

FORMULACIÓN VARIACIONAL INTRÍNSECA DE VIGAS Y SU IMPLEMENTACIÓN POR ELEMENTOS ESPECTRALES

Alejandro D. Otero

*Grupo ISEP, Facultad de Ingeniería, UBA, Paseo Colón 850, Buenos Aires C1063ACV, Argentina,
aotero@fi.uba.ar*

Palabras clave: Vigas, Ecuaciones Intrínsecas, Ecuaciones cinemáticas, Elementos Espectrales.

Resumen. En este trabajo se presenta una metodología de resolución de problemas dinámicos de sólidos unidimensionales (vigas), separando la parte dinámica de la cinemática.

Las ecuaciones intrínsecas de la dinámica de vigas, son aquellas en donde no aparecen variables de desplazamientos ni de rotaciones. En este trabajo se presenta una formulación variacional energéticamente consistente de las mismas, donde se utilizan como variables las fuerzas generalizadas y las medidas de deformación de la viga. Esta formulación variacional se discretiza a través del método de elementos espectrales. A partir de la formulación dinámica no lineal discreta se muestran las expresiones simplificadas obtenidas en casos particulares: soluciones lineal y no lineal al problema estacionario, solución dinámica lineal y la solución dinámica lineal obtenida como perturbación de la solución al problema estacionario.

Por otro lado, se presenta el algoritmo que permite recuperar las variables clásicas de vigas, i.e. desplazamientos y giros, una vez resuelto el problema para las variables utilizadas. Este algoritmo, resuelve la ecuación cinemática de las rotaciones, linealizada exactamente, a través de iteraciones en el espacio $so(3)$ de matrices antisimétricas que es el espacio tangente a $SO(3)$ (el conjunto de matrices ortogonales) donde se encuentra la solución buscada. En este caso, también, las ecuaciones se discretizan utilizando la técnica de elementos espectrales. Este algoritmo puede utilizarse complementando la solución iterativa de las ecuaciones intrínsecas en el caso que las cargas dependan de la posición deformada, para ir ajustando las mismas en cada iteración.

Finalmente, se presentan resultados de las soluciones de los casos particulares nombrados anteriormente y se extraen conclusiones.

1. INTRODUCCIÓN

En algunos problemas de la mecánica de sólidos se estudian cuerpos donde una de las dimensiones resulta mucho mayor que las otras dos. A estos cuerpos, que representan elementos estructurales que aparecen frecuentemente en ingeniería, se los denomina vigas y aprovechando la diferencia entre sus dimensiones, se los modela como sólidos unidimensionales. Es decir, la única coordenada presente en el problema es la coordenada axial de la viga. Además, se utilizan propiedades que representan el efecto de la reducción dimensional y las variables que describen la deformación del mismo son los desplazamientos de la línea de referencia y las rotaciones de las secciones de la viga.

Usualmente, las ecuaciones que describen la dinámica de las vigas resultan altamente no lineales debido a que incluyen relaciones cinemáticas que relacionan las medidas de deformación de la viga con los desplazamientos y rotaciones por medio de funciones trascendentales. En este trabajo se propone una metodología donde se desacoplan la parte dinámica y la parte cinemática del problema de forma de tratar de maneras diferenciadas cada una de ellas.

La parte dinámica se resuelve a partir de la formulación *completamente intrínseca* propuesta por Hodges (2003). Las ecuaciones intrínsecas de las vigas, son aquellas donde no aparecen como variables las medidas de los desplazamientos y rotaciones. En este trabajo, se utilizan como variables del problema de dinámica de vigas las fuerzas generalizadas (i.e. fuerzas y momentos resultantes sobre la sección en su intersección con la línea de referencia) y las medidas de deformación de la viga (deformaciones y curvaturas de la línea de referencia). En los casos donde las condiciones de contorno y las cargas no dependen de la configuración deformada, las ecuaciones intrínsecas representan exactamente el comportamiento de la viga, que puede ser no prismática (i.e. con torsión y curvaturas iniciales) y tener secciones complejas, conteniendo a lo sumo términos no lineales cuadráticos en las variables. En problemas donde se cumplen estas condiciones, por ejemplo en una viga empotrada con cargas *seguidoras*, esto reduce considerablemente la complejidad, ya que se pueden resolver completamente prescindiendo de los desplazamientos y rotaciones.

En este trabajo se presenta una formulación variacional energéticamente consistente de las ecuaciones intrínsecas, basada en el trabajo de Patil y Althoff (2006). Esta formulación se discretiza a través del método de elementos espectrales de forma de obtener una interpolación de alto orden de las variables. Esta discretización resulta con continuidad interelemental C^0 en las variables y permite imponer exactamente las condiciones de contorno, a diferencia de la presentada en Patil y Hodges (2006) donde la aproximación es discontinua y las condiciones de contorno se cumplen aproximadamente.

A partir de la formulación dinámica no lineal discreta se muestran las expresiones simplificadas obtenidas en casos particulares:

- Solución lineal al problema estacionario,
- Solución no lineal al problema estacionario,
- Solución dinámica lineal,
- Solución dinámica no lineal en torno del estado estacionario,
- Solución dinámica linealizada en torno del estado estacionario.

Para la cinemática del problema se presenta un algoritmo que permite recuperar las variables clásicas de vigas, i.e. los desplazamientos de la línea de referencia y las rotaciones de las

secciones, una vez resuelta la parte dinámica del problema. Este algoritmo, basado en ideas de [Simo y Vu-Quoc \(1988\)](#), resuelve la ecuación cinemática de las rotaciones, linealizada exactamente, a través de iteraciones en el espacio $so(3)$ de matrices antisimétricas que es el espacio tangente a $SO(3)$ que es el conjunto de matrices ortogonales donde se encuentra la solución buscada. $SO(3)$ no es un espacio vectorial sino una variedad diferencial. En este caso, también, las ecuaciones se discretizan utilizando la técnica de elementos espectrales. Este algoritmo puede utilizarse complementando la solución iterativa de las ecuaciones intrínsecas en el caso que las cargas dependan de la posición deformada, para ir ajustando las mismas en cada iteración.

En la parte final del trabajo se muestran resultados de la validación de ambas partes de esta metodología.

1.1. Método de Elementos Espectrales

El método de elementos espectrales es una implementación particular de la versión p de los elementos finitos hp . Propuesto originalmente veinte años atrás ([Patera \(1984\)](#); [Karniadakis et al. \(1985\)](#)) para evitar las restricciones de los métodos espectrales globales de ser utilizables sólo en dominios simples, este método multidominio de alto orden permite refinamientos locales manteniendo la convergencia acelerada propia de las discretizaciones espectrales ([Henderson y Karniadakis \(1995\)](#)). Este método posee convergencia espectral que resulta mayor que cualquier método algebraico para soluciones suaves.

El método de elementos espectrales puede utilizar cualquier polinomio de Jacobi para formar sus funciones de prueba, sin embargo, las opciones más comunes son los polinomios de Chebyshev o Legendre. Comunmente, se eligen los puntos de la cuadratura de Gauss-Lobatto como puntos de colocación, es decir como nodos de los elementos. Esto da funciones de forma ortogonales, lo que implica que las matrices de masa resultan diagonales. La ventaja de este método es que los polinomios de cualquier orden pueden generarse automáticamente junto con la correspondiente regla de integración.

En este trabajo utilizamos un típico elemento isoparamétrico espectral donde se utilizan polinomios interpolantes de alto orden para aproximar las variables dentro de cada elemento. Los nodos corresponden a los puntos de Gauss-Lobatto, lo que para elementos de alto orden resulta más económico que los nodos espaciados en forma equidistante ([Hourigan et al. \(2001\)](#)). En un elemento de orden p , $n = p + 1$ es el número de nodos en el elemento. De esta forma, la continuidad interelemental de las variables interpoladas es C^0 . En la figura 1 se muestran la ubicación de los nodos y las funciones de forma correspondientes en distintos elementos espectrales.

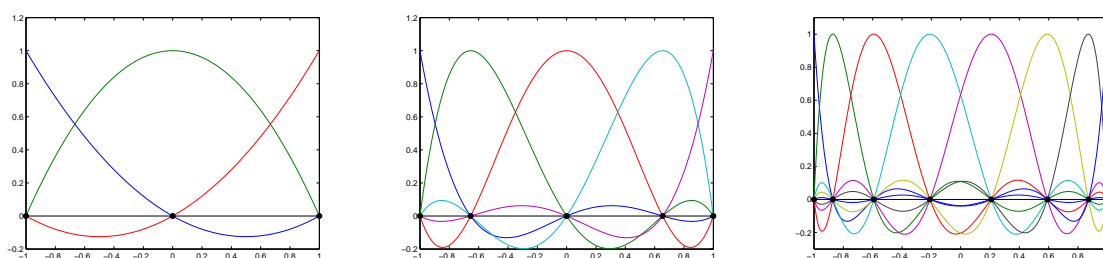


Figura 1: Funciones de forma para elementos espectrales unidimensionales de 3, 5 y 8 nodos.

Las integrales involucradas se evalúan por medio de la cuadratura de Gauss-Legendre-Lobatto (GLL). Aunque, en realidad, la cuadratura GLL no resulta ser la regla de integración exacta, esto es particularmente económico computacionalmente ya que sólo un número limitado de nodos

contribuyen a la ecuación correspondiente a un nodo determinado, debido a que los puntos de integración coinciden con los nodos del elemento. La cuadratura GLL se ha utilizado desde hace varios años mostrando muy buenos resultados (ver, entre otros, [Thompson et al. \(1996, 2001\)](#); [Hourigan et al. \(2001\)](#); [Sheard et al. \(2004\)](#)). Experiencias llevadas a cabo por [Giraldo \(1998\)](#) indicaron que para polinomios de ordenes $p \geq 4$, los resultados no mostraron diferencias entre la integración con la cuadratura GLL y la integración con la integración exacta de Gauss-Legendre (GL) clásica.

Además, debido a su gran precisión, los métodos espectrales son *minimizadores de memoria* ([Boyd \(2000\)](#)). Incluso cuando se requiera una precisión relativamente baja, las aproximaciones de alto orden permiten alcanzar el error requerido con un número considerablemente menor de nodos.

