}'_0 + \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{R\varepsilon} \varepsilon - \mathbf{V}_1^T \mathbf{D}_{l\varepsilon} \varepsilon' + \mathbf{V}_0^T \mathbf{D}_{Rl} \mathbf{V}'_0 \right) + \\ & + 2 (\mathbf{V}_2^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} \varepsilon) + 2\mathbf{V}_1^T \mathbf{H}_\lambda^T \lambda_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Imponiendo la estacionaridad del funcional Π_2 respecto de los vectores \mathbf{V}_1 y λ_1 , luego de reemplazar $\mathbf{V}_0 = \bar{\mathbf{V}}_0 \varepsilon$, resulta

$$\delta \Pi_2 = \delta \mathbf{V}_1^T (\mathbf{E} \mathbf{V}_1 + \mathbf{D}_R \varepsilon + \mathbf{D}_S \varepsilon' + \mathbf{H}_\lambda^T \lambda_1) + \delta \lambda_1^T (\mathbf{H}_\lambda \mathbf{V}_1) = 0, \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_R &= \mathbf{D}_{hR}\bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{hR}^T\bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{R\varepsilon}, \\ \mathbf{D}_S &= \mathbf{D}_{hl}\bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{D}_{hl}^T\bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{D}_{l\varepsilon}.\end{aligned}\quad (29)$$

Entonces se obtienen las ecuaciones de Euler - Lagrange asociadas al problema de minimización de $2U_2$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}_\lambda^T \\ \mathbf{H}_\lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'.\quad (30)$$

Nuevamente, al resolver el sistema de ecs. 30 se obtiene el vector de alabeos nodales $\mathbf{V}_1 = \bar{\mathbf{V}}_{1R}\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_{1S}\boldsymbol{\varepsilon}'$ buscado. Reemplazando las expresiones de \mathbf{V}_0 y \mathbf{V}_1 , la ec. 21 resulta

$$\begin{aligned}2U_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}^T 2 [\bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hR} \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{R\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T (\mathbf{D}_{h\varepsilon} + \mathbf{E} \bar{\mathbf{V}}_0)] \boldsymbol{\varepsilon} + \\ &+ \boldsymbol{\varepsilon}'^T 2 [\bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + (\mathbf{D}_{h\varepsilon}^T + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{E}) \bar{\mathbf{V}}_{1S}] \boldsymbol{\varepsilon}'.\end{aligned}\quad (31)$$

Analizando los últimos términos de cada corchete y tomando en cuenta la primera línea de la ec. 26 se ve que

$$\bar{\mathbf{V}}_{1R}^T (\mathbf{D}_{h\varepsilon} + \mathbf{E} \bar{\mathbf{V}}_0) \boldsymbol{\varepsilon} = -\bar{\mathbf{V}}_{1R}^T (\mathbf{H}_\lambda^T \boldsymbol{\lambda}_0),\quad (32)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^T (\mathbf{D}_{h\varepsilon}^T + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{E}) \bar{\mathbf{V}}_{1S} = -(\boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{H}_\lambda) \bar{\mathbf{V}}_{1S}.\quad (33)$$

El vector de alabeos \mathbf{V}_1 debe cumplir condiciones similares a la ec. 23 independientemente de las medidas de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y sus derivadas, por lo tanto $\mathbf{H}_\lambda \mathbf{V}_{1S} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{H}_\lambda \mathbf{V}_{1R} = \mathbf{0}$ de forma que ambos términos se anulan. Entonces la componente $2U_1$ resulta

$$2U_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^T 2 [\bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hR} \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{R\varepsilon}] \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}'^T 2 [\bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_0] \boldsymbol{\varepsilon}'.\quad (34)$$

Procediendo en forma similar se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1^T \mathbf{E} \mathbf{V}_1 &= -(\boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T + \boldsymbol{\varepsilon}'^T \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T) (\mathbf{D}_R \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_S \boldsymbol{\varepsilon}') = \\ &= -[\boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_R \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}'^T (\bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_S + \mathbf{D}_R^T \bar{\mathbf{V}}_{1S}) \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}'^T \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_S \boldsymbol{\varepsilon}'].\end{aligned}\quad (35)$$

Nuevamente utilizando la primera línea de la ec. 26 resulta

$$\mathbf{V}_2^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{V}_2^T (\mathbf{H}_\lambda^T \boldsymbol{\lambda}_0).\quad (36)$$

Como el vector de alabeos \mathbf{V}_2 debe cumplir condiciones similares a la ec. 23, $\mathbf{H}_\lambda \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$ y se anulan los términos que contienen a \mathbf{V}_2 de la expresión de $2U_2$. Por esto, podemos concluir que no es necesario calcular los alabeos \mathbf{V}_2 de orden $(\frac{h}{l})^2$ para obtener la expresión de la densidad de energía asintóticamente correcta hasta orden $\mu \varepsilon^2 (\frac{h}{l})^2$.

