

PARAMETRIZACIÓN CON LONGITUD DE ARCO EN EL ANÁLISIS ASINTÓTICO DE SISTEMAS IMPERFECTOS

Claudio E. Jougard

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Buenos Aires.
Av. Medrano 951, (1179) Buenos Aires, Argentina.
e-mail: jougard@gmail.com

Palabras Clave: Sistemas estructurales imperfectos, análisis asintótico, longitud de arco.

Resumen. *Los sistemas estructurales reales inevitablemente conllevan algún tipo de imperfección geométrica inherente a su fabricación. La capacidad portante de cierta clase de estructuras, en particular las láminas delgadas, puede ser afectada significativamente por la presencia de imperfecciones geométricas. De particular interés para este tipo de estructuras es la variación de la carga crítica de pandeo λ con la magnitud de las imperfecciones ε , lo que se conoce como el análisis de la sensibilidad a imperfecciones. La descripción de la curva de sensibilidad λ - ε puede ser hecha en forma paramétrica mediante las relaciones $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$. Una elección obvia sería adoptar a la magnitud ε como parámetro t de la curva de sensibilidad, pero para ello es necesario que exista la relación funcional $\lambda(\varepsilon)$ en todo punto de la curva y esto no siempre ocurre. En estos casos puede recurrirse a perturbaciones singulares o utilizar otro parámetro para describir la curva.*

Las curvas de sensibilidad λ - ε son la proyección de curvas multidimensionales de sensibilidad que involucran además los diferentes grados de libertad del sistema, que llamaremos caminos críticos de equilibrio. Para determinar estos caminos en forma paramétrica se propone en este trabajo utilizar a la longitud de arco del camino como parámetro. Esto asegura siempre la existencia de las relaciones funcionales $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ en todo punto de la curva, por lo que no es necesario hacer ninguna distinción entre perturbaciones regulares ó singulares cuando se utilizan aproximaciones asintóticas. Se mostrarán los principales resultados para sensibilidad a imperfecciones de puntos límite y puntos de bifurcación simples, tanto asimétricos como simétricos.

1 INTRODUCCIÓN

La teoría de la estabilidad elástica fue introducida originalmente para sistemas continuos por Koiter¹ y numerosos investigadores han contribuido a un desarrollo similar para sistemas discretos^{2,3}. Un punto de especial atención es el comportamiento estructural ante la presencia de pequeñas imperfecciones en las proximidades de puntos críticos de equilibrio, tales como puntos límites y de bifurcación. La sensibilidad a imperfecciones consiste en estudiar la variación de la carga crítica con la amplitud de las imperfecciones. La descripción de la curva de sensibilidad λ - ε puede ser hecha en forma paramétrica mediante las relaciones $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$. Una elección obvia sería adoptar a la magnitud ε como parámetro t de la curva de sensibilidad, pero para ello es necesario que exista la relación funcional $\lambda(\varepsilon)$ en todo punto de la curva y esto no siempre ocurre. En estos casos puede recurrirse a perturbaciones singulares⁴ o utilizar otro parámetro para describir la curva.

La elección del parámetro utilizado para describir los caminos de equilibrio asume gran importancia cuando se utilizan desarrollos de Taylor de las relaciones paramétricas, pues una elección inadecuada afecta la convergencia de las series. Se propone en este trabajo utilizar a la longitud de arco s del camino como parámetro, esto asegura la existencia de las relaciones funcionales $\lambda(s)$, $\varepsilon(s)$ en todo punto del camino y por ende la convergencia de las series.

2 ANÁLISIS DE SISTEMAS IMPERFECTOS

Consideremos las ecuaciones de equilibrio de un sistema estructural discreto con imperfecciones

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \varepsilon) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde \mathbf{u} es un vector de n coordenadas generalizadas, usualmente asociadas con los desplazamientos de los nodos de la discretización, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ es un vector de fuerzas internas generadas por la deformación de la estructura, \mathbf{p} es un vector de fuerzas externas de referencia y λ es un parámetro de control asociado a la magnitud de las cargas. El parámetro ε está asociado a la magnitud de las imperfecciones. Por ejemplo, si tuviéramos una desviación geométrica respecto de una configuración perfecta de referencia, el parámetro ε mide la magnitud de dicha desviación.

En los sistemas imperfectos resulta de gran interés analizar la evolución de los puntos críticos de equilibrio con el incremento de las imperfecciones, este es, el estudio de la sensibilidad a las imperfecciones.

Las soluciones de las ecuaciones de equilibrio del sistema imperfecto son una familia de curvas que definen una superficie de equilibrio en el espacio de coordenadas \mathbf{u} , λ , ε . Cada una de estas curvas tiene asociado un valor fijo de ε y las llamaremos *caminos imperfectos de equilibrio*. La curva correspondiente a $\varepsilon = 0$ es la respuesta del sistema perfecto y la llamaremos *camino perfecto de equilibrio*. Una familia importante de curvas contenidas en la superficie de equilibrio son las curvas asociadas a la evolución de un punto crítico con las imperfecciones que llamaremos de *caminos críticos de equilibrio* (figura 1).

Los caminos críticos de equilibrio se pueden describir parametricamente. Una

representación paramétrica natural consiste en emplear al parámetro de imperfecciones ε como parámetro del camino crítico definiendo relaciones $\mathbf{u}(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$. La existencia de estas relaciones funcionales implica que debe existir una relación unívoca, continua y diferenciable entre las configuraciones imperfectas y el parámetro ε . Como en general esto no puede ser garantizado a-priori es conveniente utilizar una parametrización más generalizada:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t) \\ \lambda &= \lambda(t) \\ \varepsilon &= \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2)$$