2. ECUACIONES INTRÍNSECAS DE LA VIGA

Las ecuaciones intrínsecas, propuestas en [Hodges \(2003\)](#), resultan ser geoméricamente exactas en la representación de la dinámica de vigas anisótropas con torsión y curvaturas iniciales. Estas ecuaciones están dadas por

$$\mathbf{F}' + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \mathbf{F} + \mathbf{f} = \dot{\mathbf{P}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{P} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}' + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \mathbf{M} + (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \mathbf{F} + \mathbf{m} = \dot{\mathbf{H}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{P} \quad (2)$$

$$\mathbf{V}' + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \mathbf{V} + (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Omega}' + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\kappa}} \quad (4)$$

donde $\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ F_3]^T$ y $\mathbf{M} = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T$ son la fuerza y momento resultantes de los esfuerzos internos, $\mathbf{V} = [V_1 \ V_2 \ V_3]^T$ es la velocidad de los puntos de la línea de referencia y $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$ la velocidad angular de la sección, ambas medidas en un marco de referencia inercial. $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ P_3]^T$ y $\mathbf{H} = [H_1 \ H_2 \ H_3]^T$ son los vectores de cantidad de movimiento lineal y angular que resultan conjugados de las velocidades lineal y angular. $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$ y $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]^T$ son la fuerza y momento distribuidos a lo largo de la viga. Todas las cantidades nombradas están representadas en la terna de la configuración deformada. $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]^T$ son la torsión y curvaturas de la configuración inicial. $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{11} \ 2\gamma_{12} \ 2\gamma_{13}]^T$ y $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3]^T$ son las medidas de deformación de la viga correspondientes a estiramientos y distorsiones por un lado y a torsión y curvaturas por el otro, que resultan conjugados energéticos de las fuerzas y momentos resultantes, todas referidas a una terna correspondiente a la terna de la configuración de referencia rotada luego de la deformación.

Además, $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ y el tilde ($\tilde{\square}$) representa al tensor asociado al vector correspondiente a través del producto vectorial, de forma que dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se cumple la relación $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, por esto se lo denomina operador producto vectorial. La prima (\square') indica derivación respecto de la coordenada a lo largo de la línea de referencia X^1 y el punto ($\dot{\square}$) indica derivación respecto de la coordenada temporal.

Las fuerzas y momentos resultantes se relacionan con las medidas de deformación a través de la relación constitutiva

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbb{R} & \mathbb{S} \\ \mathbb{S}^T & \mathbb{T} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \tilde{\mathbb{C}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} \quad (5)$$

donde la matriz de flexibilidad de la sección $\bar{\mathbb{C}}$, que depende de las propiedades materiales, la geometría de la sección y de la torsión y curvaturas iniciales, puede obtenerse de un modelo de rigidez de la sección como el presentado en [Otero et al. \(2005\)](#).

Las velocidades generalizadas y las cantidades de movimiento generalizadas se relacionan según

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^T & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbb{I}} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

donde $\bar{\mathbb{I}}$ es la matriz de inercia de la sección, que depende de la densidad de los materiales y de la geometría de la sección.

2.1. Formulación Variacional Intrínseca

Para obtener la formulación variacional de las ecuaciones intrínsecas, se pesan cada una de las ecuaciones 1 a 4 en forma energéticamente consistente ([Patil y Althoff \(2006\)](#)), se suman y se integran sobre todo el dominio de análisis.

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \left\{ \delta \mathbf{V}^T \left[\mathbf{F}' + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \mathbf{F} + \mathbf{f} - \dot{\mathbf{P}} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{P} \right] + \right. \\ & + \delta \boldsymbol{\Omega}^T \left[\mathbf{M}' + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \mathbf{M} + (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \mathbf{F} + \mathbf{m} - \dot{\mathbf{H}} - \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} - \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{P} \right] + \\ & + \delta \mathbf{F}^T \left[\mathbf{V}' + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \mathbf{V} + (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \boldsymbol{\Omega} - \dot{\boldsymbol{\gamma}} \right] + \\ & \left. + \delta \mathbf{F}^T \left[\boldsymbol{\Omega}' + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \boldsymbol{\Omega} - \dot{\boldsymbol{\kappa}} \right] \right\} dX^1 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde ℓ es el largo de la viga.

A fin de escribir la ecuación 7 en forma más compacta se agrupan las medidas de deformación en el vector $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$, las fuerzas y momentos resultantes en el vector de fuerzas generalizadas $\bar{\mathbf{F}}$, las cantidades de movimiento lineal y angular en el vector de cantidades de movimiento generalizadas $\bar{\mathbf{P}}$, las velocidades lineales y angulares en el vector de velocidades generalizadas $\bar{\mathbf{V}}$ y las fuerzas y momentos distribuidos en el vector de cargas distribuidas generalizadas $\bar{\mathbf{f}}$, i.e.

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

De esta forma, la relación constitutiva resulta $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \bar{\mathbb{C}} \bar{\mathbf{F}}$ y la relación entre velocidades generalizadas y las cantidades de movimiento generalizadas, $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbb{I}} \bar{\mathbf{V}}$.

Definiendo las siguientes matrices,

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{e}}_1 & \tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\kappa}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} & \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{V}} & \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

de donde, por las propiedades del operador producto vectorial, resultan las identidades

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix} = -\hat{\mathbf{k}}^T, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\kappa}} & \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} = -\hat{\boldsymbol{\gamma}}^T, \quad (10)$$

y utilizando la relación constitutiva 5 y la relación entre velocidades y cantidades de movimiento 6 a fin de reducir la presencia de las medidas de deformación y las cantidades de movimiento

como incógnitas, la formulación variacional de la ecuación 7 puede escribirse como

$$\int_0^\ell \left\{ \delta \bar{\mathbf{V}}^T \left[\bar{\mathbf{F}}' + (\hat{\mathbf{k}} + \hat{\gamma}) \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbb{I}} \dot{\bar{\mathbf{V}}} - \hat{\mathbf{V}} \bar{\mathbb{I}} \bar{\mathbf{V}} \right] + \delta \bar{\mathbf{F}}^T \left[\bar{\mathbf{V}}' - (\hat{\mathbf{k}}^T + \hat{\gamma}^T) \bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbb{C}} \dot{\bar{\mathbf{F}}} \right] \right\} dX^1 = 0. \quad (11)$$

2.2. Discretización de la Formulación Variacional

Partiendo de la ecuación 11 y desarrollando los productos dentro de ella se identifican diferentes términos a ser discretizados

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \left[\underbrace{\delta \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbb{I}} \dot{\bar{\mathbf{V}}}}_1 + \underbrace{\delta \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbb{C}} \dot{\bar{\mathbf{F}}}}_2 \right] dX^1 = \\ & \int_0^\ell \left[\underbrace{\delta \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{F}}'}_3 + \underbrace{\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{F}}}_4 + \underbrace{\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\gamma} \bar{\mathbf{F}}}_5 + \underbrace{\delta \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{f}}}_6 - \underbrace{\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} \bar{\mathbb{I}} \bar{\mathbf{V}}}_7 + \right. \\ & \left. + \underbrace{\delta \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{V}}'}_8 - \underbrace{\delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{V}}}_9 - \underbrace{\delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\gamma}^T \bar{\mathbf{V}}}_{10} \right] dX^1. \end{aligned} \quad (12)$$

Se forma el vector de grados de libertad nodales elemental como

$$\mathbf{Q}^e = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} V_1^1 & V_2^1 & V_3^1 & \Omega_1^1 & \Omega_2^1 & \Omega_3^1 & F_1^1 & F_2^1 & F_3^1 & M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 & \cdots \\ \cdots & V_1^n & V_2^n & V_3^n & \Omega_1^n & \Omega_2^n & \Omega_3^n & F_1^n & F_2^n & F_3^n & M_1^n & M_2^n & M_3^n \end{array} \right]^T \quad (13)$$

donde el supraíndice e indica el número de elemento y, en las variables V , Ω , F y M , los subíndices indican la componente en la dirección respectiva en la terna deformada y los supraíndices indican el número de nodo del elemento.

Las variables $\bar{\mathbf{V}}$ y $\bar{\mathbf{F}}$ se interpolan dentro de cada elemento como

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \mathbf{Q}^e \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e \mathbf{Q}^e \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e &= \left[\Phi_1 \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_2 \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \cdots \quad \Phi_n \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \right], \\ \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e &= \left[\mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_1 \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_n \right] \end{aligned}$$

y

$$\Phi_i = h_i(t) \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

donde $\mathbf{I}_{6 \times 6}$ es la matriz identidad de 6×6 , $\mathbf{0}_{6 \times 6}$ es la matriz de ceros de 6×6 , $h_i(t)$ es la función de forma asociada al nodo i y t es la coordenada natural del elemento.

Las derivadas de las variables $\bar{\mathbf{V}}$ y $\bar{\mathbf{F}}$ respecto de la coordenada X^1 : $\bar{\mathbf{V}}'$ y $\bar{\mathbf{F}}'$ respectivamente se interpolan dentro de cada elemento como

$$\bar{\mathbf{V}}' = \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \mathbf{Q}^e \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{F}}' = \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{F}}}^e \mathbf{Q}^e \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{V}}}^e &= J^{-1} \left[\Phi_{1,t} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_{2,t} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \cdots \quad \Phi_{n,t} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \right], \\ \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{F}}}^e &= J^{-1} \left[\mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_{1,t} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_{2,t} \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \Phi_{n,t} \right] \end{aligned}$$

y

$$\Phi_{i,t} = \frac{\partial h_i(t)}{\partial t} \mathbf{I}_{6 \times 6}, \quad J = \frac{\partial X^1}{\partial t}.$$

Reemplazando las interpolaciones de las velocidades y cantidades de movimiento generalizadas y sus derivadas en la ecuación 12 se llega a las expresiones que siguen. De los primeros dos términos de dicha ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{I}} \dot{\bar{\mathbf{V}}} + \delta \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{C}} \dot{\bar{\mathbf{F}}} \right] dX^1 &= \int_{-1}^1 \delta \mathbf{Q}^{eT} \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \bar{\mathbf{I}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e + \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e \right] \dot{\mathbf{Q}}^e J dt = \\ &= \delta \mathbf{Q}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \bar{\mathbf{I}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e + \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e \right] J dt}_{\mathbf{M}^e} \dot{\mathbf{Q}}^e. \end{aligned} \quad (16)$$

De los términos 3 y 8

$$\begin{aligned} \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{F}}' + \delta \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{V}}' \right] dX^1 &= \int_{-1}^1 \delta \mathbf{Q}^{eT} \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{F}}}^e + \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] \mathbf{Q}^e J dt = \\ &= \delta \mathbf{Q}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{F}}}^e + \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] J dt}_{\mathbf{K}_1^e} \mathbf{Q}^e. \end{aligned} \quad (17)$$

De los términos 4 y 9

$$\begin{aligned} \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{F}} - \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{V}} \right] dX^1 &= \int_{-1}^1 \delta \mathbf{Q}^{eT} \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e - \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \hat{\mathbf{k}}^T \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] \mathbf{Q}^e J dt = \\ &= \delta \mathbf{Q}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e - \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \hat{\mathbf{k}}^T \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] J dt}_{\mathbf{K}_2^e} \mathbf{Q}^e. \end{aligned} \quad (18)$$

En la matriz \mathbf{K}_2^e aparecen los efectos de la torsión y curvaturas iniciales, por lo tanto, si la viga es prismática esta matriz será nula.