Utilizando las definiciones de \mathbf{D}_R y \mathbf{D}_S de la ec. 29, la densidad de energía puede escribirse en función de las medidas de deformación de la viga en la teoría clásica

$$2U = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}'^T 2\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}'^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}^T 2\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}'',\quad (37)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_0^T (\mathbf{D}_{hR} + \mathbf{D}_{hR}^T + \mathbf{D}_{RR}) \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{R\varepsilon} + \mathbf{D}_{R\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_R, \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_{hl}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1R}^T \mathbf{D}_{l\varepsilon} + \mathbf{D}_R^T \bar{\mathbf{V}}_{1S}) + \\
&\quad + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_{1R} + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T \bar{\mathbf{V}}_{1R} + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{Rl} \bar{\mathbf{V}}_0, \\
\mathbf{C} &= \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_{hl} \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_{hl}^T \bar{\mathbf{V}}_0 + \bar{\mathbf{V}}_{1S}^T \mathbf{D}_{l\varepsilon} + \bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{ll} \bar{\mathbf{V}}_0, \\
\mathbf{D} &= (\bar{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{D}_{hl} + \mathbf{D}_{l\varepsilon}^T) \bar{\mathbf{V}}_{1S}.
\end{aligned}$$

La ec. 37 es la expresión de la energía de deformación de la sección de la viga buscada, la cual es asintóticamente correcta hasta orden $\mu\varepsilon^2 \left(\frac{h}{l}\right)^2$.

Transformación a las variables de la teoría de Timoshenko

A pesar de que la expresión de la densidad de energía de la ec. 37 es asintóticamente correcta, es difícil de utilizar debido a que aparecen las derivadas primeras y segundas de las medidas de la deformación, lo cual requeriría condiciones de contorno más complicadas que lo necesario. La teoría de vigas de Timoshenko no presenta estos inconvenientes y además resulta más conveniente para resolver por métodos numéricos como el de Elementos Finitos.

La densidad de energía expresadas en función de las medidas de deformación de la teoría de Timoshenko es

$$2U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^T & \boldsymbol{\gamma}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\gamma}_s + \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_s \quad (38)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon} = [\gamma_{11} \ \beta^1 \ \beta^2 \ \beta^3]^T$ son las medidas de deformación de la teoría de Timoshenko debidas a extensión, torsión y flexión en dos ejes y $\boldsymbol{\gamma}_s = [2\gamma_{12} \ 2\gamma_{13}]^T$ las medidas de deformación debidas a la distorsión por corte. Lo que sigue es encontrar las matrices \mathbf{X} , \mathbf{F} y \mathbf{G} de forma que la densidad de energía U de las ecs. 37 y 38 sea equivalente, por lo menos en forma asintótica hasta el orden de precisión con que se trabaja.

Las medidas de deformación de la teoría de Timoshenko están asociadas a una nueva terna ortogonal \mathbf{b}_i en la configuración deformada que corresponde a la terna \mathbf{B}_i después de que ha rotado por la deformación de la viga; en este caso \mathbf{b}_1 no es tangente al eje de la viga si se considera la deformación por corte. La diferencia en la orientación de las ternas \mathbf{t}_i , asociada a las medidas de deformación de la teoría clásica, y \mathbf{b}_i se debe a las pequeñas rotaciones asociadas con la deformación por corte.

