

DISEÑO OPTIMO DE LA FORMA DE UN RECINTO: UN MODELO Y SU RESOLUCION NUMERICA

Olga E. Mandrini y Graciela N. Sottosanto

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Santa Fe 1400, (8300) Neuquén, Argentina, e-mail: emiliamandrini@yahoo.com.ar, gsottos@uncoma.edu.ar

Palabras clave: diseño óptimo, método de elementos finitos, identificación de dominio, métodos de optimización.

Resumen. En este trabajo se tratan aspectos vinculados a la formulación del modelo y resolución numérica del problema de optimizar la geometría de un recinto en el que se satisface un problema con valores en la frontera. El problema describe una distribución estacionaria de temperaturas con condiciones de frontera mixtas del tipo Dirichlet-Neumann. Una parte de la frontera del dominio que se desea diseñar está descrita por una función que debe ser determinada.

Si bien el problema es conocido en la literatura, la filosofía del modelo que se plantea difiere de las que se usan habitualmente y está basada en una técnica de análisis y diseño simultáneos conocida en optimización estructural. Esta formulación se caracteriza por la forma de elegir las variables independientes, el análisis de las ecuaciones empleadas y las restricciones resultantes.

Con la finalidad de poner de manifiesto el potencial de la formulación utilizada se presenta la resolución numérica del problema discretizado por medio de elementos finitos, para diferentes mallas y aproximaciones de la frontera de diseño.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de optimización de formas pueden ser considerados como problemas de la optimización estructural donde la geometría es de interés primordial. En general, el objetivo es mejorar un diseño dado minimizando una función objetivo sujeta a ciertas restricciones de igualdad y desigualdad. En la mayoría de los casos los planteos resultan ser interdisciplinarios e intervienen la teoría de ecuaciones diferenciales, la aproximación numérica de problemas con valores en la frontera y los métodos de la optimización.

En este trabajo, relativo a un proceso de difusión, se describe una distribución bidimensional y estacionaria de temperaturas, que responde a una ecuación a derivadas parciales elíptica, con condiciones de frontera mixtas del tipo Dirichlet-Neumann. Una parte de la frontera del dominio que es objeto del diseño, está descrita por una curva que debe ser determinada.

Muchos problemas prácticos conducen a encontrar el diseño óptimo de un dominio donde ocurre algún proceso para el cual es de importancia controlar el estado térmico de un cuerpo a través de la influencia de sus fronteras. El diseño de un proceso de esterilización para alimentos envasados, el tratamiento térmico de partes metálicas, el proceso de vulcanización de cauchos, son algunos ejemplos.

Por otra parte, interesantes aplicaciones pueden encontrarse en el campo de ciertos problemas de frontera libre que pueden reducirse a un problema de diseño óptimo ([Grolleau y Humeau, 1993](#); [Tiihonen, 1997](#); [Haslinger et al., 2004](#)).

Si bien el problema es conocido en la literatura ([Begis y Glowinski, 1975](#); [Haslinger y Mäkinen, 2003](#)), la filosofía del modelo que aquí se plantea difiere de las que se usan habitualmente y está basada en una técnica conocida en optimización estructural como *análisis y diseño simultáneos* (SAND). Esta estrategia resulta como alternativa a la clásica forma de trabajar en el *espacio de las variables de diseño* (DVS). Ver [Haftka \(1985\)](#); [Kirsch y Rozvany \(1994\)](#); [Sonzogni y Queizan \(2005\)](#). La formulación que se usa en este trabajo fue usada exitosamente por uno de los autores, en un problema de optimización de dimensiones ([Maciel et al., 2007](#)).

A efectos de resolver numéricamente el modelo, la ecuación de estado es aproximada mediante elementos finitos. Por otra parte, utilizando resultados de identificación con un dominio fijo, el problema de optimización continuo se transforma en un problema de dimensión finita sobre un recinto fijo y, debido a la transformación del dominio, la ecuación variacional resulta en un sistema de ecuaciones no lineales.

Para la resolución numérica del problema se desarrolló un algoritmo en Matlab sobre la base de una implementación compacta existente del método de elementos finitos desarrollada por [Alberty et al. \(1999\)](#). A efectos de establecer comparaciones y encontrar el camino más eficiente para la resolución numérica se probaron dos tipos de elementos finitos, cuadriláteros y triangulares, así como dos tipos de aproximaciones para la frontera desconocida compatibles con los elementos elegidos, lineales a trozos y polinomios cuadráticos de Bezier ([Farin, 2002](#); [Höllig, 2003](#)).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se describe el problema. La formulación variacional y la transformación del dominio variable a un dominio fijo están detalladas en la sección 3. En la sección 4 se muestra la discretización utilizada y en la sección 5 se describe la formulación final del problema de optimización. Resultados numéricos son presentados en la sección 6. Finalmente, algunas conclusiones se expresan en la sección 7.