El término 6 se discretiza interpolando las cargas generalizadas $\bar{\mathbf{f}}$ dentro del elemento según $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{f}}}^e \bar{\mathbf{q}}$ donde

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 & m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1^n & f_2^n & f_3^n & m_1^n & m_2^n & m_3^n \end{bmatrix} \quad (19)$$

contienen los valores de las cargas generalizadas en los nodos. La discretización del término respectivo resulta

$$\begin{aligned} \int_{\ell^e} \delta \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{f}} dX^1 &= \int_{-1}^1 \delta \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{f}}}^e \bar{\mathbf{q}}^e J dt \\ &= \delta \mathbf{Q}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{f}}}^e J dt}_{\mathbf{K}_q^e} \bar{\mathbf{q}}^e. \end{aligned} \quad (20)$$

Agrupando los términos 5, 7 y 10 resulta

$$\mathbf{B}^e(\{\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{F}}\}; \{\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{F}}\}) = \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\gamma} \bar{\mathbf{F}} - \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} \mathbb{I} \bar{\mathbf{V}} - \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\gamma}^T \bar{\mathbf{V}} \right] dX^1. \quad (21)$$

En la matriz $\hat{\mathbf{V}}$ aparecen las componentes de la variable $\bar{\mathbf{V}}$ y la matriz $\hat{\gamma}$ depende de la variable $\bar{\mathbf{F}}$ a través de la ecuación constitutiva 5, por lo tanto la integral de la ecuación 21 resulta ser una forma bilineal en las variables $\bar{\mathbf{V}}$ y $\bar{\mathbf{F}}$. Esta forma bilineal se denomina en adelante $\mathbf{B}^e(\{\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{F}}\}; \{\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{F}}\})$. De acuerdo al tipo de problema a resolver, puede resultar necesario linealizar la forma bilineal \mathbf{B}^e , para ello es útil despejar una serie de identidades. Considerando 2 conjuntos de variables $\bar{\mathbf{V}}$ y $\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{Q}}_1 = \{\bar{\mathbf{V}}_1, \bar{\mathbf{F}}_1\}$ y $\bar{\mathbf{Q}}_2 = \{\bar{\mathbf{V}}_2, \bar{\mathbf{F}}_2\}$ e identificando las matrices y vectores asociados a cada uno de ellos con los subíndices 1 y 2 respectivamente, se hallan las siguientes identidades teniendo en cuenta las propiedades del operador producto vectorial

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 \bar{\mathbf{F}}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\kappa}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_1 \mathbf{F}_2 \\ \tilde{\gamma}_1 \mathbf{F}_2 + \tilde{\kappa}_1 \mathbf{M}_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -\tilde{\mathbf{F}}_2 \kappa_1 \\ -\tilde{\mathbf{F}}_2 \gamma_1 - \tilde{\mathbf{M}}_2 \kappa_1 \end{Bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 & \tilde{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{F}}_2} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \kappa_1 \end{Bmatrix} = -\hat{\mathbf{F}}_2 \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{F}}_1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_1 \mathbb{I} \bar{\mathbf{V}}_2 &= \hat{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 & \tilde{\Omega}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{H}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\Omega}_1 \mathbf{P}_2 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \mathbf{P}_2 + \tilde{\Omega}_1 \mathbf{H}_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -\tilde{\mathbf{P}}_2 \Omega_1 \\ -\tilde{\mathbf{P}}_2 \mathbf{V}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_2 \Omega_1 \end{Bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_2 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 & \tilde{\mathbf{H}}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{P}}_2} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \Omega_1 \end{Bmatrix} = -\hat{\mathbf{P}}_2 \bar{\mathbf{V}}_1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1^T \bar{\mathbf{V}}_2 &= - \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\gamma}_1 \\ \mathbf{0} & \tilde{\kappa}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \Omega_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_1 \mathbf{V}_2 + \tilde{\gamma}_1 \Omega_2 \\ \tilde{\kappa}_1 \Omega_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_2 \kappa_1 + \tilde{\Omega}_2 \gamma_1 \\ \tilde{\Omega}_2 \kappa_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\mathbf{V}}_2 \\ \mathbf{0} & \tilde{\Omega}_2 \end{bmatrix}}_{-\hat{\mathbf{V}}_2^T} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \kappa_1 \end{Bmatrix} = -\hat{\mathbf{V}}_2^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{F}}_1. \end{aligned} \quad (24)$$

La linealización de la forma bilineal $\mathbf{B}^e(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{Q}})$ se obtiene evaluándola para una configuración incrementada $\check{\mathbf{Q}} + \Delta \mathbf{Q}$ a partir de una configuración base $\check{\mathbf{Q}}$ conocida y despreciando los términos correspondientes a $\mathbf{B}^e(\Delta \mathbf{Q}, \Delta \mathbf{Q})$, i.e.

$$\mathbf{B}^e(\check{\mathbf{Q}} + \Delta \mathbf{Q}, \check{\mathbf{Q}} + \Delta \mathbf{Q}) \approx \mathbf{B}^e(\check{\mathbf{Q}}, \check{\mathbf{Q}}) + \mathbf{B}^e(\check{\mathbf{Q}}, \Delta \mathbf{Q}) + \mathbf{B}^e(\Delta \mathbf{Q}, \check{\mathbf{Q}}). \quad (25)$$

Discretizando la forma bilineal para evaluar el primer término de 25, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\gamma} \bar{\mathbf{F}} - \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} \mathbb{I} \bar{\mathbf{V}} - \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\gamma}^T \bar{\mathbf{V}} \right] dX^1 = \\ \delta \mathbf{Q}^{eT} \underbrace{\int_{-1}^1 \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\gamma} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e - \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\mathbf{V}} \mathbb{I} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e - \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \hat{\gamma}^T \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] \mathbf{Q}^e J dt}_{\mathbf{B}_{\check{\mathbf{Q}}}^e(\mathbf{Q}^e)}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde las matrices $\hat{\mathbf{V}}$ y $\hat{\gamma}$ se evalúan en cada punto de integración utilizando las fórmulas de interpolación 14 y se indica con $\mathbf{B}_Q^e(\mathbf{Q}^e)$ el vector asociado con la versión discreta de la forma cuadrática $\mathbf{B}^e(\mathbf{Q}^e, \mathbf{Q}^e)$.

Para evaluar la suma del segundo y tercer términos del lado derecho de la ecuación 25 se puede utilizar la 21 y las identidades 22 a 24 para obtener una nueva identidad,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^e(\bar{\mathbf{Q}}_1, \bar{\mathbf{Q}}_2) + \mathbf{B}^e(\bar{\mathbf{Q}}_2, \bar{\mathbf{Q}}_1) &= \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\gamma}_1 \bar{\mathbf{F}}_2 - \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbb{I}} \bar{\mathbf{V}}_2 - \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\gamma}_1^T \bar{\mathbf{V}}_2 + \right. \\ &+ \left. \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\gamma}_2 \bar{\mathbf{F}}_1 - \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}}_2 \bar{\mathbb{I}} \bar{\mathbf{V}}_1 - \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\gamma}_2^T \bar{\mathbf{V}}_1 \right] dX^1 = \\ &= \int_{\ell^e} \left[\delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\gamma}_1 \bar{\mathbf{F}}_2 - \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbb{I}} \bar{\mathbf{V}}_2 - \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\gamma}_1^T \bar{\mathbf{V}}_2 - \right. \\ &- \left. \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{F}}_1 \bar{\mathbb{C}} \bar{\mathbf{F}}_2 + \delta \bar{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{P}}_1 \bar{\mathbf{V}}_2 + \delta \bar{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{V}}_1^T \bar{\mathbb{C}} \bar{\mathbf{F}}_2 \right] dX^1 \end{aligned} \quad (27)$$

Discretizando la suma de términos de la ecuación 27 se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^e(\bar{\mathbf{Q}}_1, \bar{\mathbf{Q}}_2) + \mathbf{B}^e(\bar{\mathbf{Q}}_2, \bar{\mathbf{Q}}_1) &= \\ &= \delta \mathbf{Q}^{eT} \int_{-1}^1 \left[\mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\gamma}_1 \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e - \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbb{I}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e - \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \hat{\gamma}_1^T \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e - \right. \\ &- \left. \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\mathbf{F}}_1 \bar{\mathbb{C}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e + \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e + \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \hat{\mathbf{V}}_1^T \bar{\mathbb{C}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e \right] J dt \mathbf{Q}_2^e = \\ &= \delta \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{K}_N^e(\mathbf{Q}_1^e) \mathbf{Q}_2^e \equiv \delta \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{K}_N^e(\mathbf{Q}_2^e) \mathbf{Q}_1^e \end{aligned} \quad (28)$$

La matriz $\mathbf{K}_N^e(\mathbf{Q}_1^e)$ puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_N^e(\mathbf{Q}_1^e) &= \int_{-1}^1 \left\{ \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^{eT} \left[\hat{\gamma}_1 \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e - \hat{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbb{I}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e - \hat{\mathbf{F}}_1 \bar{\mathbb{C}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e + \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] + \right. \\ &+ \left. \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^{eT} \left[\hat{\mathbf{V}}_1^T \bar{\mathbb{C}} \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{F}}}^e - \hat{\gamma}_1^T \mathbf{H}_{\bar{\mathbf{V}}}^e \right] \right\} J dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Según lo anterior el lado izquierdo de la ecuación 25 se aproxima linealizado y discretizado como

$$\mathbf{B}^e(\check{\mathbf{Q}} + \Delta \mathbf{Q}, \check{\mathbf{Q}} + \Delta \mathbf{Q}) \approx \delta \mathbf{Q}^{eT} [\mathbf{B}_Q^e(\check{\mathbf{Q}}^e) + \mathbf{K}_N^e(\check{\mathbf{Q}}^e) \Delta \mathbf{Q}] \quad (30)$$

Las matrices elementales \mathbf{M}^e , \mathbf{K}_1^e , \mathbf{K}_2^e y \mathbf{K}_q^e se ensamblan en las respectivas matrices globales \mathbf{M} , \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 y \mathbf{K}_q . Las matrices elementales $\mathbf{K}_N^e(\mathbf{Q}^e)$ se ensamblan en la matriz global $\mathbf{K}_N(\mathbf{Q})$ que ahora depende del vector de grados de libertad global, lo mismo ocurre con el vector $\mathbf{B}_Q(\mathbf{Q})$ que se obtiene ensamblando los vectores elementales $\mathbf{B}_Q^e(\mathbf{Q}^e)$.