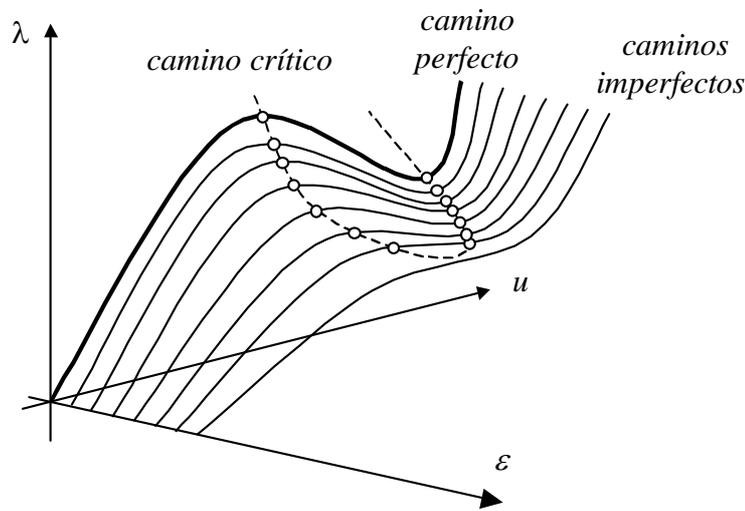


Figura 1: Evolución de un punto crítico con imperfecciones.

Asumiendo que las relaciones funcionales $\mathbf{u}(t)$, $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ están definidas, al menos, en un intervalo de t , y asumiendo que las ecuaciones de equilibrio $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon)$ sean analíticas en las variables \mathbf{u} , λ , ε , esto implica que en ese intervalo de t las variables $\mathbf{u}(t)$, $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ son también funciones analíticas del parámetro t y pueden representarse por series de Taylor como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}^{[0]} + \mathbf{u}^{[1]}t + \mathbf{u}^{[2]}t^2 + \mathbf{u}^{[3]}t^3 + \dots \\ \lambda(t) &= \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]}t + \lambda^{[2]}t^2 + \lambda^{[3]}t^3 + \dots \\ \varepsilon(t) &= \varepsilon^{[0]} + \varepsilon^{[1]}t + \varepsilon^{[2]}t^2 + \varepsilon^{[3]}t^3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

donde hemos indicado al i -ésimo coeficiente de cada serie con un superíndice entre corchetes. Estos coeficientes pueden ser obtenidos a partir de las derivadas paramétricas

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{[m]} &= \frac{1}{m!} \mathbf{u}^{(m)} \Big|_{t=0} \\ \lambda^{[m]} &= \frac{1}{m!} \lambda^{(m)} \Big|_{t=0} \\ \varepsilon^{[m]} &= \frac{1}{m!} \varepsilon^{(m)} \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (4)$$

y hemos usado la notación

$$(\cdot)^{(m)} = \frac{d^m(\cdot)}{dt^m} \quad (5)$$

para indicar la m -ésima derivada con respecto a t y $m!$ es el factorial de m

2.1 Aproximación asintótica de los caminos de equilibrio.

Considere una representación paramétrica $\mathbf{u}(t)$, $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ donde el origen $t = 0$ coincide con una configuración equilibrada E del camino crítico $(\mathbf{u}_E, \lambda_E, \varepsilon_E)$ que satisface las ecuaciones de equilibrio (1). Si derivamos sucesivamente estas ecuaciones respecto del parámetro t y evaluamos en $t = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u \Big|_E \mathbf{u}^{[1]} &= -\mathbf{F}_\lambda \Big|_E \lambda^{[1]} - \mathbf{F}_\varepsilon \Big|_E \varepsilon^{[1]} \\ \mathbf{F}_u \Big|_E \mathbf{u}^{[m]} &= -\mathbf{F}_\lambda \Big|_E \lambda^{[m]} - \mathbf{F}_\varepsilon \Big|_E \varepsilon^{[m]} - \mathbf{r}^{[m]} \quad (m > 1) \end{aligned} \quad (6)$$

donde \mathbf{F}_u , \mathbf{F}_λ son las derivadas parciales respecto de las coordenadas generalizadas u_i y el parámetro de cargas λ , respectivamente. Estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones de equilibrio de m -ésimo orden*³.

Los vectores $\mathbf{r}^{[m]}$ tienen unidades de fuerzas generalizadas y son llamados *vectores de fuerzas residuales imperfectas de m -ésimo orden*, siendo $\mathbf{r}^{[1]} = 0$, y para $m > 1$

$$\mathbf{r}^{[m]} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{p!} \left(\mathbf{F}_u^{(p)} \Big|_E \mathbf{u}^{[m-p]} + \mathbf{F}_\lambda^{(p)} \Big|_E \lambda^{[m-p]} + \mathbf{F}_\varepsilon^{(p)} \Big|_E \varepsilon^{[m-p]} \right) \quad (m > 1) \quad (7)$$

Definiendo a la *matriz de rigidez tangente* como

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{F}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Asumiendo que las ecuaciones de equilibrio $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon)$ sean analíticas en las variables $\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon$ entonces sobre una trayectoria $\mathbf{u}(t), \lambda(t), \varepsilon(t)$ los elementos $F_{i,j}(t)$ de la matriz de rigidez tangente son también funciones analíticas del parámetro t . Por lo tanto podemos expresar a la matriz de rigidez tangente en series de Taylor como:

$$\mathbf{K}_T(t) = \mathbf{K}_T^{[0]} + \mathbf{K}_T^{[1]}t + \mathbf{K}_T^{[2]}t^2 + \mathbf{K}_T^{[3]}t^3 + \dots \quad (9)$$

Donde el primer término de la serie es la matriz de rigidez tangente en la configuración de equilibrio E , esto es:

$$\mathbf{K}_T^{[0]} = \frac{1}{m!} \mathbf{F}_u \Big|_E \quad (10)$$

Notemos que esta matriz aparece en el lado izquierdo de todas las ecuaciones de equilibrio de orden m . Además, definimos a las *matrices de rigidez tangente de m-ésimo orden* como

$$\mathbf{K}_T^{[m]} = \frac{1}{m!} \mathbf{F}_u^{(m)} \Big|_E \quad (11)$$

Si asumimos que el vector de fuerzas de referencia generalizadas \mathbf{p} es constante tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\lambda \Big|_E &= -\mathbf{p} \\ \mathbf{F}_\lambda^{(m)} \Big|_E &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Definimos al vector de fuerzas imperfectas de referencia generalizadas $\mathbf{q}(t)$ como

$$\mathbf{q}(t) = -\mathbf{F}_\varepsilon(t) \quad (13)$$

Asumiendo que las ecuaciones de equilibrio $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon)$ sean analíticas en las variables $\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon$ entonces los elementos de este vector son funciones analíticas del parámetro t y se pueden expresar mediante series de Taylor como:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{[0]} + \mathbf{q}^{[1]}t + \mathbf{q}^{[2]}t^2 + \mathbf{q}^{[3]}t^3 + \dots \quad (14)$$