2. EL PROBLEMA

Consideramos un recinto $\Omega(\alpha)$ en el plano x_1, x_2 , que puede representarse como un rectángulo “curvado”(ver figura 1).

$$\Omega(\alpha) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \alpha(x_2), 0 \leq x_2 \leq 1\} \quad (1)$$

en el cual debe satisfacerse el siguiente problema con valores en la frontera

$$(PVF) \equiv \begin{cases} -\Delta u(\alpha) = c_1 & \Omega(\alpha), \\ \frac{\partial u(\alpha)}{\partial n} = 0 & \Gamma_1(\alpha) = \partial\Omega(\alpha) \setminus \overline{\Gamma(\alpha)}, \\ u(\alpha) = 0 & \Gamma(\alpha), \end{cases} \quad (2)$$

donde $\Gamma(\alpha)$ representa la parte de la frontera del recinto que es objeto de diseño y Δ es el operador laplaciano.

Desde el punto de vista físico, el (PVF) puede ser interpretado como una distribución estacionaria de temperaturas en el recinto $\Omega(\alpha)$, en el cual existe una fuente de calor constante. El recinto, isotrópico y homogéneo, está aislado sobre la frontera Γ_1 y debe ser enfriado sobre la frontera de diseño $\Gamma(\alpha)$.

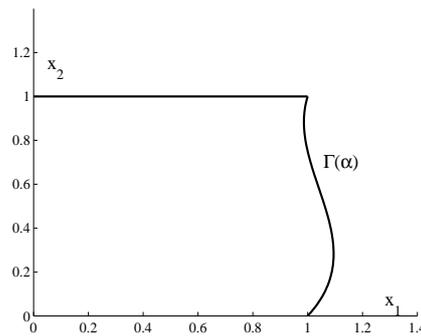


Figura 1: Dominio desconocido $\Omega(\alpha(x_2))$

A efectos de plantear el problema como un problema de optimización se define una funcional de costo $J(u(\alpha))$ que debe ser minimizada sobre el dominio $\Omega(\alpha)$

$$J(u(\alpha)) = \int_{\Omega(\alpha)} u(\alpha)^2 dA, \quad (3)$$

donde $u(\alpha)$ es la solución de (PVF) . Condiciones adicionales son incorporadas a efectos de asegurar la factibilidad y existencia de soluciones del problema de optimización.

Por una parte, el área total del recinto debe mantenerse constante

$$\int_0^1 \alpha(x_2) dx_2 = c_2. \quad (4)$$

Respecto de la forma de la curva $\alpha(x_2)$, se requiere que pertenezca al conjunto de funciones continuas en $[0, 1]$ y que sus coordenadas se encuentren comprendidas en la franja

$$0 < \alpha_m \leq \alpha(x_2) \leq \alpha_M. \quad (5)$$

Como el área del recinto es constante y la frontera está totalmente aislada con excepción de la parte que se diseña, donde la temperatura tiene que ser cero, la única manera de enfriar esta frontera es aumentando su longitud. Por ese motivo deben prevenirse oscilaciones bruscas de la curva y una forma de que esto se cumpla es exigir que la función a ser determinada satisfaga una condición de Lipschitz. Esta condición implica acotar las derivadas de la función $\alpha(x_2)$, esto es $\left| \frac{d\alpha(x_2)}{dx_2} \right| \leq c_3$.

Todas estas condiciones definen el conjunto admisible de funciones α para el problema

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{C}^{0,1}([0, 1]) : 0 < \alpha_m \leq \alpha(x_2) \leq \alpha_M, \int_0^1 \alpha(x_2) dx_2 = c_2, |\alpha'| \leq c_3, \right\}. \quad (6)$$

De este modo el problema de optimización puede escribirse como

Hallar $\alpha^ \in S$ tal que*

$$u(\alpha^*) = \operatorname{argmin} J(u(\alpha)) = \operatorname{argmin} \int_{\Omega(\alpha)} u(\alpha)^2 dA \quad (7)$$

donde $u(\alpha^)$ resuelve el (PVF).*

En [Begis y Glowinski \(1975\)](#) y en [Haslinger y Mäkinen \(2003\)](#) se probó que existe solución del problema continuo de optimización (7) y se presentan ejemplos que muestran que la solución no es única. En ambos trabajos se presentan además, métodos numéricos para resolver los problemas aproximados que se obtienen discretizando el problema continuo. La diferencia entre esas metodologías y la que aquí se presenta, se concentran, fundamentalmente, en la filosofía del tratamiento de la condición “ $u(\alpha^*)$ resuelve el (PVF)”.

3. FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL (PVF)

A efectos de simplificar el (PVF) escribimos su formulación variacional. Para ello introducimos un espacio de Hilbert de funciones $V \subset H^1(\Omega(\alpha))$ con

$$H^1(\Omega(\alpha)) \equiv \left\{ v : v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega(\alpha)) \quad i = 1, 2 \right\}, \quad (8)$$

donde L^2 es el espacio de funciones cuadrado integrables y V se define como

$$V(\Omega(\alpha)) \equiv \left\{ v : v \in H^1(\Omega(\alpha)), \quad v = 0 \text{ en } \Gamma(\alpha) \right\}. \quad (9)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación diferencial elíptica $-\Delta u(\alpha) = c_1$ por una función de test v en el espacio que se ha definido y usando el teorema de la divergencia en el plano, se obtiene la formulación variacional del problema ([Axelsson y Barker, 2001](#))

$$\int_{\Omega(\alpha)} \nabla u \nabla v dx_1 dx_2 = \int_{\Omega(\alpha)} c_1 v dx_1 dx_2, \quad \forall v \in V. \quad (10)$$

3.1. Transformación a un dominio fijo

A fin de facilitar la resolución numérica del problema planteamos la formulación variacional sobre un dominio fijo, para ello se usa la transformación

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\alpha(x_2)} \\ \tilde{x}_2(x_1, x_2) = x_2. \end{cases} \quad (11)$$

Es posible entonces, trabajar con un dominio fijo y sencillo, en nuestro caso (ver figura 2)

$$\tilde{\Omega} = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tilde{x}_1 \leq 1, 0 \leq \tilde{x}_2 \leq 1\}. \quad (12)$$

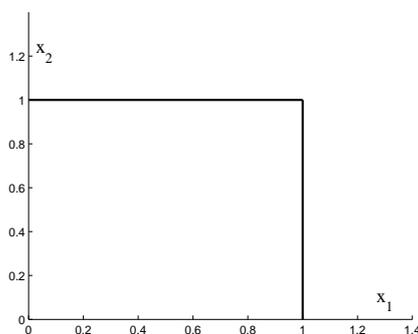


Figura 2: Dominio fijo $\tilde{\Omega}$.

Resulta así definido un isomorfismo entre los espacios de funciones V y \tilde{V} donde

$$\tilde{V} \equiv \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} \in H^1(\tilde{\Omega}), \tilde{v}(1, \tilde{x}_2) = 0 \right\}. \quad (13)$$

Sobre estos espacios definimos la solución del (PVF) transformado como \tilde{u} tal que

$$\tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = u(x_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), x_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)). \quad (14)$$

El determinante Jacobiano de la transformación se calcula como

$$\tilde{J} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{x}_1 \alpha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha. \quad (15)$$

Con la finalidad de escribir la formulación variacional transformada calculamos las derivadas de u en función de las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{1}{\alpha} \alpha' \tilde{x}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Luego, la formulación variacional (10) resulta

$$\int_{\tilde{\Omega}} \left[\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{1}{\alpha} \alpha' \tilde{x}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{1}{\alpha} \alpha' \tilde{x}_1 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1} \right) \right] \alpha d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \quad (17)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} c_1 \tilde{v} \alpha d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Agrupando convenientemente, la última ecuación puede expresarse

$$\int_{\tilde{\Omega}} a_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1} \right) + a_2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_2} \right) + a_3 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1} \right) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \quad (18)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} a_4 \tilde{v} d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

donde

$$a_1 = \frac{1 + \alpha'^2 \tilde{x}_1^2}{\alpha},$$

$$a_2 = \alpha, \quad (19)$$

$$a_3 = -\alpha' \tilde{x}_1,$$

$$a_4 = c_1 \alpha.$$

Como la función objetivo del problema de optimización que se ha definido involucra los valores de la temperatura $u(x, y)$ en el dominio original, a efectos de concretar la resolución numérica del problema, la transformación del dominio debe ser tenida en cuenta cuando se evalúa la función objetivo.

4. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

Para la resolución numérica es necesario aproximar el problema (7) por un problema en dimensión finita. Para ello se presentan dos formulaciones particionando el dominio $\tilde{\Omega}$ en elementos $\tilde{\Omega}^e$ triangulares (tres nodos) y en cuadriláteros (cuatro nodos). En estos elementos se usan funciones de interpolación lineales y bilineales respectivamente. Dos aproximaciones de la frontera son consideradas: funciones lineales a trozos y funciones splines de Bézier, esta última aproximación en el caso de elementos triangulares.

4.1. Aproximación lineal a trozos de la frontera

Una aproximación lineal a trozos de la frontera fue usada tanto con elementos triangulares como cuadriláteros.

Dado un entero m positivo y $h = 1/m$ notamos por $e_j = [(j-1)h, jh]$, $j = 1, \dots, m$, los intervalos generados sobre el eje \tilde{x}_2 y sobre ellos se aproxima el conjunto S_h de funciones admisibles α_h para el problema discretizado:

$$S_h = \left\{ \alpha_h \in S, \alpha_h|_{e_j} \in \mathbb{P}_1, \forall j = 1, \dots, m, \right\} \quad (20)$$

donde \mathbb{P}_1 es el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 1.

Para generar la malla de cuadriláteros se dividió el intervalo $[0, 1]$ en el eje \tilde{x}_1 en m subintervalos. De esta manera, mientras en el recinto transformado se obtienen m^2 cuadriláteros regulares,

en el dominio real resultan trapecios.

Finalmente, en cada franja $[0, 1] \times [(j-1)h, jh]$, $j = 1, \dots, m$, uniendo dos vértices opuestos de cada cuadrilátero, se obtiene una malla de $2m^2$ elementos triangulares.

Una vez descontados los nodos ubicados sobre la frontera Γ_α donde la función \tilde{u} debe valer cero, sobre cualquiera de las dos mallas resultan $m(m+1)$ nodos en los cuales la función \tilde{u} es desconocida.

4.2. Aproximación de la frontera de diseño por splines de Bézier

La segunda alternativa elegida como aproximación de la frontera es por medio de funciones spline cuadráticas de Bézier. Estas funciones tienen la particularidad de que permiten mantener la continuidad de la curva y su derivada, de manera que puedan cumplirse las restricciones impuestas sobre $\alpha(x_2)$.

Una curva de Bézier de grado n , $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser definida en forma explícita de la siguiente forma

$$\alpha(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j B_j^{(n)}(t), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

donde cada $B_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, n$ denota un polinomio de Bernstein (Höllig, 2003) definido por

$$B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1]. \quad (22)$$

Los puntos $(\alpha_j, j/n) \in \mathbb{R}^2$, $j = 0, \dots, n$, son los puntos de control de la curva α y definen una poligonal que es interpolada por la curva en sus puntos inicial y final y tal que la curva resulta tangente a los segmentos $\alpha_1 - \alpha_0$ y $\alpha_n - \alpha_{n-1}$.

De esta manera α_j , $j = 0, \dots, n$ pueden ser adoptadas como las variables discretas de diseño para la curva.

La derivada $\alpha'(t)$ es

$$\alpha'(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) B_j^{(n-1)}(t). \quad (23)$$

Debido a una de las propiedades de los polinomios de Bernstein,

$$\sum_{j=0}^n B_j^{(n)}(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1], \quad (24)$$

para satisfacer la condición $|\alpha'(t)| \leq L_0$ es suficiente acotar la diferencia entre dos coeficientes consecutivos $|\alpha_{j+1} - \alpha_j| \leq L_0/n$.

A efectos de concretar la discretización, en cada uno de los intervalos $[(j-1)h, (j+1)h]$, $j = 1, \dots, m-1$, se ubican tres puntos de control para cada subarco de una curva cuadrática de Bézier. La condición de continuidad de la curva y su derivada en los puntos de ensamble de los subarcos, impone $m+1$ variables de diseño que corresponden a puntos del polígono de control y a los puntos de la curva correspondientes a $\tilde{x}_2 = 0$ y $\tilde{x}_2 = 1$.