En base a esta discretización pueden plantearse diversas soluciones al problema de viga.

2.2.1. Solución lineal al problema estacionario

En el problema estacionario desaparecen los términos correspondientes a las variaciones temporales, términos 1 y 2 de la ecuación 12. Si se acepta la hipótesis que las deformaciones y velocidades generalizadas son pequeñas, pueden despreciarse los términos 5, 7 y 10 de dicha ecuación. Además, si las cargas no dependen de la configuración deformada, la solución \mathbf{Q} se obtiene resolviendo

$$(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{Q} = -\mathbf{K}_q \bar{\mathbf{q}} \quad (31)$$

con las condiciones de contorno correspondientes.

2.2.2. Solución no lineal al problema estacionario

En caso de no despreciar los términos no lineales, hay que linealizarlos a fin de hallar iterativamente la solución al problema. Entonces, la solución \mathbf{Q} se obtiene resolviendo iterativamente

$$[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_N(\mathbf{Q}^{(i)})] \Delta \mathbf{Q} = -\mathbf{K}_q \bar{\mathbf{q}} - (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{Q}^{(i)} - \mathbf{B}_Q(\mathbf{Q}^{(i)}) \quad (32)$$

con las condiciones de contorno correspondientes. El vector de grados de libertad nodales se actualiza en la iteración $i + 1$ como

$$\mathbf{Q}^{(i+1)} = \mathbf{Q}^{(i)} + \Delta \mathbf{Q}. \quad (33)$$

En este caso, además, pueden considerarse cargas que dependan de la configuración deformada modificando en cada iteración el vector $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}^{(i)})$.

En la ecuación 32, $[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_N(\mathbf{Q}^{(i)})]$ es el jacobiano requerido para la iteración por el método Newton–Raphson y como las no linealidades máximas son de segundo orden, el método converge.

2.2.3. Solución dinámica lineal

Si se acepta la hipótesis que las deformaciones y velocidades generalizadas son pequeñas, despreciando los términos 5, 7, y 10 de la ecuación 12, se plantea el problema dinámico lineal, que puede ser resuelto a través de un *solver* para ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Estos *solvers* requieren que, para un instante de tiempo t_n dado, se les provea de la evaluación de una función \mathcal{F} tal que

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_n, t_n). \quad (34)$$

En el caso de la solución dinámica lineal la función \mathcal{F} a evaluar resulta

$$\mathcal{F} = \mathbf{M}^{-1} [(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{Q}_n + \mathbf{K}_q \bar{\mathbf{q}}] \quad (35)$$

con las condiciones de contorno correspondientes y con condiciones iniciales \mathbf{Q}_0 y $\dot{\mathbf{Q}}_0$.

Otra forma de resolver el problema dinámico lineal es discretizando la derivada temporal como

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{Q}_{n+1} - \mathbf{Q}_n) \quad (36)$$

y, evaluando la ecuación a resolver en $t = \alpha t_{n+1} + (1 - \alpha) t_n$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, resulta

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{Q}_{n+1} - \mathbf{Q}_n] - (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) [\alpha \mathbf{Q}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{Q}_n] + \mathbf{K}_q [\alpha \bar{\mathbf{q}}_{n+1} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{q}}_n] = \mathbf{0} \quad (37)$$

donde según el valor del parámetro α se tiene un método explícito ($\alpha = 0$), Crank–Nicholson ($\alpha = 1/2$) o completamente implícito ($\alpha = 1$) y una vez fijado el paso de tiempo Δt se calcula la solución \mathbf{Q}_{n+1} correspondiente al instante t_{n+1} .

2.2.4. Solución dinámica no lineal

La solución del problema dinámico no lineal, también puede obtenerse utilizando un *solver* para ecuaciones diferenciales ordinarias, en este caso la función \mathcal{F} a evaluar en cada instante de tiempo t dado es

$$\mathcal{F} = \mathbf{M}^{-1} [(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{Q}_n + \mathbf{B}_Q(\mathbf{Q}_n) + \mathbf{K}_q \bar{\mathbf{q}}] \quad (38)$$

con las condiciones de contorno correspondientes y con condiciones iniciales \mathbf{Q}_0 y $\dot{\mathbf{Q}}_0$.

De la misma manera que en el caso anterior, el problema se puede resolver discretizando la parte temporal, pero en este caso, si se utiliza un método no explícito habrá que resolver iterativamente el problema en cada instante de tiempo.

2.2.5. Soluciones no lineales en torno del estado estacionario

En caso de que la carga aplicada sea de la forma

$$\bar{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{q}(t) \quad (39)$$

la solución será de la forma

$$\bar{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}(t) \quad (40)$$

donde $\hat{\mathbf{Q}}$ es la solución del estado estacionario. Las soluciones de la parte temporal $\mathbf{Q}(t)$ pueden resolverse con un *solver* para ecuaciones diferenciales ordinarias, y en este caso la función \mathcal{F} a evaluar será

$$\mathcal{F} = \mathbf{M}^{-1} \left[\hat{\mathbf{K}} \mathbf{Q}_n + \mathbf{B}_Q(\mathbf{Q}_n) + \mathbf{K}_q \mathbf{q}(t_n) \right] \quad (41)$$

con las condiciones de contorno correspondientes, con condiciones iniciales \mathbf{Q}_0 y $\dot{\mathbf{Q}}_0$ y donde

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_N(\hat{\mathbf{Q}}). \quad (42)$$

La solución completa se obtiene como la suma de la solución del estado estacionario y la solución de la parte temporal obtenida de integrar la función \mathcal{F} de la ecuación 41.

2.2.6. Soluciones linealizadas en torno del estado estacionario

De la misma forma que en el caso anterior se pueden obtener las ecuaciones linealizadas en torno del estado estacionario utilizando como función en el *solver* ODE,

$$\mathcal{F} = \mathbf{M}^{-1} \left[\hat{\mathbf{K}} \mathbf{Q}_n + \mathbf{K}_q \mathbf{q}(t_n) \right] \quad (43)$$

con las condiciones de contorno correspondientes y condiciones iniciales \mathbf{Q}_0 y $\dot{\mathbf{Q}}_0$.

También se pueden calcular los modos de deformación linealizados en torno al estado estacionario, resolviendo el problema de autovalores

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (44)$$

En este caso, como la ecuación esta planteada en el espacio de fases, los autovalores serán pares de números complejos conjugados de parte real nula. La parte imaginaria de cada uno indica la frecuencia del modo asociado.

3. ECUACIONES CINEMÁTICAS

Las ecuaciones cinemáticas de la viga son aquellas que relacionan las medidas de deformación, en este caso curvaturas κ y deformaciones de la línea de referencia γ , con los desplazamientos generalizados, es decir, los desplazamientos de la línea de referencia y las rotaciones de las secciones de la viga. En el caso de las rotaciones, existe una variedad de maneras de elegir las variables que las representan. Todas ellas dan lugar a expresiones de la matriz de cosenos

directores que involucran funciones trascendentales, resultando en relaciones altamente no lineales. La elección de estas variables puede resultar en relaciones más o menos complicadas. En este caso, optamos por trabajar directamente con la matriz de cosenos directores asociada a la rotación \mathbf{C} y relacionarla a través del mapeo exponencial con el vector $\boldsymbol{\theta}$ que representa con su dirección el eje de rotación y con su módulo la intensidad de la misma, i.e. $\mathbf{C} = \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}]$. Las ecuaciones cinemáticas en este caso resultan (ver Hodges (1990))

$$\mathbf{u}' - \mathbf{C}^T (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (45)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{C}' \mathbf{C}^T - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^T = \mathbf{0}, \quad (46)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de rotación de la configuración de referencia a la deformada y \mathbf{u} es el vector de desplazamientos en las ternas de la configuración de referencia, ambos función de la coordenada axial de la viga.

Las matrices de cambio de base de la configuración de referencia a la deformada de cada sección, $\mathbf{C} = \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}]$, representan rotaciones finitas y pertenecen al conjunto de matrices ortogonales de 3×3

$$SO(3) = \{ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{C}) = 1 \}$$

que no es un espacio vectorial sino una variedad diferencial.

Por otro lado, también consideraremos las matrices pertenecientes al conjunto de matrices antisimétricas:

$$so(3) = \{ \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T = \mathbf{0} \}$$

Los elementos de $so(3)$ representan rotaciones infinitesimales que pueden considerarse rotaciones finitas linealizadas en torno a la identidad, por lo tanto $so(3)$ es el espacio tangente a $SO(3)$ en $\mathbf{I} \in SO(3)$. Los elementos $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{C}}$ del espacio tangente a un elemento $\mathbf{C} \in SO(3)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{C}} \in T_{\mathbf{C}}SO(3)$, pueden representarse como campos vectoriales invariantes a derecha, es decir $T_{\mathbf{C}}SO(3) = \{ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{C}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{C}, \forall \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in so(3) \}$. Geométricamente esto representa una rotación infinitesimal superpuesta a una rotación finita. $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{C}}$, cuyo vector axial es $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$, representa un tensor espacial con componentes θ_i en la base espacial.

Proceso de actualización iterativo de la matriz \mathbf{C}

La matriz $\mathbf{C}_n \in SO(3)$ en un determinado punto de la viga correspondiente a un instante t_n , se actualiza en el instante t_{n+1} con la matriz de rotación incremental $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n \in so(3)$ según $\mathbf{C}_{n+1} = \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n] \mathbf{C}_n$, de esta forma se asegura que $\mathbf{C}_{n+1} \in SO(3)$.