Donde el primer término de la serie es el vector de fuerzas imperfectas en la configuración de equilibrio E , esto es:

$$\mathbf{q}^{[0]} = -\mathbf{F}_\varepsilon \Big|_E \quad (15)$$

y a los siguientes términos los denominamos *vectores de fuerzas imperfectas de m-ésima orden* que valen

$$\mathbf{q}^{[m]} = -\frac{1}{m!} \mathbf{F}_\varepsilon^{(m)} \Big|_E \quad (16)$$

Luego las ecuaciones de equilibrio de *m-ésimo* orden se pueden escribir como

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T^{[0]} \mathbf{u}^{[1]} = \lambda^{[1]} \mathbf{p} + \varepsilon^{[1]} \mathbf{q}^{[0]} \\ \mathbf{K}_T^{[0]} \mathbf{u}^{[m]} = \lambda^{[m]} \mathbf{p} + \varepsilon^{[m]} \mathbf{q}^{[0]} - \mathbf{r}^{[m]} \end{cases} \quad (m > 1) \quad (17)$$

siendo los vectores de fuerzas residuales imperfectas de *m-ésimo* orden

$$\mathbf{r}^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} (\mathbf{K}_T^{[p]} \mathbf{u}^{[m-p]} - \varepsilon^{[m-p]} \mathbf{q}^{[p]}) \quad (m > 1) \quad (18)$$

Cada uno de los sistemas de ecuaciones (17) poseen *n* ecuaciones con *n+2* incógnitas, que son las *n* componentes del vector $\mathbf{u}^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ y $\varepsilon^{[m]}$. Por lo tanto, son necesarias dos ecuaciones adicionales por cada sistema.

Una grupo de ecuaciones adicionales vienen dadas por la elección del parámetro *t* del camino y son llamadas *ecuaciones de restricción paramétrica*. Otro grupo de ecuaciones vienen dadas por algún tipo de restricción impuesta a la evolución del camino de equilibrio. Por ejemplo, si deseamos trazar un camino crítico debemos imponer la condición adicional de que cada punto del camino sea un punto de equilibrio crítico.

2.2 La longitud de arco como parámetro.

El parámetro *t* es arbitrario, pero es conveniente identificarlo con alguna variable que asegure la existencia de las relaciones funcionales $\mathbf{u}(t)$, $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$. Un parámetro que presenta una ventaja particular respecto de otros es la *longitud de arco*^{5,6}, pues asegura la convergencia de las series de Taylor para cualquier punto del camino. Para deducir las ecuaciones de restricción asociadas a la longitud de arco, consideremos al vector posición $\boldsymbol{\rho}(t)$ de una curva definida por $\mathbf{u}(t)$, $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \{u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t) \ \dots \ \lambda(t) \ \varepsilon(t)\}^T \quad (19)$$

El vector tangente viene dado por la derivada del vector posición

$$\boldsymbol{\rho}^{(1)} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} = \{u_1^{(1)} \ u_2^{(1)} \ u_3^{(1)} \ \dots \ \lambda^{(1)} \ \varepsilon^{(1)}\}^T \quad (20)$$

Si consideramos un segmento diferencial de curva *ds*

$$ds = \|\rho^{(1)}\| dt \quad (21)$$

donde $\|\rho^{(1)}\|$ es la norma Euclidiana del vector tangente definida como

$$\|\rho^{(1)}\| = \left(\mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda^{(1)})^2 + (\varepsilon^{(1)})^2 \right)^{1/2} \quad (22)$$

La longitud de arco s de la curva es definida como la distancia medida a lo largo de la curva

$$s = \int_0^t \|\rho^{(1)}\| dt \quad (23)$$

Luego la condición necesaria y suficiente para asegurar que el parámetro del camino t sea coincidente con la longitud de arco s , es que el vector tangente sea un vector unitario en todo punto de la curva, esto es

$$\|\rho^{(1)}\|^2 - 1 = \mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda^{(1)})^2 + (\varepsilon^{(1)})^2 - 1 = 0 \quad (24)$$

Si derivamos sucesivamente esta ecuación con respecto a t y evaluamos en $t=0$ obtenemos las *ecuaciones de restricción paramétricas* que definen a la longitud de arco como parámetro del camino que resultan:

$$\boxed{\mathbf{u}^{[1]T} \mathbf{u}^{[m]} + \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} + \varepsilon^{[1]} \varepsilon^{[m]} = \beta^{[m]}} \quad (25)$$

donde $\beta^{11}=1$, $\beta^{21}=0$ y

$$\beta^{[m]} = -\sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2m} \left(\mathbf{u}^{[p]T} \mathbf{u}^{[m-p+1]} + \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]} + \varepsilon^{[p]} \varepsilon^{[m-p+1]} \right) \quad (m > 2) \quad (26)$$

Notemos que existe una relación biunívoca entre la longitud de arco y las coordenadas de cada punto del camino. Esto implica que las relaciones funcionales $\mathbf{u}(s)$, $\lambda(s)$, $\varepsilon(s)$ existen en todo punto de la curva y por lo tanto, para este caso, el radio de convergencia de las series de Taylor (3) debe ser infinito. Pero si bien, en teoría, la longitud de arco asegura la convergencia de las series de Taylor, esta convergencia puede ser muy lenta, requiriendo en algunos casos un gran número de términos en las series para obtener una representación aceptable. Una forma de mejorar la convergencia de las series localmente es mediante una transformación lineal de coordenadas definiendo longitudes de arco ponderadas^{5,6}. Otra alternativa consiste en rescribir estas expansiones mediante aproximaciones de Padé⁷. Por simplicidad nos limitaremos a utilizar en las deducciones que siguen a la longitud de arco sin ponderar como parámetro.