4.3. Discretización del problema de estado

Con la discretización descrita, el problema variacional (18) puede ser aproximado reemplazando el dominio $\tilde{\Omega}$ por otro que consiste de una colección de elementos finitos y un número

total de N nodos. Se define entonces, un subespacio \tilde{V}^h de \tilde{V} de dimensión finita N construyendo un apropiado conjunto de funciones de base globales ϕ_j , $j = 1, \dots, N$, tal que la función \tilde{u} es aproximada por

$$\tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j^e \phi_j^e(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \quad (25)$$

donde \tilde{u}_j^e es el valor de \tilde{u} en el j -ésimo nodo $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ del elemento y las funciones de interpolación de Lagrange tienen la propiedad

$$\phi_i^e(\tilde{x}_{1j}, \tilde{x}_{2j}) = \delta_{ij}. \quad (26)$$

La forma específica de las funciones ϕ_i^e se deriva de la manera habitual para elementos triangulares y rectangulares.

Sustituyendo la aproximación de elementos finitos (25) para \tilde{u} en la formulación débil (18) para un elemento $\tilde{\Omega}^e$ obtenemos

$$\int_{\tilde{\Omega}^e} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1} \left(a_1 \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_2} \left(a_2 \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \tilde{x}_2} \right) + a_3 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_2} \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_1} \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \tilde{x}_2} \right) \right] d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 = \int_{\tilde{\Omega}^e} a_4 \tilde{v} d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2. \quad (27)$$

Del mismo modo es posible sustituir las típicas funciones de test \tilde{v} en la última formulación, simplificar términos y arribar finalmente a un sistema de ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \tilde{u}_j = F_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (28)$$

donde K_{ij} son los elementos de la matriz de rigidez del problema y F_i las componentes del vector de carga.

4.4. Discretización de la función de costo

La función de costo $J(u(\alpha))$ debe ser transformada del mismo modo que el problema de estado para referirla al dominio fijo, esto es

$$J(\tilde{u}(\alpha)) = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}(\alpha)^2 \alpha d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2. \quad (29)$$

Una aproximación natural de esta función sobre el dominio formado por la colección de elementos cuadriláteros es

$$J(\tilde{u}(\alpha)) \approx \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^N \alpha_h(\tilde{x}_2^M) \sum_{j=1}^4 \tilde{u}^2(P_j^i), \quad (30)$$

donde P_j^i representa al nodo j en el elemento finito i y \tilde{x}_2^M es el punto medio en cada intervalo $[(j-1)h, jh]$, $j = 1, \dots, m$ en el eje \tilde{x}_2 .

En el caso de elementos triangulares se eligió

$$J(\tilde{u}(\alpha)) \approx \frac{h^2}{6} \sum_{i=1}^N \alpha_h(\tilde{x}_2^M) \sum_{j=1}^3 \tilde{u}^2(P_j^i). \quad (31)$$

5. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Una vez realizada la discretización del recinto y del problema de estado, estamos en condiciones de formular una versión discretizada del problema de optimización (7).

Pueden ser identificadas dos tipos de variables: las variables de diseño propiamente dichas y las variables de estado. Las variables de diseño se corresponden con la frontera del dominio y son los puntos de control, en el caso que la discretización se haga por medio de las funciones de Bézier, o las coordenadas correspondientes a la variable \tilde{x}_1 , $0 \leq \tilde{x}_2 \leq 1$, si se trata de la frontera lineal a trozos. Por otro lado, las variables de estado se corresponden con los valores de la temperatura \tilde{u} en los nodos de la malla de elementos finitos.

En un clásico algoritmo de optimización de formas, para resolver el problema, se genera una malla de elementos finitos, se evalúan las variables de estado sobre esa malla para una configuración inicial y se resuelve el problema de optimización para obtener un nuevo conjunto de variables de diseño y una nueva forma de la estructura. Estos pasos se repiten hasta alcanzar la convergencia. En cada iteración, la optimización se realiza sólo sobre las variables de diseño.

Se obtiene un esquema anidado donde repetidamente, para cada conjunto de valores de prueba de las variables de diseño debe calcularse la respuesta del sistema. Se requiere la solución de la ecuación de estado adjunta que debe ser aproximada con los mismos elementos finitos.

Durante mucho tiempo este fue el único camino para resolver este tipo de problemas y su éxito se ha basado en el desarrollo de métodos diferenciales para resolver las ecuaciones de estado.

En los últimos años, con el creciente desarrollo de los métodos de optimización, especialmente en lo que concierne a la aplicabilidad para problemas con gran número de restricciones y de variables, pueden permitirse formulaciones simultáneas que dan lugar a sistemas de gran porte. En el vocabulario de la optimización estructural, esta forma se corresponde con los llamados métodos que trabajan en el *espacio de las variables de diseño* (DVS).