Dado un instante t_n en el cual se conoce la configuración, las matrices actualizadas en cada iteración, indicada por el superíndice, serán

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(i)} = \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}] \mathbf{C}_n \quad (47)$$

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(i+1)} = \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i+1)}] \mathbf{C}_n \quad (48)$$

lo cual tiene sentido ya que tanto $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)} \mathbf{C}_n$ como $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i+1)} \mathbf{C}_n$ están en el espacio tangente $T_{\mathbf{C}_n}SO(3)$. Luego, utilizando el mapeo exponencial incremental entre dos iteraciones sucesivas

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(i+1)} = \exp[\widetilde{\Delta \boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \mathbf{C}_{n+1}^{(i)} \quad (49)$$

donde en este caso $\widetilde{\Delta\theta}_{n+1}^{(i)} \mathbf{C}_{n+1}^{(i)}$ está en el espacio tangente $T_{\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}} SO(3)$. De esta forma combinando 47,48 y 49, resulta

$$\exp[\tilde{\theta}_n^{(i+1)}] = \exp[\widetilde{\Delta\theta}_{n+1}^{(i)}] \exp[\tilde{\theta}_n^{(i)}] \quad (50)$$

En la figura 2 se representa a $SO(3)$, con los espacios tangentes a los distintos elementos y se esquematiza el proceso de actualización iterativo

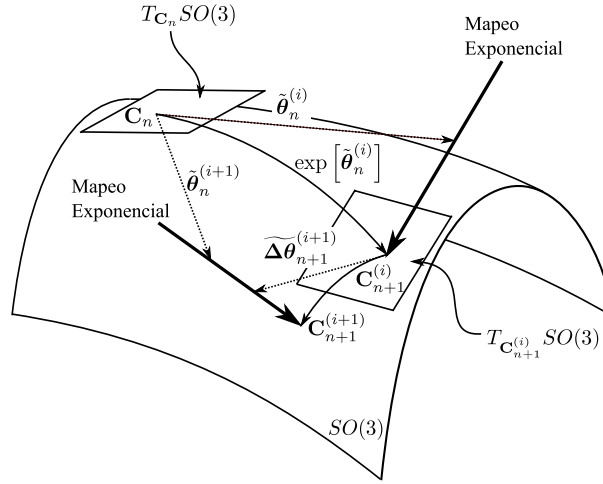


Figura 2: Representación esquemática del proceso de actualización de la matriz \mathbf{C} en $SO(3)$ y los espacios tangente a sus elementos. Las líneas punteadas representan elementos de los espacios tangentes, mientras que las líneas continuas representan trayectorias en $SO(3)$

Tomando como tensor de rotaciones incrementales a $\widetilde{\Delta\theta}_{n+1}^{(i)}$ con $\widetilde{\Delta\theta}_{n+1}^{(i)} \mathbf{C}_{n+1}^{(i)} \in T_{\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}} SO(3)$ se puede construir una curva en $SO(3)$ de matrices \mathbf{C} perturbadas $\xi \rightarrow \mathbf{C}_{n+1,\xi}^{(i)}$ donde

$$\mathbf{C}_{n+1,\xi}^{(i)} = \exp[\xi \widetilde{\Delta\theta}_{n+1}^{(i)}] \exp[\tilde{\theta}_n^{(i)}] \mathbf{C}_n \quad (51)$$

De donde se puede hallar la parte lineal de la matriz $\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}$

$$\mathbb{L}\mathbf{C}_{n+1}^{(i)} = \left. \frac{d}{d\xi} \right|_{\xi=0} \mathbf{C}_{n+1,\xi}^{(i)} = \widetilde{\Delta\theta}_{n+1}^{(i)} \underbrace{\exp[\tilde{\theta}_n^{(i)}] \mathbf{C}_n}_{\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}} \quad (52)$$

Considerando lo anterior, se puede construir un proceso iterativo de actualización de las matrices de cosenos directores que puede resumirse como:

1. Linealizar las expresiones donde aparezca la matriz \mathbf{C} como $\mathbb{L}f(\mathbf{C}) = f(\mathbf{C}^{(i)}) + f(\mathbb{L}\mathbf{C}^{(i)})$, donde las matrices $\mathbf{C}^{(i)}$ son las obtenidas en la iteración anterior y $\mathbb{L}\mathbf{C}^{(i)} = \widetilde{\Delta\theta}^{(i)} \mathbf{C}^{(i)}$
2. Resolver para $\widetilde{\Delta\theta}^{(i)}$
3. Actualizar las matrices \mathbf{C} como

$$\mathbf{C}^{(i+1)} = \exp[\widetilde{\Delta\theta}^{(i)}] \mathbf{C}^{(i)} \quad (53)$$

4. Verificar convergencia

En la primera iteración, las matrices $\mathbf{C}^{(0)}$ pueden tomarse como las matrices de un paso de tiempo anterior o, ante la falta de una configuración válida, simplemente como la identidad. Este proceso de linealización de las matrices de cosenos directores es equivalente al utilizado en [Simo y Vu-Quoc \(1988\)](#), con la diferencia que en dicho trabajo se lo utiliza para actualizar las velocidades y aceleraciones angulares en un proceso de integración tipo *Newmark* y no para resolver directamente las ecuaciones cinemáticas.

3.1. Formulación Variacional de las Ecuaciones Cinemáticas

Comenzando con la ecuación para las rotaciones, se ve que la ecuación 46 representa una ecuación matricial en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Para obtener la formulación variacional, se pesa premultiplicando por una matriz de rotaciones virtuales, se toma la traza y se integra sobre la longitud del dominio de análisis

$$\int_0^\ell \text{tr} \left[\delta \mathbf{C}^T \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{C}' \mathbf{C}^T - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^T \right) \right] dX^1 = 0. \quad (54)$$

Distribuyendo en los distintos términos y agrupando los que resultan similares se obtiene

$$\int_0^\ell \left\{ \underbrace{\text{tr} \left[\delta \mathbf{C}^T \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \right]}_1 + \underbrace{\text{tr} \left(\delta \mathbf{C}^T \mathbf{C}' \mathbf{C}^T \right)}_2 - \underbrace{\text{tr} \left(\delta \mathbf{C}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^T \right)}_3 \right\} dX^1 = 0. \quad (55)$$

Las matrices \mathbf{C} se aproximan para ser resueltas iterativamente según el proceso descrito anteriormente. Las matrices de cosenos directores virtuales $\delta \mathbf{C}$ se eligen en el espacio tangente a $SO(3)$ en \mathbf{C} , $T_{\mathbf{C}}SO(3)$, de forma que resultan

$$\delta \mathbf{C} = \widetilde{\delta \boldsymbol{\theta}} \mathbf{C}. \quad (56)$$

Analizando por separado los términos de la ecuación 55, el primero resulta

$$\text{tr} \left[\delta \mathbf{C}^T \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \right] = \text{tr} \left[\mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta \boldsymbol{\theta}}^T \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \right]. \quad (57)$$

Operando, puede escribirse como

$$\text{tr} \left[\mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta \boldsymbol{\theta}}^T \left(\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \right) \right] = \left(\delta \theta_1 \quad \delta \theta_2 \quad \delta \theta_3 \right) \mathbf{F}_{\boldsymbol{\kappa}} = \left(\delta \theta_1 \quad \delta \theta_2 \quad \delta \theta_3 \right) \mathbf{M}_{\boldsymbol{\kappa}} \begin{Bmatrix} \kappa_1 + K_1 \\ \kappa_2 + K_2 \\ \kappa_3 + K_3 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

donde a través de la matriz $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\kappa}} = \text{tr} \left(\mathbf{C}^{(i)} \mathbf{I} - \mathbf{C}^{(i)T} \right)$ se realizan las operaciones equivalentes al segundo miembro de 57, despejando como factores de premultiplicación al vector de rotaciones virtuales $\widetilde{\delta \boldsymbol{\theta}}$ y de postmultiplicación al vector de curvaturas $\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}$.

Analizando el segundo término de la ecuación 55, dado que $\mathbf{C} = \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}]$, la derivada de esta matriz respecto de la coordenada espacial X^1 será

$$\mathbf{C}' = \tilde{\boldsymbol{\theta}}' \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}] = \tilde{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{C}. \quad (59)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación 50 para obtener una aproximación de $\tilde{\boldsymbol{\theta}}'$ se tiene

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i+1)} \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i+1)}] = \widetilde{\Delta \boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)} \exp[\widetilde{\Delta \boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}] + \exp[\widetilde{\Delta \boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)} \exp[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}].$$

Reemplazando la ecuación 50 en el lado izquierdo y posmultiplicando ambos miembros por $\exp[-\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}]$ resulta

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i+1)} \exp[\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] = \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)} \exp[\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] + \exp[\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)}$$

y posmultiplicando por $\exp[-\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}]$ se llega a

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i+1)} = \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)} + \exp[\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{(i)} \exp[-\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}].$$

Entonces, suponiendo que $\boldsymbol{\theta}_n^{(i+1)}$ es pequeño se cumple que $\exp[\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \approx \exp[-\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}_{n+1}^{(i)}] \approx \mathbf{I}$ y se puede aproximar

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} \approx \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} + \Delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}.$$

Entonces

$$\delta\mathbf{C}^T \mathbf{C}' \mathbf{C}^T = \delta\mathbf{C}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}' = \underbrace{\delta\mathbf{C}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{(i)}}_{2a} + \underbrace{\delta\mathbf{C}^T \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}'}_{2b}. \quad (60)$$

El término 2a da lugar a

$$\text{tr} \left(\mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta\boldsymbol{\theta}}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}'^{(i)} \right) = \begin{pmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{pmatrix} \mathbf{F}_\theta = \begin{pmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{pmatrix} \mathbf{M}_\kappa \begin{Bmatrix} \theta_1^{(i)} \\ \theta_2^{(i)} \\ \theta_3^{(i)} \end{Bmatrix}. \quad (61)$$

El término 2b da lugar a

$$\text{tr} \left(\mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta\boldsymbol{\theta}}^T \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}} \right) = \begin{pmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{pmatrix} \mathbf{M}_\kappa \begin{Bmatrix} \Delta\theta_1' \\ \Delta\theta_2' \\ \Delta\theta_3' \end{Bmatrix}. \quad (62)$$

El tercer término de la ecuación 55 es no lineal en la matriz \mathbf{C} . Linealizando el producto $(\delta\mathbf{C}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^T)$ resulta

$$\mathbb{L} \left(\delta\mathbf{C}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^T \right) = \underbrace{\delta\mathbf{C}^T \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^{(i)T}}_{3a} + \underbrace{\delta\mathbf{C}^T \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}} \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^{(i)T}}_{3b} + \underbrace{\delta\mathbf{C}^T \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}^T}_{3c}. \quad (63)$$

El término indicado como 3a se desarrolla como

$$\text{tr} \left[\mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^{(i)T} \right] = \begin{pmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{pmatrix} \mathbf{F}_\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{pmatrix} \mathbf{M}_\mathbf{K} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

donde a través de la matriz $\mathbf{M}_\mathbf{K}$ que depende de la matriz de rotación de la iteración anterior, $\mathbf{C}^{(i)}$, se llevan a cabo las operaciones del primer miembro.