2.3 Expansiones de Taylor de autovectores críticos.

Un camino crítico representa la evolución de un punto de equilibrio crítico sobre la

superficie de equilibrio. La condición de punto crítico viene dada por la nulidad de algún autovalor ω_c de la matriz de rigidez tangente^{1,2,3}. Luego para describir el camino crítico pasante por ese punto debemos imponer la condición que dicho autovalor permanezca nulo sobre todo el camino crítico.

Asumiendo que las ecuaciones de equilibrio $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon)$ sean analíticas en las variables $\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon$ entonces sobre una trayectoria $\mathbf{u}(t), \lambda(t), \varepsilon(t)$ los elementos $F_{i,j}(t)$ de la matriz de rigidez tangente son funciones analíticas del parámetro t . Luego sobre esta trayectoria los autovalores $\omega_i(t)$ de esta matriz y sus respectivos autovectores $\xi_i(t)$ deben ser también funciones analíticas⁸ del parámetro t . Luego es posible expresar estos autovalores y autovectores mediante series de Taylor en el parámetro t como:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega^{[0]} + \omega^{[1]}t + \omega^{[2]}t^2 + \omega^{[3]}t^3 + \dots \\ \xi(t) &= \xi^{[0]} + \xi^{[1]}t + \xi^{[2]}t^2 + \xi^{[3]}t^3 + \dots\end{aligned}\quad (27)$$

Donde los primeros términos de cada serie son el autovalor y su respectivo autovector evaluados en la configuración de equilibrio E , esto es:

$$\begin{aligned}\omega^{[0]} &= \omega \Big|_E \\ \xi^{[0]} &= \xi \Big|_E\end{aligned}\quad (28)$$

y a los siguientes términos los denominamos *autovalores* y *autovectores de m-ésima orden*

$$\begin{aligned}\omega^{[m]} &= -\frac{1}{m!} \omega^{(m)} \Big|_E \\ \xi^{[m]} &= -\frac{1}{m!} \xi^{(m)} \Big|_E\end{aligned}\quad (29)$$

Si la configuración E coincide con un punto crítico donde un autovalor crítico ω_c se anula, por ese punto crítico pasará un camino crítico donde el autovalor crítico será siempre nulo. Esto implica que las componentes de la expansión de Taylor de dicho autovalor (27) deben ser idénticamente nulas:

$$\omega_c^{[m]} = 0 \quad (30)$$

Luego el autovector crítico $\xi_c(t)$ debe satisfacer la ecuación de autovalor:

$$\mathbf{K}_T(t) \xi_c(t) = 0 \quad (31)$$

Si derivamos sucesivamente esta ecuación respecto del parámetro t y evaluamos en $t = 0$ obtenemos

$$\mathbf{K}_T^{[0]} \xi^{[m]} = -\mathbf{h}^{[m]} \quad (m \geq 1) \quad (32)$$

Donde los $\mathbf{h}^{[m]}$ serán llamados *vectores de fuerzas críticas de m -ésima orden* y valen

$$\mathbf{h}^{[m]} = \sum_{p=1}^m \mathbf{K}_T^{[p]} \xi^{[m-p]} \quad (m \geq 1) \quad (33)$$

Notemos que la matriz de rigidez tangente es singular en el punto crítico, esto implica que una de las ecuaciones del sistema (32) es combinación lineal de las otras. Por lo tanto es necesaria una ecuación adicional, para ello imponemos la condición que el autovector crítico $\xi_c(t)$ tenga módulo unitario para todo t :

$$\xi_c^T \xi_c = 1 \quad (34)$$

Si derivamos sucesivamente esta ecuación respecto del parámetro t y evaluamos en $t = 0$ obtenemos las siguientes relaciones:

$$\xi_c^T \xi^{[1]} = 0 \quad (35)$$

$$\xi_c^T \xi^{[m]} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m-1} \xi^{[p]T} \xi^{[m-p]} \quad (m > 1)$$

Además si premultiplicamos la ecuación (32) por el autovector crítico el lado izquierdo se anula. Luego por consistencia los vectores de fuerzas críticas deben ser ortogonales con el autovector crítico, esto es:

$$\xi_c^T \mathbf{h}^{[m]} = 0 \quad (m \geq 1) \quad (36)$$

2.4 Descripción paramétrica de un camino crítico.

Para describir un camino crítico debemos utilizar las ecuaciones de equilibrio de m -ésimo orden (17) donde la matriz de rigidez tangente de orden cero esta evaluada en un punto crítico y por lo tanto es singular y ortogonal al autovector crítico. Luego, si premultiplicamos por el autovector crítico los lados derechos deben ser ortogonales al autovector crítico y obtenemos las siguientes ecuaciones adicionales:

$$\begin{aligned} \lambda^{[1]} \mathbf{b} + \varepsilon^{[1]} \mathbf{c} &= 0 \\ \lambda^{[m]} \mathbf{b} + \varepsilon^{[m]} \mathbf{c} &= \mathbf{b}^{[m]} \quad (m > 1) \end{aligned} \quad (37)$$

donde

$$\begin{aligned}
 b &= \xi_C^T \mathbf{p} \\
 c &= \xi_C^T \mathbf{q}^{[0]} \\
 b^{[m]} &= \xi_C^T \mathbf{r}^{[m]} \quad (m > 1)
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

El coeficiente b define el tipo de punto crítico, punto limite si $b \neq 0$ ó punto de bifurcación si $b=0$. El coeficiente c tiene influencia en la sensibilidad a imperfecciones como veremos posteriormente.