En este trabajo estamos proponiendo una formulación diferente, que se aplica en optimización estructural y es conocida como *análisis y diseño simultáneos* (SAND). Las ecuaciones que se plantean al discretizar el problema de estado se incorporan como restricciones de igualdad en el problema de optimización y la optimización se realiza sobre el conjunto de las variables de diseño ampliado con las variables de estado. En estos casos no hay necesidad de resolver las ecuaciones de estado en cada iteración ya que ellas son resueltas junto con las variables de diseño en el proceso de optimización.

Referencias sobre las dos estrategias aplicadas a problemas de optimización estructural pueden encontrarse en Haftka (1985); Kirsch y Rozvany (1994); Sonzogni y Queizan (2005).

De esta manera resulta un problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad, desigualdad y cotas sobre las variables

$$\begin{aligned}
 \underset{\tilde{x}, \tilde{u}}{\text{mín}} \quad & J(\tilde{u}(\alpha)) \\
 \text{s.a} \quad & K\tilde{u} = F \\
 & A\tilde{x} = \gamma, \\
 & E\tilde{x} \leq b, \\
 & \tilde{x}_b \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_u.
 \end{aligned} \tag{32}$$

El sistema no lineal $K\tilde{u} = F$ resulta de la aproximación por elementos finitos. La matriz K es la matriz de rigidez, de orden $m(m+1)$. Los elementos de K están afectados por el Jacobiano

de la transformación, que depende de la ubicación de las coordenadas de la frontera $\Gamma(\alpha)$, por lo tanto, este sistema es no lineal, ya que contiene productos entre variables de diseño y de estado. En total se tienen $m(m + 1)$ variables del problema de estado y $m + 1$ variables de diseño. Las restricciones de igualdad $A\tilde{x} = \gamma$ contienen la imposición de mantener un recinto de área constante y en el caso de la aproximación de la frontera por las splines de Bézier, las $m/2 - 1$ condiciones de continuidad de las pendientes por ensamble de los subarcos. En $E\tilde{x} \leq b$ están contenidas las condiciones para la frontera $\Gamma(\alpha)$, $2m$ restricciones corresponden a las cotas sobre las pendientes y en el caso de las splines de Bézier se agregan m restricciones al acotar las pendientes en los puntos medios de cada subarco.

6. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

Para la resolución numérica del problema se desarrolló un código en Matlab. El programa fue elaborado sobre la base de una implementación compacta existente del método de elementos finitos, realizado por [Alberty et al. \(1999\)](#) y combinado con la subrutina `fmincon` del toolbox de Optimización de Matlab para resolver el problema concreto de optimización. El código resulta ser estructurado y de manera sencilla puede ser usado tanto con malla de cuadriláteros como con elementos triangulares y con las dos aproximaciones propuestas para la frontera de diseño. Asimismo, puede ser fácilmente modificado para diferentes condiciones en la frontera. La subrutina de optimización usada combina una técnica de programación cuadrática secuencial con una estrategia de globalización de búsqueda lineal que permite obtener tanto factibilidad como optimalidad. Esta subrutina fue convenientemente adaptada de modo de permitir en cada iteración la actualización de la malla y de las correspondientes restricciones no lineales de igualdad provenientes de la aproximación por elementos finitos.

A efectos de comparar los resultados obtenidos con otros existentes en la literatura, en los experimentos numéricos se usaron dos configuraciones iniciales para el recinto. Una forma simétrica definida por

$$\alpha_h(\tilde{x}_2) = \begin{cases} 4\epsilon\tilde{x}_2 + c_2 - \epsilon & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq 1/2 \\ \alpha_h(1 - \tilde{x}_2) & \text{si } 1/2 \leq \epsilon \leq 1, \end{cases} \quad (33)$$

y una configuración inicial trapezoidal dada por

$$\alpha_h(\tilde{x}_2) = 2\epsilon\tilde{x}_2 + c_2 - \epsilon. \quad (34)$$

Para ambas configuraciones iniciales se han usado los siguientes valores de los parámetros del problema $c_1 = 10$, $c_2 = 0.75$, $c_3 = 1$, $m = 20$, $\alpha_m = 0.5$ y $\alpha_M = 1$. El valor de ϵ se tomó igual a 0.1 ya que la experimentación numérica mostró que valores muy pequeños de este parámetro implican un aumento significativo en la cantidad de iteraciones necesarias para resolver el problema de optimización, sin que ello implique una mejora significativa en el valor de la función objetivo o en el diseño óptimo del dominio.