Las componentes del vector de curvatura de la teoría de Timoshenko \mathbf{k}_T de la configuración deformada son

$$k_T^i = K^i + \beta^i, \quad (39)$$

donde β^1 es la torsión y β^α las curvaturas de la línea de referencia debidas a la deformación. Las medidas de deformación de ambas teorías están relacionadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}'_s + \mathbf{P}\boldsymbol{\gamma}_s, \quad (40)$$

donde

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & K^2 & -K^1 & 0 \\ 0 & K^3 & 0 & -K^1 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Considerando que generalmente se acepta que las deformaciones debidas a la distorsión por corte son de un orden menor que las medidas de la deformación de la teoría clásica, la densidad de energía de segundo orden será suficiente para construir una teoría de Timoshenko generalizada. Entonces, reemplazando la ec. 40 en la ec. 37 y considerando que las componentes de $\boldsymbol{\gamma}_s$ son un orden menor que las de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$, permitiendo descartar los términos de orden superior, se puede escribir

$$2U = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{A}\mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}'_s + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{A}\mathbf{P}\boldsymbol{\gamma}_s + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}' + \boldsymbol{\epsilon}'^T \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}' + 2\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}''. \quad (42)$$

Teóricamente, si la expresión de la densidad de energía de la teoría de Timoshenko generalizada es correcta las ecs. 38 y 42 deberían ser equivalentes. Para probarlo uno debe deshacerse de las derivadas en la ec. 42. Una manera de realizar esto es utilizar las ecuaciones de equilibrio de la viga, luego de lo cual se puede igualar la expresión hallada a la ec. 38, resultando las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & \mathbf{A} - 2\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_3 + \mathbf{D}_1 \mathbf{F}^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{X}) + 2\mathbf{B}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}_3 + \\ & + 2\mathbf{D}\mathbf{N}^{-1} [(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{B}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{F}^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{X})], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 + \mathbf{D}_1 \mathbf{G} + \mathbf{D}_2 \mathbf{F}) + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3 + \\ & + \mathbf{D}\mathbf{N}^{-1} [(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{G} + \mathbf{D}_2 \mathbf{F})], \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_3^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_3, \quad (45)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{X} - \mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T, \\ \mathbf{A}_3 &= (\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_4) \mathbf{G} + (\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{F}, \\ \mathbf{B}_3 &= (\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_4) \mathbf{F}^T + (\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{X}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 \\ K^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} K^3 & 0 & 0 & 0 \\ -K^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^3 & K^2 \\ 0 & K^3 & 0 & -K^1 \\ 0 & -K^2 & K^1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_4 = \mathbf{Q} - \mathbf{D}_2^T. \quad (46)$$

Lo que resta es resolver las ecs. 43 a 45 para obtener las matrices \mathbf{X} , \mathbf{F} y \mathbf{G} , donde aparecen la torsión y las curvaturas iniciales K^i , a través de las matrices \mathbf{D}_j . Para resolverlas, nuevamente, se puede usar métodos perturbativos. Para ello se plantea cada matriz incógnita como una serie de matrices, cada una de las cuales de determinado orden en el parámetro \bar{K} , un valor representativo de las componentes del vector \mathbf{K} , a saber

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots,\end{aligned}\quad (47)$$

donde las matrices \mathbf{X}_l , \mathbf{F}_l y \mathbf{G}_l son de orden \bar{K}^l . En este caso no será necesario considerar las matrices de orden \bar{K}^2 o superior en \bar{K} para obtener una solución adecuada al orden de precisión de este desarrollo.

Las componentes de orden \bar{K}^0 resultan

$$\mathbf{G}_0 = (\mathbf{Q}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{Q})^{-1}, \quad (48)$$

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{G}_0, \quad (49)$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_0^T. \quad (50)$$

Las de orden \bar{K}^1 son

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{J}_G, \quad (51)$$

$$\mathbf{F}_1^T = -\mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{J}_F + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{G}_1) \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{A}, \quad (52)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{J}_X + \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_0^T + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_1^T - 2 (\mathbf{J}_F + \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{G}_1) \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{F}_0^T \quad (53)$$

donde \mathbf{J}_G , \mathbf{J}_F y \mathbf{J}_X son matrices que pueden calcularse en base a matrices y vectores ya calculados o conocidos cuyas expresiones son