Definimos los vectores intermedios \mathbf{e} , $\mathbf{d}^{[m]}$ ortogonales al autovector crítico como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_T^{[0]} \mathbf{e} &= \mathbf{q}^{[0]} - (\xi_C^T \mathbf{q}^{[0]}) \xi_C = \mathbf{q}^{[0]} - c \xi_C \\
 \mathbf{K}_T^{[0]} \mathbf{d}^{[1]} &= \mathbf{p} - (\xi_C^T \mathbf{p}) \xi_C = \mathbf{p} - b \xi_C \\
 \mathbf{K}_T^{[0]} \mathbf{d}^{[m]} &= \mathbf{r}^{[m]} - (\xi_C^T \mathbf{r}^{[m]}) \xi_C = \mathbf{r}^{[m]} - (\lambda^{[m]} b + \varepsilon^{[m]} c) \xi_C \quad (m > 1)
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Luego las soluciones de las ecuaciones de equilibrio (17) se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^{[1]} &= \lambda^{[1]} \mathbf{d}^{[1]} + \varepsilon^{[1]} \mathbf{e} + \alpha^{[1]} \xi_C \\
 \mathbf{u}^{[m]} &= \lambda^{[m]} \mathbf{d}^{[1]} + \varepsilon^{[m]} \mathbf{e} - \mathbf{d}^{[m]} + \alpha^{[m]} \xi_C \quad (m > 1)
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Notemos que tenemos tres incógnitas escalares $\lambda^{[m]}$, $\varepsilon^{[m]}$, $\alpha^{[m]}$ por cada vector $\mathbf{u}^{[m]}$, luego necesitamos tres ecuaciones adicionales por cada uno de estos vectores. Una ecuación adicional viene dada por las condiciones de ortogonalidad (37) de los lados derechos de las ecuaciones de equilibrio con el autovector crítico. Otra ecuación adicional es obtenida de las condiciones de ortogonalidad (36) de los vectores de fuerzas críticas con el autovector crítico que se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 \alpha^{[1]} A_1 + \lambda^{[1]} A_2 + \varepsilon^{[1]} A_3 &= 0 \\
 \alpha^{[m]} A_1 + \lambda^{[m]} A_2 + \varepsilon^{[m]} A_3 + D^{[m]} &= 0 \quad (m > 1)
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \xi_C^T \mathbf{F}_{uu} |_C \xi_C \xi_C \\
 A_2 &= \xi_C^T \mathbf{F}_{uu} |_C \xi_C \mathbf{d}^{[1]} \\
 A_3 &= \xi_C^T \mathbf{F}_{uu} |_C \xi_C \mathbf{e} + \xi_C^T \mathbf{F}_{u\varepsilon} |_C \xi_C
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

y

$$D^{[2]} = \xi_C^T \mathbf{F}_{uu} \Big|_C \mathbf{u}^{[1]} \xi_C^{[1]} - \xi_C^T \mathbf{F}_{uu} \Big|_C \mathbf{d}^{[2]} \xi_C + \varepsilon^{[1]} \xi_C^T \mathbf{F}_{u\varepsilon} \Big|_C \xi_C^{[1]} + \frac{1}{2} \xi_C^T \mathbf{F}_{uu}^{(1)} \Big|_C \mathbf{u}^{[1]} \xi_C \quad (43)$$

$$\begin{aligned} D^{[m]} = & -\xi_C^T \mathbf{F}_{uu} \Big|_C \mathbf{d}^{[m]} \xi_C + \sum_{p=1}^{m-1} \left(\xi_C^T \mathbf{F}_{uu} \Big|_C \mathbf{u}^{[p]} \xi_C^{[m-p]} + \varepsilon^{[p]} \xi_C^T \mathbf{F}_{u\varepsilon} \Big|_C \xi_C^{[m-p]} \right) \\ & + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m!} \left(\xi_C^T \mathbf{F}_{uu}^{(p)} \Big|_C \mathbf{u}^{[m-p]} \xi_C + \varepsilon^{[m-p]} \xi_C^T \mathbf{F}_{u\varepsilon}^{(p)} \Big|_C \xi_C \right) \\ & + \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(p-q)}{p! q!} \left(\xi_C^T \mathbf{F}_{uu}^{(q)} \Big|_C \xi_C^{[m-p]} \mathbf{u}^{[p-q]} + \varepsilon^{[p-q]} \xi_C^T \mathbf{F}_{u\varepsilon}^{(q)} \Big|_C \xi_C^{[m-p]} \right) \quad (m > 2) \end{aligned}$$

Notemos que \mathbf{F}_{uu} es tensor de tercer orden que puede ser representado por una hipermatriz con tres dimensiones

$$\mathbf{F}_{uu} = \{F_{i,jk}\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial u_j \partial u_k} \right\} \quad (44)$$

Además $\mathbf{F}_{u\varepsilon}$ es tensor de segundo orden que puede ser representado por una matriz con dos dimensiones

$$\mathbf{F}_{u\varepsilon} = \left\{ \frac{\partial F_{i,j}}{\partial \varepsilon} \right\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial u_j \partial \varepsilon} \right\} \quad (45)$$

Nos resta hallar una ecuación adicional para que el conjunto $\lambda^{[m]}$, $\varepsilon^{[m]}$, $\alpha^{[m]}$ quede definido. Esta ecuación adicional viene dada por las condiciones de restricción paramétrica (25). Sustituyendo en estas ecuaciones las soluciones $\mathbf{u}^{[m]}$ (40) de las ecuaciones de equilibrio obtenemos:

$$\alpha^{[1]} \alpha^{[m]} + \lambda^{[m]} [a_1 \lambda^{[1]} + a_3 \varepsilon^{[1]}] + \varepsilon^{[m]} [a_3 \lambda^{[1]} + a_2 \varepsilon^{[1]}] = \beta^{[m]} + \mu^{[m]} \quad (46)$$

donde $\gamma^{[1]}=0$ y

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \mathbf{d}^{[1]T} \mathbf{d}^{[1]} \\ a_2 &= 1 + \mathbf{e}^T \mathbf{e} \\ a_3 &= \mathbf{d}^{[1]T} \mathbf{e} \\ \mu^{[m]} &= \mathbf{d}^{[1]T} \mathbf{d}^{[m]} \quad (m > 1) \end{aligned} \quad (47)$$

Luego las ecuaciones (37), (41) y (46) forman un sistema de ecuaciones lineales que nos

permiten obtener de manera única a las incógnitas $\lambda^{[m]}$, $\varepsilon^{[m]}$, $\alpha^{[m]}$ que definen el camino crítico mediante las ecuaciones (40).