Los términos 3b y 3c dan lugar a

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta\boldsymbol{\theta}}^T \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}} \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^{(i)T} + \mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\delta\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}^{(i)T} \widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}^T \right] &= \\ &= \begin{pmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{pmatrix} \mathbf{K}_\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

donde la matriz \mathbf{K}_K utilizada para realizar las operaciones del primer miembro depende de la matriz $\mathbf{C}^{(i)}$ y del vector de torsión y curvaturas inicial \mathbf{K} .

Finalmente la linealización de la formulación variacional de la ecuación 46 resulta

$$\int_0^\ell \delta \boldsymbol{\theta}^T \left[-\mathbf{K}_K \Delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{M}_K \Delta \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{M}_K (\mathbf{K} + \boldsymbol{\kappa}) - \mathbf{M}_K \mathbf{K} + \mathbf{M}_K \boldsymbol{\theta}'^{(i)} \right] dX^1 = 0 \quad (66)$$

La formulación variacional de la ecuación 45 se obtiene pesando con un vector de desplazamientos virtuales e integrando sobre la longitud del dominio de análisis

$$\int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \left[\mathbf{u}' - \mathbf{C}^T (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u} \right] dX^1 = 0 \quad (67)$$

En esta ecuación aparece, también, la matriz de cosenos directores \mathbf{C} . Entonces, debe resolverse primero la ecuación 66 para obtener las rotaciones y luego la de los desplazamientos.

3.2. Discretización de la Formulación Variacional de las Ecuaciones Cinemáticas

A fin de discretizar la ecuación cinemática de las rotaciones linealizada (ecuación 66) se escriben los vectores elementales de rotaciones nodales, de rotaciones incrementales nodales y de rotaciones virtuales nodales, respectivamente como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}^e &= [\theta_1^1 \quad \theta_2^1 \quad \theta_3^1 \quad \theta_1^2 \quad \theta_2^2 \quad \theta_3^2 \quad \cdots \quad \theta_1^n \quad \theta_2^n \quad \theta_3^n]^T, \\ \Delta \boldsymbol{\Theta}^e &= [\Delta \theta_1^1 \quad \Delta \theta_2^1 \quad \Delta \theta_3^1 \quad \Delta \theta_1^2 \quad \Delta \theta_2^2 \quad \Delta \theta_3^2 \quad \cdots \quad \Delta \theta_1^n \quad \Delta \theta_2^n \quad \Delta \theta_3^n]^T, \\ \delta \boldsymbol{\Theta}^e &= [\delta \theta_1^1 \quad \delta \theta_2^1 \quad \delta \theta_3^1 \quad \delta \theta_1^2 \quad \delta \theta_2^2 \quad \delta \theta_3^2 \quad \cdots \quad \delta \theta_1^n \quad \delta \theta_2^n \quad \delta \theta_3^n]^T, \end{aligned} \quad (68)$$

donde los subíndices indican la dirección de la componente del vector y los supraíndices indican el número de nodo del elemento. Utilizando el método de elementos espectrales los vectores de rotaciones, de rotaciones incrementales y de rotaciones virtuales se interpolan dentro de cada elemento como

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}^e \boldsymbol{\Theta}^e, \quad \Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}^e \Delta \boldsymbol{\Theta}^e \quad \text{y} \quad \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}^e \delta \boldsymbol{\Theta}^e; \quad (69)$$

donde

$$\mathbf{H}^e = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n] \quad \text{y} \quad \Psi_i = h_i(t) \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

siendo $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ la matriz identidad de 3×3 y $h_i(t)$ la función de forma asociada al nodo i .

De la misma forma se interpolan las derivadas de dichos vectores respecto de la coordenada X^1 :

$$\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{B}^e \boldsymbol{\Theta}^e, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{B}^e \Delta \boldsymbol{\Theta}^e \quad \text{y} \quad \delta \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{B}^e \delta \boldsymbol{\Theta}^e; \quad (70)$$

donde

$$\mathbf{B}^e = J^{-1} [\Psi_{1,t} \quad \Psi_{2,t} \quad \cdots \quad \Psi_{n,t}], \quad \Psi_{i,t} = \frac{\partial h_i(t)}{\partial t} \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \text{y} \quad J = \frac{\partial X^1}{\partial t}.$$

Reemplazando las interpolaciones de los vectores de rotaciones, de rotaciones virtuales y de rotaciones incrementales y sus derivadas en la ecuación 66 y planteando la integral sobre la longitud de un elemento, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell^e} \delta \Theta^{eT} \mathbf{H}^{eT} \left[-\mathbf{K}_K \mathbf{H}^e \Delta \Theta^e + \mathbf{M}_\kappa \mathbf{B}^e \Delta \Theta^e + \right. \\
& \left. + \mathbf{M}_\kappa (\mathbf{K} + \kappa) - \mathbf{M}_K \mathbf{K} + \mathbf{M}_\kappa \mathbf{B}^e \Theta^{e(i)} \right] dX^1 = \\
& \delta \Theta^{eT} \int_{-1}^1 \mathbf{H}^{eT} [-\mathbf{K}_K \mathbf{H}^e + \mathbf{M}_\kappa \mathbf{B}^e] J dt \Delta \Theta^e + \\
& + \delta \Theta^{eT} \int_{-1}^1 \mathbf{H}^{eT} \left[\mathbf{M}_\kappa (\mathbf{K} + \kappa) - \mathbf{M}_K \mathbf{K} + \mathbf{M}_\kappa \mathbf{B}^e \Theta^{e(i)} \right] J dt = 0. \quad (71)
\end{aligned}$$

De esta forma, la matriz de rigidez del elemento e en la iteración i será:

$$\mathbf{K}_\theta^{e(i)} = \int_{-1}^1 \mathbf{H}^{eT} [\mathbf{M}_\kappa \mathbf{B}^e - \mathbf{K}_K \mathbf{H}^e] J dt \quad (72)$$

y el respectivo vector de cargas

$$\mathbf{F}_\theta^{e(i)} = \int_{-1}^1 \mathbf{H}^{eT} \left[\mathbf{M}_K \mathbf{K} - \mathbf{M}_\kappa (\mathbf{K} + \kappa) - \mathbf{M}_\kappa \mathbf{B}^e \Theta^{e(i)} \right] J dt. \quad (73)$$

Cabe recordar que \mathbf{M}_K y \mathbf{K}_K dependen de la matriz de rotación de la iteración anterior $\mathbf{C}^{(i)}$.

Ensamblando las matrices y vectores de cargas elementales $\mathbf{K}_\theta^{e(i)}$ y $\mathbf{F}_\theta^{e(i)}$ en una matriz de rigidez y un vector de cargas globales $\mathbf{K}_\theta^{(i)}$ y $\mathbf{F}_\theta^{(i)}$ el sistema de ecuaciones a resolver en cada iteración es

$$\mathbf{K}_\theta^{(i)} \Delta \Theta = \mathbf{F}_\theta^{(i)} \quad (74)$$

con las condiciones de contorno correspondientes, donde $\Delta \Theta$ es el vector de rotaciones globales incremental y en cada nodo del problema se actualiza la matriz \mathbf{C} según la expresión 53, y luego se obtiene el vector de rotaciones globales $\theta^{(i+1)}$ de $\mathbf{C}^{(i+1)} = \exp[\tilde{\theta}^{(i+1)}]$ hasta alcanzar la convergencia según algún criterio.

En el caso de la ecuación de los desplazamientos, para discretizarla se escribe el vector de desplazamientos elemental como

$$\mathbf{U}^e = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \cdots \quad u_1^n \quad u_2^n \quad u_3^n]^T \quad (75)$$

donde los subíndices indican la componente del vector y los supraíndices indican el número de nodo del elemento. Utilizando las matrices \mathbf{H}^e y \mathbf{B}^e definidas anteriormente los desplazamientos y sus variaciones, así como sus derivadas se interpolan según el método de elementos espectrales dentro de cada elemento como

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^e \mathbf{U}^e, \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{H}^e \delta \mathbf{U}^e \quad \text{y} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e. \quad (76)$$

Reemplazando estas interpolaciones en la ecuación 67 y planteando la integral sobre la longitud de un elemento, se obtiene

$$\int_{-1}^1 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{H}^{eT} \left[\underbrace{\mathbf{B}^e \mathbf{U}^e}_1 + \underbrace{\tilde{\kappa} \mathbf{H}^e \mathbf{U}^e}_2 - \underbrace{\mathbf{C}^T (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_1}_3 \right] J dt = 0. \quad (77)$$

Los primeros 2 términos dan lugar a la matriz de rigidez del elemento e de la forma

$$\mathbf{K}_u^e = \int_{-1}^1 \mathbf{H}^{eT} (\mathbf{B}^e + \tilde{\kappa} \mathbf{H}^e) J dt. \quad (78)$$

En el tercer término, aparece el efecto de la matriz de cosenos directores \mathbf{C} y actúa como término de cargas de la forma

$$\mathbf{F}_u^e = \int_{-1}^1 \mathbf{H}^{eT} [\mathbf{C}^T (\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1] J dt. \quad (79)$$

La matriz \mathbf{K}_u^e y el vector \mathbf{F}_u^e se ensamblan respectivamente en la matriz global \mathbf{K}_u y el vector global \mathbf{F}_u . Los desplazamientos nodales se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{K}_u \mathbf{U} = \mathbf{F}_u \quad (80)$$

con las condiciones de contorno correspondientes.

4. EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

4.1. Validación de la Formulación para las Ecuaciones Intrínsecas

La validación de la metodología presentada, puede llevarse a cabo de muchas formas. En este trabajo se presenta la validación y el estudio de convergencia a través del cálculo de las frecuencias de los modos lineales de deformación en torno de un estado estacionario dado. Esto tiene la ventaja de poder comparar con soluciones obtenidas analíticamente y resultados numéricos publicados por otros autores. En el proceso de cálculo de los modos lineales, se utiliza la solución del estado estacionario, por lo tanto de esta forma se verifica que el método resulta efectivo tanto en la representación de la parte estacionaria como de la parte dinámica del problema. En los cálculos se utilizó una viga con las características presentadas en la tabla 1.