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_G &= ((\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T) \mathbf{G}_0 + (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{F}_0)^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{G}_0 + \\ &+ \mathbf{G}_0 \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} ((\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T) \mathbf{G}_0 + (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{F}_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_F &= -\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{G}_0^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{G}_0 + \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_0) + \mathbf{A} \mathbf{P} + \\ &- \left[\mathbf{F}_0 (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T)^T + \mathbf{X}_0 (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3)^T \right] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{G}_0 - \\ &- \mathbf{F}_0 \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} [(\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T) \mathbf{G}_0 + (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{F}_0] + \\ &+ \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} [- (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{Q} \mathbf{G}_0 + \mathbf{Q} (\mathbf{D}_1 \mathbf{G}_0 + \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_0)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_X &= -2 \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{G}_0^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{F}_0^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{X}_0) + \\ &- \left[\mathbf{F}_0 (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T)^T + \mathbf{X}_0 (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3)^T \right] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{F}_0^T - \\ &- \mathbf{F}_0 \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} [(\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T) \mathbf{F}_0^T + (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{X}_0] + \\ &+ 2 \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} [- (\mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3) \mathbf{Q} \mathbf{F}_0^T + \mathbf{Q} (\mathbf{D}_1 \mathbf{F}_0^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{X}_0)].\end{aligned}$$

De esta forma se obtienen las matrices \mathbf{X} , \mathbf{F} y \mathbf{G} correspondientes a la matriz de rigidez de la teoría de Timoshenko generalizada, reemplazando las matrices obtenidas en las series de las ecs. 47.

3. DISCRETIZACIÓN POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Hasta aquí no se ha mencionado el método utilizado en la discretización de los alabeos de la ec. 15. Con el fin de aplicar este análisis a vigas de secciones complejas buscando aprovechar los beneficios de las mallas no estructuradas se utilizaron los elementos finitos denominados tricuatrilaterales.³ Éstos se construyen a partir de mallas triangulares, las cuales tienen la capacidad de adaptarse a geometrías complicadas con cambios de densidad suaves sin poseer orientaciones preferenciales. Cada triángulo se divide en tres elementos cuadrilaterales isoparamétricos de 9 nodos,⁴ con interpolación bicuadrática. De esta forma, como en los elementos isoparamétricos las coordenadas se interpolan con las mismas funciones que las incógnitas, se pueden interpolar los contornos curvos que puedan aparecer reduciendo el error de interpolación de las geometrías, que ocurre con elementos de menor orden. En la referencia (3) puede hallarse una descripción detallada de estos elementos y de sus ventajas. En la figura 2 se muestra un elemento tricuatrilateral, con la numeración de los nodos dentro del elemento y los 3 subelementos de 9 nodos.

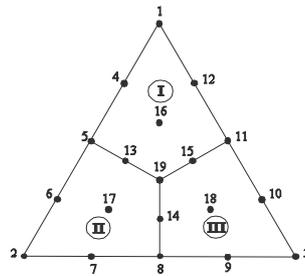


Figura 2: Elemento tricuatrilateral. Subelementos (I)–(III) y numeración de nodos.

Además, en cada elemento tricuatrilateral se realiza una condensación de los nodos interiores en el momento del ensamble de las matrices (ver⁴). De esta forma se reduce la cantidad de grados de libertad a resolver en la solución de los sistemas de ecuaciones 26 y 30. Luego de obtener las soluciones se recuperan los resultados de los nodos condensados. Este procedimiento de condensación puede aplicarse en este caso debido a la forma en que se imponen las condiciones de las ecs. 7. En (5) y (6) se resuelven problemas similares; en el primero la solución implica el conocimiento de los autovectores de la matriz \mathbf{E} , lo cual resulta computacionalmente costoso; en el segundo, implica el cálculo de la pseudoinversa de Moore–Penrose de \mathbf{E} luego de una transformación, también computacionalmente costoso. Ambos métodos requieren trabajar sobre la matriz completa y no pueden llevarse a cabo luego de la condensación.

4. EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

A continuación se exponen resultados obtenidos para dos tipos de secciones compuestas, una sección tipo ‘Doble T’ y una sección de viga cajón. Para todos los ensayos

realizados se consideró un material con la propiedades que se describen en la siguiente tabla. En este caso la dirección l corresponde a la dirección de las fibras del material, t es la otra dirección en el plano de laminado y n es la dirección normal al mismo.

$$\begin{aligned} E_{ll} &= 1,4382 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ E_{tt} &= E_{nn} = 9918,7 \text{ MPa} \\ G_{lt} &= G_{ln} = G_{tn} = 6076,9 \text{ MPa} \\ \nu_{lt} &= \nu_{ln} = \nu_{tn} = 0,42 \end{aligned}$$

Se muestran los resultados de las matrices de rigidez \mathbf{S} de cada configuración, donde \mathbf{S} es la permutación de la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{G} \end{bmatrix}$ asociada con el vector de medidas de deformación de la viga ordenado como $\boldsymbol{\varepsilon}_T = [\gamma_{11} \quad 2\gamma_{12} \quad 2\gamma_{13} \quad \beta^1 \quad \beta^2 \quad \beta^3]$, de forma que la densidad de energía de la ec. 38 resulta $2U = \boldsymbol{\varepsilon}_T \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon}_T^T$.