3 SENSIBILIDAD A IMPERFECCIONES DE PUNTOS LÍMITES

En un punto límite el coeficiente b es diferente de cero^{3,5}. Luego de las ecuaciones (37), (41) y (46) obtenemos para $m=1$

$$\varepsilon^{[1]} = b \left[\frac{(c A_2 - b A_3)^2}{(A_1)^2} + c^2 a_1 + a_2 - 2a_3 b c \right]^{-1/2} \quad (48)$$

$$\lambda^{[1]} = -\varepsilon^{[1]} \frac{c}{b}$$

$$\alpha^{[1]} = \varepsilon^{[1]} \frac{(c A_2 - b A_3)}{b A_1}$$

Luego en un entorno pequeño del punto límite sobre el camino crítico podemos asumir que $\lambda(s)$, $\varepsilon(s)$ varían linealmente con la longitud de arco s .

$$\varepsilon(s) \approx \varepsilon^{[1]} s \quad (49)$$

$$\lambda(s) \approx \lambda^{[1]} s$$

Luego de la primera ecuación podemos aproximar a la longitud de arco como:

$$s \approx \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{[1]}} \quad (50)$$

y substituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$\lambda(\varepsilon) \approx \frac{\lambda^{[1]}}{\varepsilon^{[1]}} \varepsilon = -\frac{c}{b} \varepsilon \quad (51)$$

Luego si el coeficiente c es distinto de cero en las proximidades del punto límite la evolución de este punto crítico es aproximadamente lineal con la magnitud de las imperfecciones.

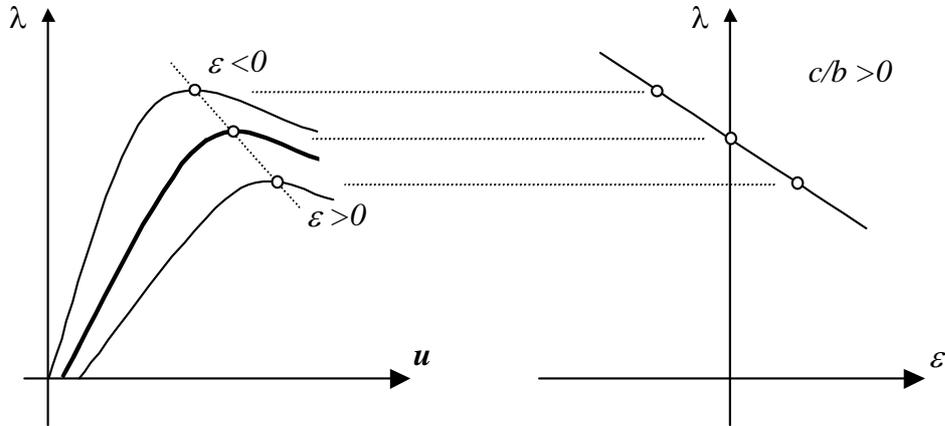


Figura 2: Evolución de un punto limite con imperfecciones mayores ($c \neq 0$).

Utilizando las mismas ecuaciones anteriores para $m > 1$ obtenemos las componentes de alto orden del camino crítico como:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{[m]} &= \varepsilon^{[1]} \left[\beta^{[m]} + \mu^{[m]} + \frac{b^{[m]}}{b A_1} (\alpha^{[1]} A_2 - a_1 \lambda^{[1]} A_1 - a_3 \varepsilon^{[1]} A_1) + \frac{\alpha^{[1]}}{A_1} D^{[m]} \right] \\ \lambda^{[m]} &= \frac{b^{[m]} - c \varepsilon^{[m]}}{b} \\ \alpha^{[m]} &= \frac{1}{b A_1} [\varepsilon^{[m]} (c A_2 - b A_3) - (b^{[m]} A_2 + b D^{[m]})] \end{aligned} \quad (52)$$

Notemos que si $c = 0$ de la ecuación (48) resulta $\lambda^{[1]} = 0$. Luego en un entorno pequeño del punto límite sobre el camino crítico podemos asumir que $\lambda(s)$ varía cuadráticamente con la longitud de arco s y $\varepsilon(s)$ varían linealmente con s :

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &\approx \varepsilon^{[1]} s \\ \lambda(s) &\approx \lambda^{[2]} s^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Por lo tanto podemos asumir que en las proximidades del punto limite se verifica que:

$$\lambda(\varepsilon) \approx \frac{\lambda^{[2]}}{(\varepsilon^{[1]})^2} \varepsilon^2 \quad (54)$$

Luego si el coeficiente c es nulo, en las proximidades del punto limite la evolución de este punto crítico es aproximadamente cuadrática con la magnitud de las imperfecciones.

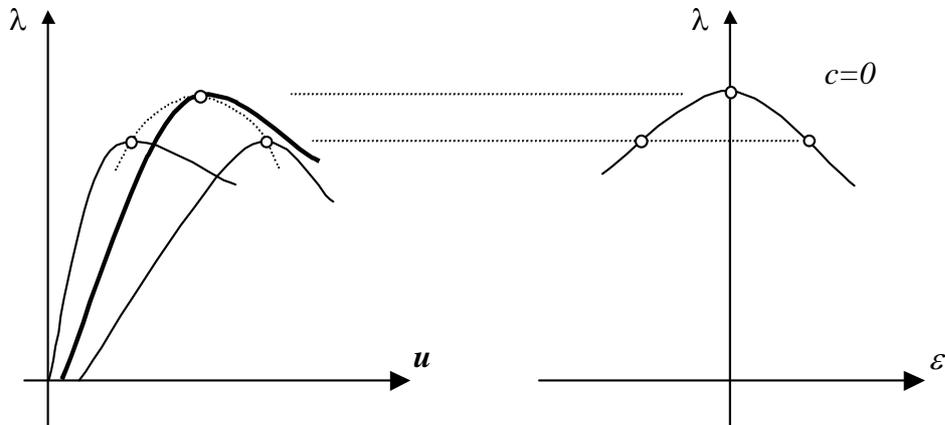


Figura 3: Evolución de un punto limite con imperfecciones menores ($c=0$).