Largo	16 m
Cuerda	1 m
Densidad lineal	0,75 kg/m
Momento de Inercia (50 % de la cuerda)	0,1 kg m
Centro de corte	(50 % de la cuerda)
Centro de gravedad	(50 % de la cuerda)
Rigidez a flexión	$2 \cdot 10^4 N m^2$
Rigidez a torsión	$1 \cdot 10^4 N m^2$
Rigidez a flexión (dirección de la cuerda)	$4 \cdot 10^6 N m^2$
Rigidez axil y al corte	ínf

Tabla 1: Propiedades de las vigas utilizadas en la validación

A esta viga se le calcularon las frecuencias de sus modos de deformación en tres situaciones diferentes:

Viga empotrada: con condiciones de contorno de rotación y velocidad nulas;

Viga empotrada con rotación: en este caso se impusieron como condiciones de borde en el empotramiento una rotación $\omega_e = 0$ en torno a un eje perpendicular a la cuerda y $v_e = 0$, es decir que el eje pasa por el extremo empotrado;

Viga empotrada con rotación descentrada: en este caso se impusieron como condiciones de borde en el empotramiento una rotación $\omega_e = 0$ y una velocidad $v_e = 51,03m s^{-1}$, equivalente a que el eje se encuentre a una distancia igual al largo de la viga del extremo empotrado, es decir un *offset* igual a ℓ .

En la tabla 2 se presentan los resultados de los cálculos comparados con los valores exactos. En el caso de los modos de flexión, los valores se obtuvieron de [Wright et al. \(1982\)](#) y en los modos de torsión, de [Patil y Althoff \(2006\)](#). En dicha tabla se presentan para tres discretizaciones diferentes, donde se indica con N el número de elementos espectrales en la viga y con p el orden de interpolación:

$N = 9, p = 1$: equivalente al método clásico de elementos finitos lineales,

$N = 3, p = 3$: elementos espectrales de 4 nodos, i.e. orden 3,

$N = 1, p = 9$: equivalente a un método espectral puro, con un solo elemento de orden 10.

Estas tres discretizaciones se eligieron para comparar con los resultados presentados por [Patil y Hodges \(2006\)](#), con los cuales se encontró gran coincidencia en el orden del error obtenido. El método utilizado en [Patil y Hodges \(2006\)](#) consiste en elementos finitos de orden variable, pero en este caso sin continuidad interelemental, lo que puede resultar en saltos en las funciones interpoladas y cumplimiento de las condiciones de contorno sólo en forma aproximada.

Modo	Exacto	$N = 9 \quad p = 1$	$N = 3 \quad p = 3$	$N = 1 \quad p = 9$
Viga empotrada: $\omega_e = 0$ y $v_e = 0$				
1° flexión	2,2428	2,2428	2,2428	2,2428
2° flexión	14,056	13,925	14,041	14,056
3° flexión	39,356	38,850	38,758	39,356
4° flexión	77,122	75,366	78,598	77,046
5° flexión	127,49	123,21	133,32	127,17
1° torsión	31,05	31,045	31,046	31,046
2° torsión	93,14	93,097	93,108	93,137
Viga empotrada con rotación: $\omega_e = 3,189s^{-1}$ y $v_e = 0$				
1° flexión	4,1141	4,1142	4,1141	4,1141
2° flexión	16,232	15,739	16,219	16,232
3° flexión	41,593	41,079	40,945	41,593
4° flexión	79,459	77,781	81,032	79,383
5° flexión	129,89	125,95	136,07	129,57
Viga empotrada con rotación descentrada: $\omega_e = 3,189s^{-1}$ y $v_e = 51,03m s^{-1}$				
1° flexión	5,7030	5,7020	5,7021	5,7025
2° flexión	18,724	19,283	18,718	18,723
3° flexión	44,500	43,966	43,767	44,499

Tabla 2: Frecuencias calculadas para distintas discretizaciones

En las figuras 3 y 4 se muestran gráficos logarítmicos de error para el primer caso estudiado, la viga empotrada sin rotación. En ellas se ve cómo las curvas de refinamiento h , es decir manteniendo el orden constante y aumentando la cantidad de elementos, dan como resultados

líneas rectas cuya pendiente aumenta con el orden. En cambio, las curvas de refinamiento p , es decir aumentando el orden manteniendo la cantidad de elementos constante, dan las curvas de pendiente en aumento características de la convergencia espectral. En la figura 3 se muestra el error en la frecuencia del primer modo de flexión y en la figura 4 el del primer modo de torsión.

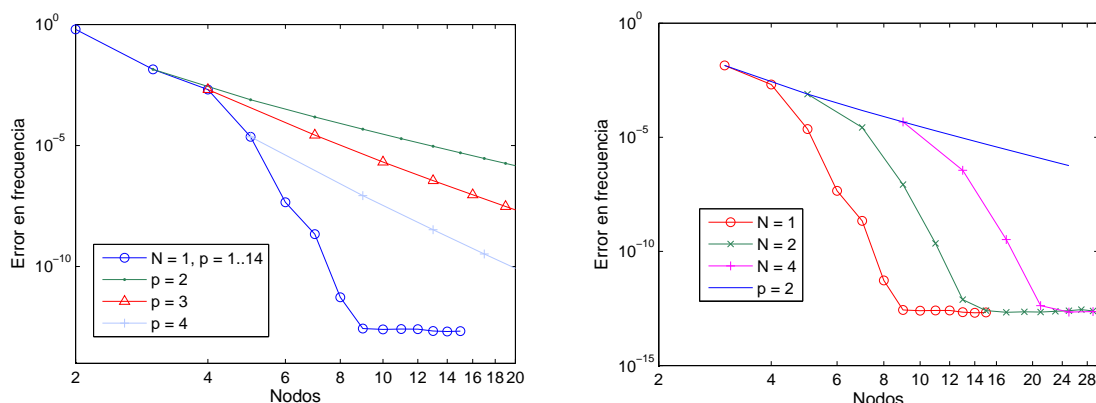


Figura 3: Viga empotrada sin rotación: 1^{er} modo de flexión

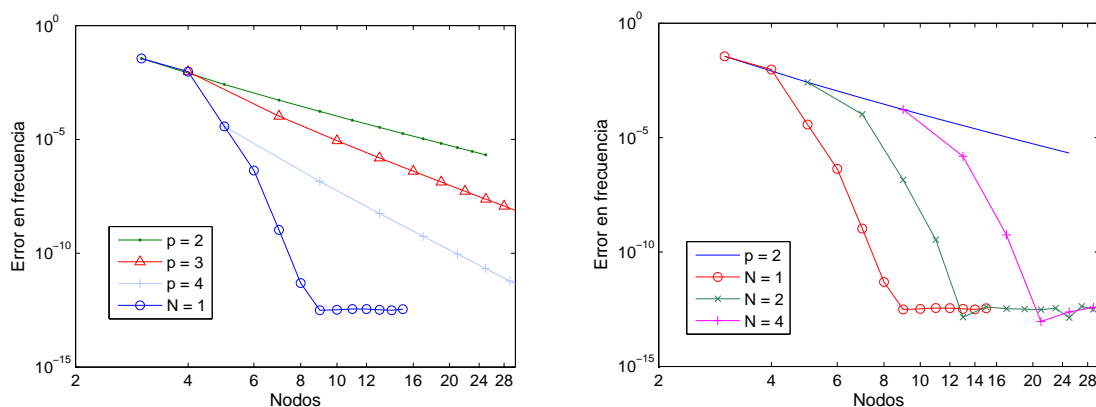


Figura 4: Viga empotrada sin rotación: 1^{er} modo de torsión

En las figuras 5 y 6 se muestran gráficos logarítmicos de error para el caso de la viga con rotación y se observa que la convergencia resulta similar a la del primer caso. En la figura 5 se muestra el error en la frecuencia del primer modo de flexión y en la figura 6 el del tercer modo.

En todas las curvas de refinamiento p se ve como rápidamente el error alcanza el piso del error numérico de la máquina, más allá del cual la solución no mejora. En los casos presentados, se llegó al estado estacionario, para una tolerancia del orden de 10^{-10} en norma infinito, en menos de tres iteraciones.

4.2. Validación de la Formulación para las Ecuaciones Cinemáticas

Para validar la metodología de resolución de las ecuaciones cinemáticas lo más adecuado es plantear una viga hipotética con sus características geométricas y sobre esta viga, plantear *a priori* una solución de las rotaciones y desplazamientos. Reemplazando estos valores en las ecuaciones cinemáticas 45 y 46 se obtienen las medidas de deformación γ y κ . Luego con estas

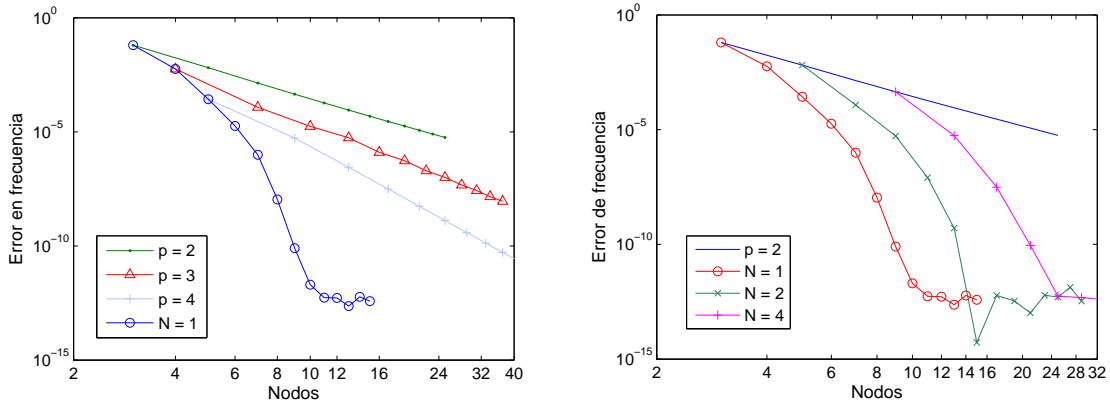


Figura 5: Viga empotrada con rotación ($\omega_e = 3,189s^{-1}$ y $v_e = 0$): 1^{er} modo de flexión

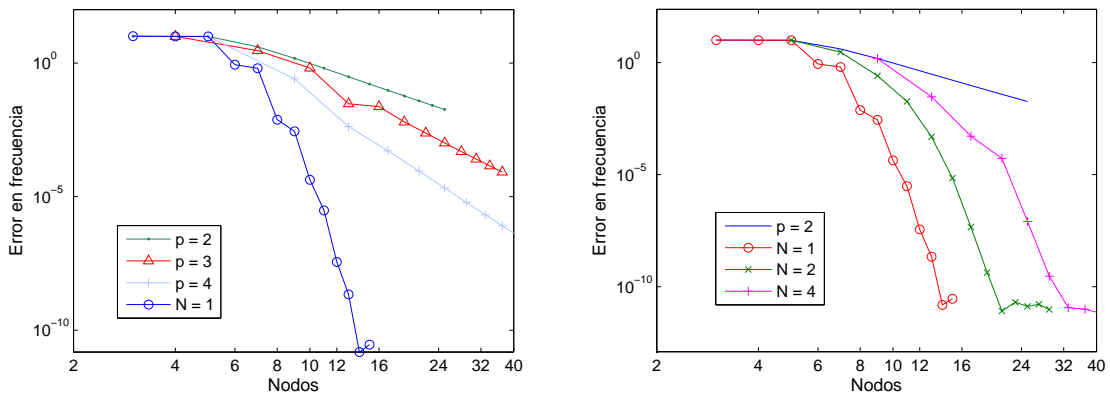


Figura 6: Viga empotrada con rotación descentrada ($\omega_e = 3,189s^{-1}$ y $v_e = 51,03m s^{-1}$): 3^{er} modo de flexión

medidas de deformación y las características de la viga se resuelven las ecuaciones discretizadas 74 y 80, para obtener las rotaciones y desplazamientos que se comparan con los impuestos *a priori*.