Sección de viga tipo ‘Doble T’

La figura 3 muestra una sección de una viga tipo ‘Doble T’ laminada en 4 capas, con su malla de triángulos y un detalle de un cuarto de la misma sección con su malla de tricuatriláteros.

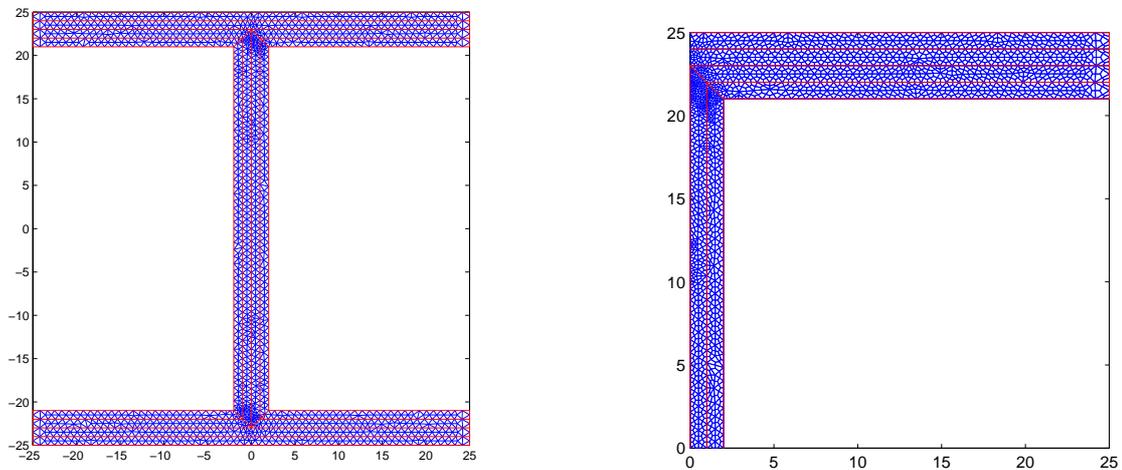


Figura 3: Sección ‘Doble T’ laminada en 4 capas. Malla triangular (izquierda) y detalle de la malla tricuatrilateral (derecha). Dimensiones en mm.

Para esta geometría se hicieron ensayos con tres tipos de configuraciones de laminado. Las orientaciones de los laminados de las diferentes capas en cada caso se indican en la

tabla 1; el orden de las mismas es de arriba hacia abajo en las alas superior e inferior y de izquierda a derecha en el núcleo central. La orientación de las ternas l_0, t_0, n_0 a partir de donde se miden los ángulos de laminado es con el vector l_0 saliendo del plano de la sección, el vector n_0 señalando hacia arriba en las alas superior e inferior y hacia la izquierda en el núcleo y el vector t_0 formando una terna derecha.

Tabla 1: Configuraciones de laminado sección ‘Doble T’

	superior	centro	inferior
Configuración 1	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$
Configuración 2	$[15, -15, 15, -15]$	$[15, -15, 15, -15]$	$[15, -15, 15, -15]$
Configuración 3	$[30, -30, 30, -30]$	$[30, -30, 30, -30]$	$[30, -30, 30, -30]$

En este caso se calculó la matriz de rigidez de la teoría de Timoshenko para vigas prismáticas, vigas con torsión y curvatura inicial en el caso de la configuración 1, con ángulo de laminación nulo y vigas prismáticas en las configuraciones 2 y 3. Los casos calculados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2: Casos estudiados sección ‘Doble T’