La performance de las distintas discretizaciones y las aproximaciones utilizadas para la frontera están comparadas en las tablas 1 y 2 y en la figura 3. En las tablas se comparan los valores obtenidos para las distintas discretizaciones del dominio y de su frontera. El valor de la función objetivo en el minimizador es $J(u^*)$, la cantidad de iteraciones que realizó la estrategia de optimización hasta alcanzar el óptimo es *iter* y *fevals* es la cantidad de evaluaciones de funciones. Claramente, se observa que cuando se parte de un recinto inicial simétrico, la convergencia se alcanza en menor número de iteraciones utilizando una malla de elementos triangulares, con aproximación lineal a trozos de la frontera, mientras que cuando la configuración inicial es asimétrica, los mejores resultados se obtienen aproximando la frontera por splines cuadráticas

de Bézier.

En la figura 3 se presentan los valores inicial y final de la función de costo para las distintas mallas planteadas y se pone de manifiesto el número de iteraciones que toma cada una de ellas.

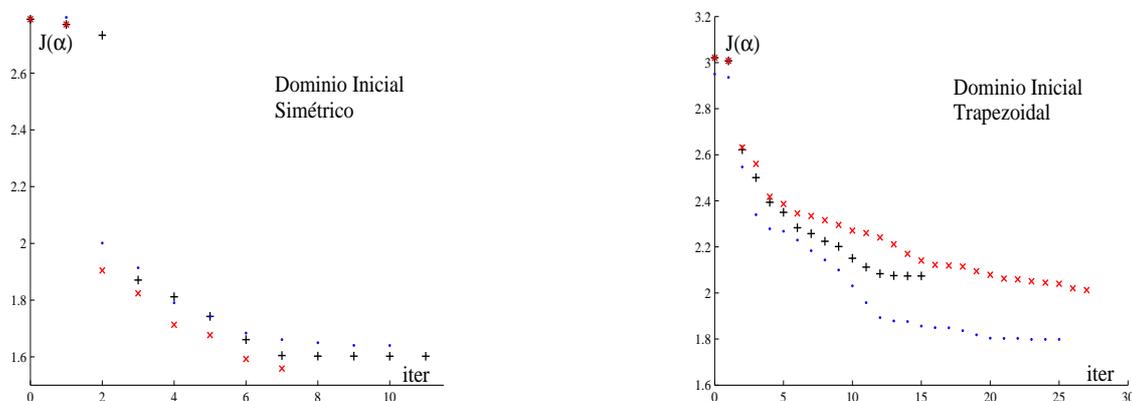


Figura 3: Variación de la función de costo respecto del número de iteraciones con elementos triangulares (\times), cuadriláteros (\cdot) y splines Bézier ($+$).

Elementos	Aprox. front.	$J(u^*)$	iter	fevals
Cuadriláteros	Lineal	1.79847	25	11518
Triángulos	Lineal	2.1246	28	12403
Triángulos	Splines Bézier	2.07393	16	7087

Tabla 1: Dominio inicial trapezoidal.

Las formas obtenidas para los dominios óptimos son comparables a las que se obtienen con las estrategias clásicas que pueden ser consultadas en la literatura. En las figuras 4, 5, 6 se muestran las configuraciones que alcanza el dominio óptimo y la función de estado u partiendo con un dominio inicial simétrico. En las figuras 7, 8, 9 se presentan los mismos resultados para el caso del dominio inicial trapezoidal.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo para optimizar el diseño de un dominio donde se satisface un problema con valores en la frontera relativo a un proceso de difusión. A efectos de resolver numéricamente el modelo, el problema de optimización continuo fue transformado en un problema de dimensión finita sobre un recinto fijo.

El problema de optimización no lineal ha sido resuelto mediante la implementación en Matlab de un algoritmo diseñado sobre la base de un código existente estructurado y sencillo de elementos finitos.

Elementos	Aprox. front.	$J(u^*)$	iter	fevals
Cuadriláteros	Lineal	1.63991	11	4872
Triángulos	Lineal	1.55864	8	3543
Triángulos	Splines Bézier	1.60192	12	5315

Tabla 2: Dominio inicial simétrico.

La formulación del problema de optimización sigue una estrategia conocida como *análisis y diseño simultáneos* por la cual las ecuaciones que resultan al discretizar el problema de estado se incorporan como restricciones de igualdad en el problema de optimización y la optimización se realiza sobre el conjunto de las variables de diseño ampliado con las variables de estado. Una de las principales ventajas de esta formulación es que permite usar cualquier algoritmo disponible de programación no lineal. Las formas obtenidas para los dominios óptimos son comparables a las que se obtienen con las estrategias clásicas que pueden ser consultadas en la literatura.