A continuación se muestran resultados de las rotaciones obtenidos una viga prismática, o sea $\mathbf{K} = \mathbf{0}$, de largo $\ell = 1$. En este caso, teniendo en cuenta que $\mathbf{C} = \exp[\tilde{\theta}]$, $\mathbf{C}' = \tilde{\theta}' \mathbf{C}$ y que las matrices de cosenos directores son ortogonales, las rotaciones estarán dadas según la ecuación 46 por

$$\boldsymbol{\theta}(X^1) = - \int_0^{X^1} \boldsymbol{\kappa} dX^1. \quad (81)$$

Como ejemplo, se eligieron dos casos simples donde se ve claramente la relación entre las medidas de deformación y las rotaciones. El primero es el caso de una viga con curvatura constante $\kappa_3 = -2$. En la figura 7 se muestran el resultado de las rotaciones y la configuración deformada para una malla de 2 elementos de orden $p = 4$. La solución exacta es $\boldsymbol{\theta}(X^1) = 2 X^1$. Como es lógico, la configuración deformada corresponde a un arco de radio $r = 1/|\kappa_3| = 1/2$.

El segundo caso corresponde a una viga con curvatura con variación lineal $\kappa_3 = -X^1$. En la figura 8 se muestran el resultado de las rotaciones, cuya solución exacta es $\boldsymbol{\theta}(X^1) = \frac{(X^1)^2}{2}$, y la configuración deformada.

En general, la solución se obtiene en menos de tres iteraciones partiendo del vector nulo en

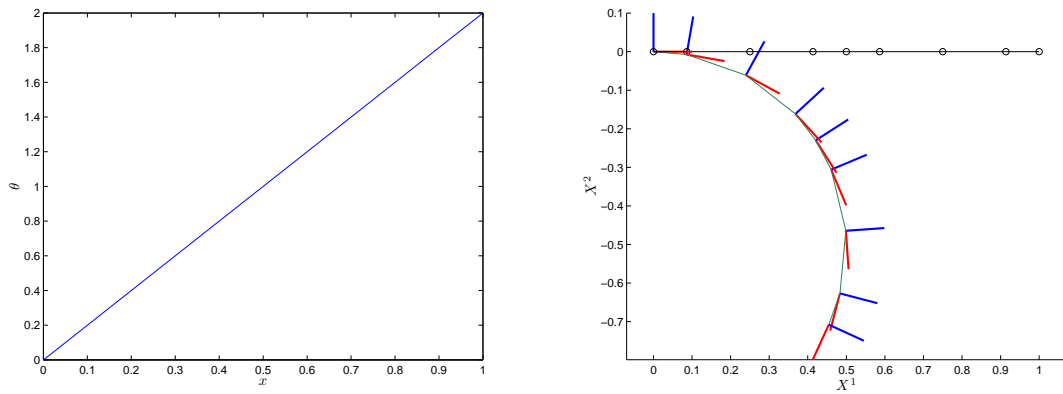


Figura 7: Resultado para una viga prismática con curvatura $\kappa_3 = -2$. Izquierda: componente del vector de rotaciones θ_3 (línea continua). Derecha: configuración sin deformar y deformada con los vectores que indican las ternas en la configuración deformada.

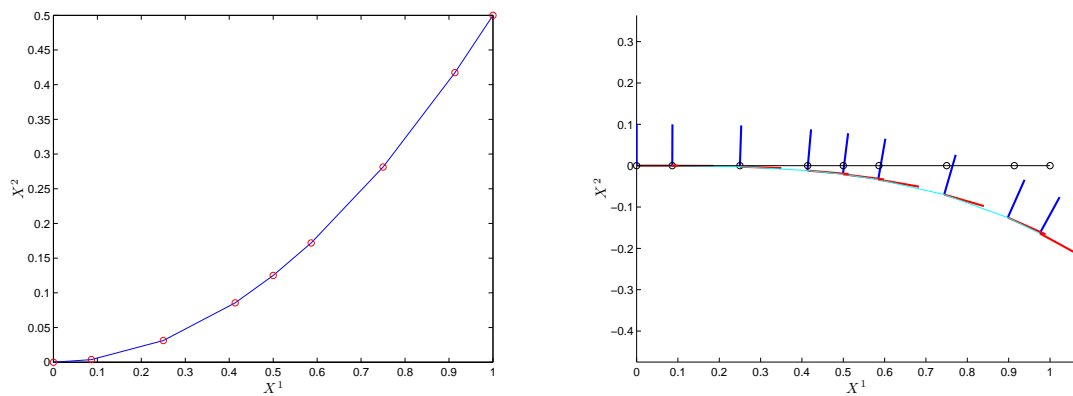


Figura 8: Resultado para una viga prismática con curvatura $\kappa_3 = -X^1$. Izquierda: componente del vector de rotaciones θ_3 (línea continua) y solución exacta (círculos). Derecha: configuración sin deformar y deformada con los vectores que indican las ternas en la configuración deformada.

la primera para tolerancias de 10^{-12} en norma infinito. con lo cual este método resulta ideal para combinar con el antes presentado para las ecuaciones intrínsecas en casos donde las cargas dependan de la configuración deformada.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se presentó una metodología para la simulación de la dinámica de sólidos unidimensionales donde se desacoplan la dinámica y la cinemática del problema. De la parte dinámica resultan ecuaciones no lineales cuadráticas, las que una vez discretizadas se resuelven iterativamente con convergencia asegurada. La ecuación cinemática de las rotaciones, que incluye funciones trascendentales, se resuelve por medio de un método iterativo en el espacio $so(3)$ tangente a $SO(3)$, alcanzando la convergencia en un número de iteraciones mínimo.

Las ecuaciones se discretizan por el método de elementos espectrales. Este método permite variar el orden de interpolación hasta altos ordenes y se verifica la convergencia espectral del método tanto en la parte dinámica como cinemática.

Se validaron las soluciones contra resultados publicados por otros autores y contra soluciones

analíticas.

Los trabajos a futuro en este campo estarán centrados en:

- adaptar la formulación para permitir el estudio de estructuras formadas por varias vigas, como pórticos y reticulados;
- buscar la posibilidad de crear una formulación de tipo mixta con ambas formulaciones, la dinámica y la cinemática.

AGRADECIMIENTOS

La investigación conducente a este trabajo fue financiada por la Universidad de Buenos Aires a través de su subsidio I-056. El autor agradece a la UBA y a la Facultad de Ingeniería de la misma por sendas becas otorgadas para realizar sus estudios de doctorado.

REFERENCIAS

- J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover, Mineola, New York, USA, 2000.
- F. X. Giraldo. The Lagrange–Galerkin spectral element method on unstructured quadrilateral grids. *J. Fluid Mech.*, 147:114–146, 1998.
- R. D. Henderson y G. E. Karniadakis. Unstructured spectral element methods for simulation of turbulent flows. *J. Comput. Phys.*, 122:191–217, 1995.
- D. W. Hodges. A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams. *Int. J. Sol. and Struct.*, 26:1253–1273, 1990.
- D. W. Hodges. Geometrically exact, intrinsic theory for dynamics of curved and twisted anisotropic beams. *AIAA Journal*, 41:1131–1137, 2003.
- K. Hourigan, M. C. Thompson, y B. T. Tan. Self–sustained oscillations in flows around long blunt plates. *J. Fluids Struct.*, 15:387–398, 2001.
- G. E. Karniadakis, E. T. Bullister, y A. T. Patera. A spectral element method for solution of two- and three-dimensional time-dependent incompressible navier-stokes equations. In *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, page 803, New York/Berlin, 1985. Springer-Verlag.
- A. D. Otero, F. L. Ponta, y P. M. Jacovkis. Un modelo de rigidez de vigas para secciones no homogéneas y grandes desplazamientos. *Mecánica Computacional*, 24:1627–1646, 2005.
- A. T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 54:468–488, 1984.
- M. J. Patil y M. Althoff. Energy–consistent, Galerkin approach for the nonlinear dynamics of beams using mixed, intrinsic equations. In *AIAA/ASME/ASCE/AHE/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Reston, Virginia, USA*, pages 1–9. AIAA, 2006.
- M. J. Patil y D. W. Hodges. Variable–order finite element for nonlinear, intrinsic, mixed beams equations. In *62nd Annual Forum and Technology Display of the AHSI, Phoenix, Arizona, USA*, pages 1–10. AHSI, 2006.
- G. J. Sheard, M. C. Thompson, y K. Hourigan. From spheres to circular cylinders: non-axisymmetric transitions in the flow past rings. *J. Fluid Mech.*, 506:45–78, 2004.
- J. C. Simo y L. Vu–Quoc. On the dynamics of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, 66:125–161, 1988.
- M. C. Thompson, K. Hourigan, y J. Sheridan. Three–dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder. *Exp. Therm. and Fluid Science*, 12:190–196, 1996.

- M. C. Thompson, T. Leweke, y C. H. K. Williamson. The physical mechanism of transition in bluff body wakes. *J. Fluids Struct.*, 15:607–616, 2001.
- A. D. Wright, C. E. Smith, R. W. Thresher, y J. L. C. Wang. Vibration modes of centrifugally stiffened beams. *J. App. Mech.*, 49:197–202, 1982.