Caso	Configuración	K^1	K^2
1	1	0	0
2	1	0,01	0
3	1	0	0,01
4	2	0	0
5	3	0	0

Los matrices obtenidas se identifican con un subíndice indicando el número de caso y los elementos de las matrices indicados con ≈ 0 corresponden a valores por lo menos 14 órdenes de magnitud menores respecto del mayor elemento de la matriz, atribuibles a errores de redondeo.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 8,169 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ 0 & 2,084 \cdot 10^6 & -21,485 & 3,815 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -21,485 & 1,030 \cdot 10^6 & 2,571 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3,815 \cdot 10^{-3} & 2,571 \cdot 10^{-3} & 18,667 & 0 & 0 \\ \approx 0 & 0 & 0 & 0 & 34061 & \approx 0 \\ \approx 0 & 0 & 0 & 0 & \approx 0 & 12017 \end{bmatrix}$$

Este caso, el primero, será utilizado como patrón para identificar qué acoplamientos aparecen entre las medidas de deformación de la viga. Es de destacar que al ser ésta una sección abierta, la rigidez a la torsión es muy baja.

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 8,168 \cdot 10^7 & -9,028 \cdot 10^{-3} & -6,083 \cdot 10^{-3} & 4563,7 & -8,327 \cdot 10^{-6} & 1,123 \cdot 10^{-6} \\ -9,028 \cdot 10^{-3} & 2,083 \cdot 10^6 & -21,479 & 3,815 \cdot 10^{-3} & -861,85 & 4,040 \cdot 10^{-3} \\ -6,083 \cdot 10^{-3} & -21,479 & 1,030 \cdot 10^6 & 2,570 \cdot 10^{-3} & -0,018854 & -1418,3 \\ 4563,7 & 3,815 \cdot 10^{-3} & 2,570 \cdot 10^{-3} & 19,004 & 3,519 \cdot 10^{-6} & \approx 0 \\ -8,327 \cdot 10^{-6} & -861,85 & -0,018854 & 3,519 \cdot 10^{-6} & 34064 & 4,449 \cdot 10^{-5} \\ 1,123 \cdot 10^{-6} & 4,040 \cdot 10^{-3} & -1418,3 & \approx 0 & 4,449 \cdot 10^{-5} & 12016 \end{bmatrix}$$

En este caso aparecen, debido a la torsión inicial, acoplamientos axil-torsión (S_{14}) y corte-flexión (S_{25}).

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 8,177 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 1964,9 & 0,41943 \\ 0 & 2,060 \cdot 10^6 & -24,475 & -150,67 & 0 & 0 \\ 0 & -24,475 & 1,027 \cdot 10^6 & 4,172 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -150,67 & 4,172 \cdot 10^{-3} & 18,671 & 0 & 0 \\ 1964,9 & 0 & 0 & 0 & 33999 & 0,049284 \\ 0,41943 & 0 & 0 & 0 & 0,049284 & 37762 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la curvatura inicial, los acoplamientos más importantes que aparecen son axil-flexión (S_{15}).

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 6,558 \cdot 10^7 & 0,38035 & 0,2777 & -14281 & 3,961 \cdot 10^{-3} & -1,040 \cdot 10^{-4} \\ 0,38035 & 4,522 \cdot 10^6 & -23,768 & 7,665 \cdot 10^{-3} & 5939 & -0,014957 \\ 0,2777 & -23,768 & 2,287 \cdot 10^6 & 5,444 \cdot 10^{-3} & -0,12429 & 2784,9 \\ -14281 & 7,665 \cdot 10^{-3} & 5,444 \cdot 10^{-3} & 40,491 & 2,337 \cdot 10^{-5} & 5,959 \cdot 10^{-6} \\ 3,961 \cdot 10^{-3} & 5939 & -0,12429 & 2,337 \cdot 10^{-5} & 27273 & 4,686 \cdot 10^{-5} \\ -1,040 \cdot 10^{-4} & -0,014957 & 2784,9 & 5,959 \cdot 10^{-6} & 4,686 \cdot 10^{-5} & 9382,9 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la configuración de laminado, aparecen acoplamientos corte-flexión (S_{25}).

$$\mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} 2,986 \cdot 10^7 & 2,2437 & 1,8481 & -11375 & 0,015482 & 9,593 \cdot 10^{-5} \\ 7,925 \cdot 10^6 & 9,017 \cdot 10^6 & -115,68 & 0,027489 & 9987,2 & -0,018433 \\ 2,2437 & -115,68 & 4,674 \cdot 10^6 & 0,021391 & -0,71003 & 4060,3 \\ -11375 & 0,027489 & 0,021391 & 77,167 & 1,301 \cdot 10^{-4} & 9,622 \cdot 10^{-6} \\ 0,015482 & 9987,2 & -0,71003 & 1,301 \cdot 10^{-4} & 12418 & 4,536 \cdot 10^{-5} \\ 9,593 \cdot 10^{-5} & -0,018433 & 4060,3 & 9,622 \cdot 10^{-6} & 4,536 \cdot 10^{-5} & 4241,1 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la configuración de laminado, aparecen acoplamientos de una magnitud importante axil-torsión (S_{14}) y corte-flexión (S_{25} y S_{36}) en ambas direcciones.