Notemos que para pequeñas imperfecciones la variación de la carga crítica con las imperfecciones es menor cuando $c=0$. Luego las imperfecciones se dicen *menores* cuando $c=0$ y se dicen *mayores* si $c \neq 0$.

4 SENSIBILIDAD A IMPERFECCIONES DE PUNTOS DE BIFURCACIÓN

En un punto de bifurcación el coeficiente b es igual a cero^{3,5}. En estos puntos se intersectan dos caminos de equilibrio, un camino que llamaremos *fundamental* y otro *secundario*. Estos caminos se pueden describir paramétricamente a partir del punto crítico usando la longitud de arco^{5,6}. La componente del vector tangente del camino fundamental según las coordenadas generalizadas se puede expresar como:

$$\mathbf{u}_F^{[1]} = \lambda_F^{[1]} \mathbf{d}^{[1]} + \alpha_F^{[1]} \boldsymbol{\xi}_C \quad (55)$$

donde para el camino fundamental se asume $\lambda_F^{[1]} \neq 0$.

Luego es posible expresar a las componentes de los caminos crítico como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{[1]} &= \eta^{[1]} \boldsymbol{\xi}_C + \gamma^{[1]} \mathbf{u}_F^{[1]} + \varepsilon^{[1]} \mathbf{e} \\ \mathbf{u}^{[m]} &= \eta^{[m]} \boldsymbol{\xi}_C + \gamma^{[m]} \mathbf{u}_F^{[1]} + \varepsilon^{[m]} \mathbf{e} - \mathbf{d}^{[m]} \quad (m > 1) \end{aligned} \quad (56)$$

donde

$$\begin{aligned}\gamma^{[1]} &= \frac{\lambda^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} \\ \gamma^{[m]} &= \frac{\lambda^{[m]}}{\lambda_F^{[1]}} \quad (m > 1) \\ \eta^{[1]} &= \alpha^{[1]} - \gamma^{[1]} \alpha_F^{[1]} \\ \eta^{[m]} &= \alpha^{[m]} - \gamma^{[m]} \alpha_F^{[1]} \quad (m > 1)\end{aligned}\tag{57}$$

Luego de las ecuaciones (37), (41) y (46) obtenemos para $m=1$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{[1]} &= 0 \\ \eta^{[1]} &= \left[1 + \left(\frac{A_1}{A_4} \right)^2 - 2 \left(\frac{A_1}{A_4} \right) \alpha_F^{[1]} \right]^{-1/2} \\ \gamma^{[1]} &= -\eta^{[1]} \frac{A_1}{A_4}\end{aligned}\tag{58}$$

donde

$$A_4 = \xi_C^T \mathbf{F}_{uu} |_C \xi_C \mathbf{u}_F^{[1]}\tag{59}$$

Utilizando las mismas ecuaciones anteriores para $m > 1$ obtenemos las componentes de alto orden del camino crítico como:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{[m]} &= \frac{b^{[m]}}{c} \\ \eta^{[m]} &= \eta^{[1]} \left[\beta^{[m]} + \mu^{[m]} - c_1 \frac{b^{[m]}}{c} + \frac{c_2}{c A_4} (b^{[m]} A_2 + c D^{[m]}) \right] \\ \gamma^{[m]} &= -\frac{1}{c A_4} [b^{[m]} A_2 + c D^{[m]} + \eta^{[m]} c A_1]\end{aligned}\tag{60}$$

donde

$$\begin{aligned}c_1 &= a_6 \gamma^{[1]} + a_5 \varepsilon^{[1]} \\ c_2 &= \alpha_F^{[1]} \eta^{[1]} + a_4 \gamma^{[1]} + a_6 \varepsilon^{[1]} \\ \mu^{[m]} &= \mathbf{d}^{[1]T} \mathbf{d}^{[m]} \quad (m > 1)\end{aligned}\tag{61}$$

y con

$$a_4 = \mathbf{u}_F^{[1]T} \mathbf{u}_F^{[1]} + (\lambda_F^{[1]})^2 \quad (62)$$

$$a_5 = 1 + \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

$$a_6 = \mathbf{d}^{[1]T} \mathbf{u}_F^{[1]}$$

Luego en un entorno pequeño del punto de bifurcación sobre el camino crítico podemos asumir que $\lambda(s)$ varía linealmente con la longitud de arco s y $\varepsilon(s)$ varían cuadráticamente con s :

$$\varepsilon(s) \approx \varepsilon^{[2]} s^2 \quad (63)$$

$$\lambda(s) \approx \lambda^{[1]} s$$

Por lo tanto podemos asumir que en las proximidades del punto de bifurcación se verifica que:

$$\lambda(\varepsilon) \approx \lambda^{[1]} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{[2]}} \right)^{1/2} \quad (64)$$

Esto implica que en las proximidades del punto de bifurcación la evolución de este punto crítico varía aproximadamente con la raíz cuadrada de la magnitud de las imperfecciones, y suele llamarse *ley de la potencia 1/2 para la sensibilidad a imperfecciones iniciales*^{1,2,3}.

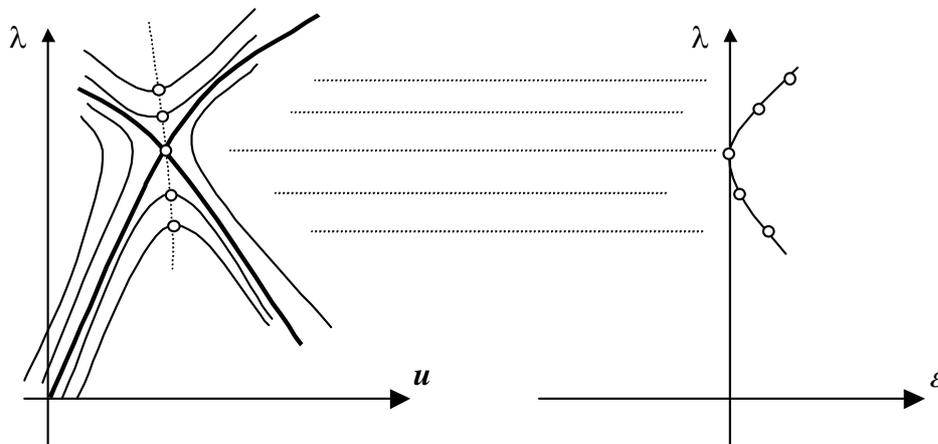


Figura 4: Evolución de un punto de bifurcación asimétrico con imperfecciones.