Sección de viga tipo ‘Cajón’.

La figura 4 muestra una sección de viga tipo cajón laminada en 4 capas, con su malla de tricuatriláteros.

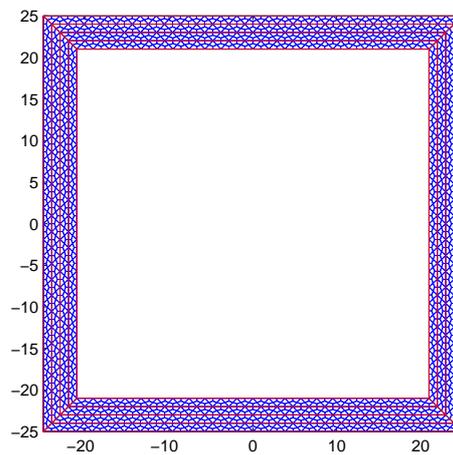


Figura 4: Malla de la sección de una viga cajón laminada en 4 capas. Dimensiones en mm.

Para esta geometría se realizaron ensayos con cuatro tipos de configuraciones de laminado. Las orientaciones de los laminados de las diferentes capas en cada caso se indican en la tabla 3; el orden de las mismas es de adentro hacia afuera en todos los casos. La orientación de las ternas l_0, t_0, n_0 es con el vector l_0 saliendo del plano de la sección, el vector n_0 señalando hacia el exterior de la viga y el vector t_0 formando una terna derecha.

Tabla 3: Configuraciones de laminado sección de viga ‘Cajón’

	superior	derecha	inferior	izquierda
Conf. 1	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$
Conf. 2	$[30, 0, 30, 0]$	$[30, 0, 30, 0]$	$[30, 0, 30, 0]$	$[30, 0, 30, 0]$
Conf. 3	$[15, 15, 15, 15]$	$[-15, 15, -15, 15]$	$[-15, -15, -15, -15]$	$[15, -15, 15, -15]$
Conf. 4	$[15, 15, 15, 15]$	$[15, 15, 15, 15]$	$[15, 15, 15, 15]$	$[15, 15, 15, 15]$

La tabla 4 resume los casos analizados para esta geometría.

Tabla 4: Casos estudiados sección de viga ‘Cajón’

Caso	Configuración	K^1	K^2
1	1	0	0
2	1	0,01	0
3	1	0	0,01
4	2	0	0
5	3	0	0
6	4	0	0

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1,059 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ 0 & 1,953 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & 0 & 0 \\ 0 & \approx 0 & 1,953 \cdot 10^6 & \approx 0 & 0 & 0 \\ 0 & \approx 0 & \approx 0 & 2469,8 & 0 & 0 \\ \approx 0 & 0 & 0 & 0 & 37613 & \approx 0 \\ \approx 0 & 0 & 0 & 0 & \approx 0 & 37613 \end{bmatrix}$$

Este caso será utilizado como patrón para identificar los acoplamientos que aparecen entre las medidas de deformación de la viga.

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1,059 \cdot 10^8 & \approx 0 & \approx 0 & 1677,4 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & 1,953 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & -731,88 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 1,953 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & -731,88 \\ 1677,4 & \approx 0 & \approx 0 & 2469,6 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & -731,88 & \approx 0 & \approx 0 & 37618 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & -731,88 & \approx 0 & \approx 0 & 37618 \end{bmatrix}$$

En este caso aparecen, debido a la torsión inicial, acoplamientos axil-torsión (S_{14}) y corte-flexión (S_{25} y S_{36}) en ambas direcciones.

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1,059 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 0 & 779,49 & \approx 0 \\ 0 & 1,927 \cdot 10^6 & \approx 0 & -126,62 & 0 & 0 \\ 0 & \approx 0 & 1,946 \cdot 10^6 & \approx 0 & 0 & 0 \\ 0 & -126,62 & \approx 0 & 2469,9 & 0 & 0 \\ 779,49 & 0 & 0 & 0 & 37546 & \approx 0 \\ \approx 0 & 0 & 0 & 0 & \approx 0 & 37364 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la curvatura inicial, aparecen acoplamientos axil-flexión (S_{15}) y corte-torsión (S_{23}).

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 7,378 \cdot 10^7 & \approx 0 & \approx 0 & -2,334 \cdot 10^5 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & 3,589 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & 1,013 \cdot 10^5 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 3,589 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & 1,013 \cdot 10^5 \\ -2,334 \cdot 10^5 & \approx 0 & \approx 0 & 5619,9 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & 1,013 \cdot 10^5 & \approx 0 & \approx 0 & 25201 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 1,013 \cdot 10^5 & \approx 0 & \approx 0 & 25201 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la configuración de laminado, aparecen acoplamientos de una magnitud importante axil-torsión (S_{14}) y corte-flexión (S_{25} y S_{36}) en ambas direcciones.

$$\mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} 8,144 \cdot 10^7 & 7,925 \cdot 10^6 & 25549 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ 7,925 \cdot 10^6 & 3,881 \cdot 10^6 & 21118 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ 25549 & 21118 & 4,147 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 5283,4 & -5407,3 & 337,19 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & -5407,3 & 25082 & -354,41 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 337,19 & -354,41 & 26809 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la configuración de laminado, aparecen acoplamientos axil-corte en ambas direcciones, corte-corte, torsión-flexión en ambas direcciones y flexión-flexión algunos de ellos de magnitud importante.

$$\mathbf{S}_6 = \begin{bmatrix} 4,481 \cdot 10^7 & \approx 0 \\ \approx 0 & 2,977 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & 1,074 \cdot 10^5 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 2,977 \cdot 10^6 & \approx 0 & \approx 0 & -1,074 \cdot 10^5 \\ \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 5075,4 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & 1,074 \cdot 10^5 & \approx 0 & \approx 0 & 19821 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & -1,074 \cdot 10^5 & \approx 0 & \approx 0 & 19821 \end{bmatrix}$$

En este caso, debido a la configuración de laminado, aparecen acoplamientos corte-flexión (S_{25} y S_{36}) de gran magnitud.

5. CONCLUSIONES

Se presentó un modelo de deformación de la sección cuyas variables son equivalentes a las de la teoría de Timoshenko y que resulta asintóticamente correcto desde el punto de vista de la energía. El mismo es apto para grandes desplazamientos, secciones no homogéneas y no utiliza ninguna hipótesis restrictiva en cuanto al modo de deformación de la sección, lo cual contempla el libre alabeo de la misma. A través de este modelo se calcularon las matrices de rigidez de varias secciones de vigas con distintas configuraciones de laminado, en algunas de las cuales se consideró torsión y curvatura inicial. En estos resultados se pueden apreciar la aparición de acoplamientos no convencionales entre las medidas de deformación de la viga.

AGRADECIMIENTOS

La investigación conducente a este trabajo fue financiada por la Universidad de Buenos Aires a través de su subsidio I-056 y por la Fundación Antorchas. El primer autor desea expresar su agradecimiento a la UBA y a la Facultad de Ingeniería de la misma por sendas becas otorgadas para realizar sus estudios de doctorado.

REFERENCIAS

- [1] W. Yu, D. H. Hodges, V. Volovoi, and C. E. S. Cesnik. On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams. *Int. J. Sol. and Struct.*, **39**, 5101–5121 (2002).
- [2] D. A. Danielson and D. H. Hodges. Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor. *J. App. Mech.*, **54**, 258–262 (1987).
- [3] F. L. Ponta. The kinematic laplacian equation method. *J. Comput. Phys.*, **207**, 405–426 (2005).
- [4] K. J. Bathe. *Finite element Procedures*. Prentice Hall, (1996).
- [5] C. E. S. Cesnik, V. G. Sutyrin, and D. H. Hodges. Refined theory of composite beams: The role of short-wavelength extrapolation. *Int. J. Sol. and Struct.*, **33**, 1387–1407 (1996).
- [6] A. D. Otero. Métodos numéricos aplicados al diseño de nuevos generadores eólicos. *Mecánica Computacional*, **23**, 2883–2906 (2004).