Para una bifurcación simétrica el coeficiente A_1 se torna nulo^{1,2,3} resultando

$$\varepsilon^{[1]} = \varepsilon^{[2]} = \lambda^{[1]} = 0 \quad (65)$$

Luego en un entorno pequeño del punto de bifurcación simétrica sobre el camino crítico

podemos asumir que $\lambda(s)$ varía cuadráticamente con la longitud de arco s y $\varepsilon(s)$ varía cúbicamente con s :

$$\begin{aligned}\varepsilon(s) &\approx \varepsilon^{[3]}s^3 \\ \lambda(s) &\approx \lambda^{[2]}s^2\end{aligned}\tag{66}$$

Por lo tanto podemos asumir que en las proximidades del punto de bifurcación simétrica se verifica que:

$$\lambda(\varepsilon) \approx \lambda^{[2]} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{[3]}} \right)^{2/3}\tag{67}$$

Esto implica que en las proximidades del punto de bifurcación simétrica la evolución de este punto crítico varía aproximadamente con la potencia $2/3$ de la magnitud de las imperfecciones, y suele llamarse *ley de la potencia $2/3$ para la sensibilidad a imperfecciones iniciales*^{1,2,3}.

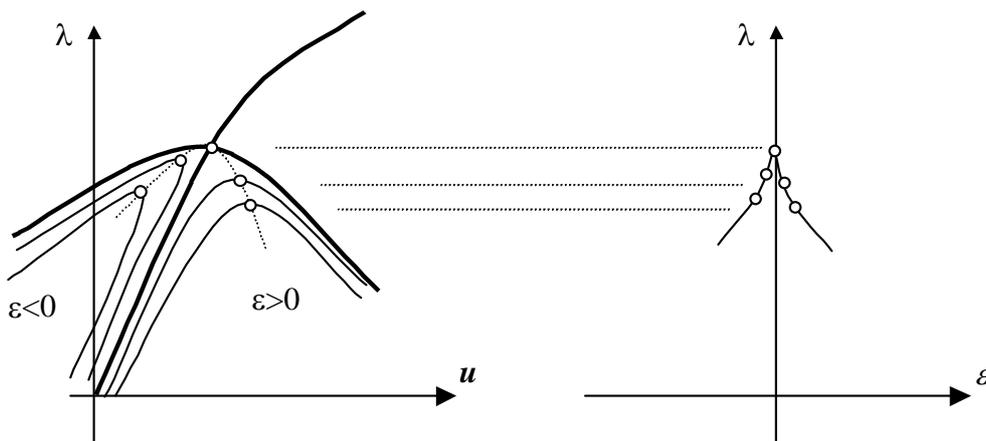


Figura 5: Evolución de un punto de bifurcación simétrica con imperfecciones.

5 CONCLUSIONES

Se han presentado las principales ecuaciones para la determinación de las curvas de sensibilidad a imperfecciones en las proximidades de puntos límites y bifurcaciones. Si bien los resultados obtenidos son bastantes conocidos^{1,2,3}, la novedad radica en la utilización de la longitud de arco como variable paramétrica. Esto elimina el problema de la elección adecuada del parámetro del camino^{2,3}, pues la longitud arco asegura la convergencia de las expansiones de Taylor en todos los casos, permitiendo una implementación computacional automática del trazado de curvas sensibilidad $\lambda(\varepsilon)$, las cuales se podrían obtener en forma explícita utilizando un proceso de inversión de series, tal como el descrito en la ref. 3.

Además se ha partido de las ecuaciones de equilibrio por lo que los resultados son

aplicables tanto a sistemas conservativos como no conservativos, pero con una salvedad, que la matriz de rigidez tangente sea simétrica. Para sistemas conservativos esto siempre se cumple^{5,6}, pero para sistemas no conservativos puede ocurrir que la matriz de rigidez tangente no sea simétrica. En estos casos es necesario distinguir entre autovectores izquierdos y derechos para premultiplicar y posmultiplicar la matriz de rigidez tangente. Luego la extensión a sistemas no conservativos generales es bastante simple aunque hay que agregar ecuaciones adicionales.

En este trabajo solo se consideraron puntos críticos simples, donde solo se anula un único autovalor, pero la metodología podría extenderse a puntos críticos múltiples donde varios autovalores se anulan simultáneamente.

6 REFERENCIAS

- [1] W.T. Koiter, *On the Stability of Elastic Equilibrium*, en holandés, tesis, H.J. Paris, Amsterdam, (1945).
- [2] J.G.A. Croll y A.C. Walker, *Elements of Structural Stability*, McMillan, London, (1972).
- [3] J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London, (1973).
- [4] L.A. Godoy y D.T. Mook, "Higher-Order Sensitivity to Imperfections in Bifurcation Buckling Analysis", *Int. J. Solids Structures*, **33**, (4), 511-520, (1996).
- [5] C. Jouglard, *Análise Não-Linear Incremental Assintótica da Estabilidade de Estruturas Elásticas*, M. Sc. Tesis, COPPE/Universidade Federal do Río de Janeiro, Brasil, (1993).
- [6] C. Jouglard, "Técnicas asintóticas de análisis de estabilidad estructural", en *Modelización aplicada a la Ingeniería*, W. Legnani, P. Jacovkis, R. Armentano y M. Risk, eds., Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, (2005).
- [7] B. Cochelin, "A Path-Following Technique Via an Asymptotic-Numerical Method", *Comp. & Struct.*, **53**, (5), 1181-1192 (1994).
- [8] I. Gohberg, P. Lancaster y L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press Inc., New York, (1982).