REFERENCIAS

- J. Albery, C. Carstensen y S. A. Funken. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite implementation. *Numerical Algorithms*, 20:117–137, 1999.
- O. Axelsson y V. A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. Prentice Hall, 2001.
- D. Begis y R. Glowinski. Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés. *Applied Mathematics & Optimization*, 2(2):130–169, 1975.
- G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. Academic Press, 2002.
- M. Grolleau y J. P. Humeau. Numerical solution of a free-boundary-problem by an optimization method. In *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 5:59–63, 1993.
- R. T. Haftka. Simultaneous Analysis and Design. *AIAA Journal*, 23(7):1099–1103, 1985.
- J. Haslinger, T. Kozubek, K. Kunisch y G. Peichl. An embedding domain approach for a class of 2-d shape optimization problems: mathematical analysis. 290:665–685, 2004.
- J. Haslinger y R. A. E. Mäkinen. *Introduction to Shape Optimization. Theory, Approximation, and Computation*. SIAM, 2003.
- K. Höllig. *Finite Element Methods with B-Splines*. Siam, 2003.
- U. Kirsch y G. I.N. Rozvany. Alternative formulations of structural optimization. *Structural Optimization*, 7:32–41, 1994.
- M. C. Maciel, E. A. Pilotta y G. Sottosanto. Thickness optimization of an elastic beam. *Mat*, 14:13–23, 2007.
- V. E. Sonzogni y A. Queizan. Simultaneous analysis and design of large structures by domain decomposition. In *Proc. 6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005.
- T. Tiihonen. Shape optimization and trial methods for free boundary problems. *RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 31(7):805–825, 1997.

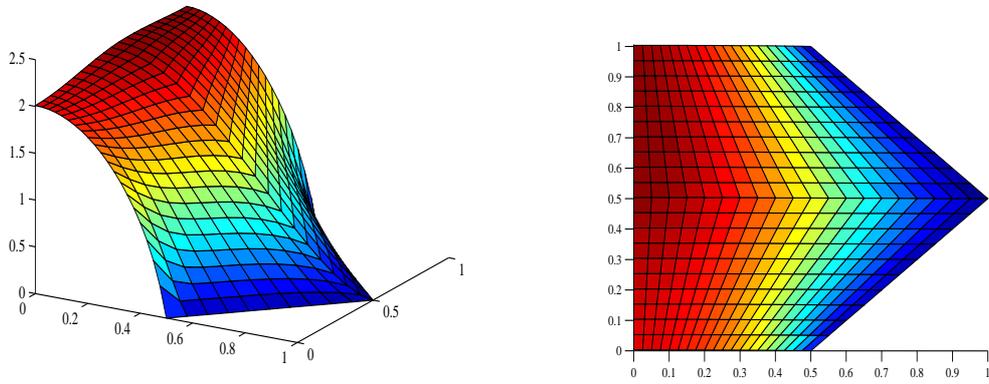


Figura 4: Dominio inicial simétrico, elementos cuadriláteros.

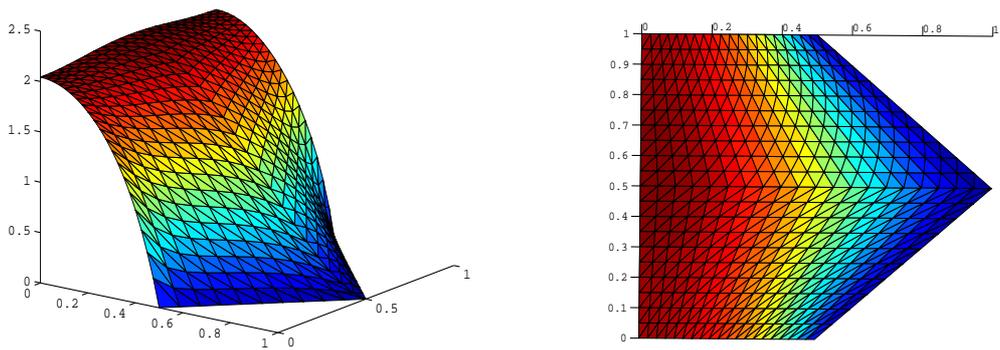


Figura 5: Dominio inicial simétrico, elementos triangulares.

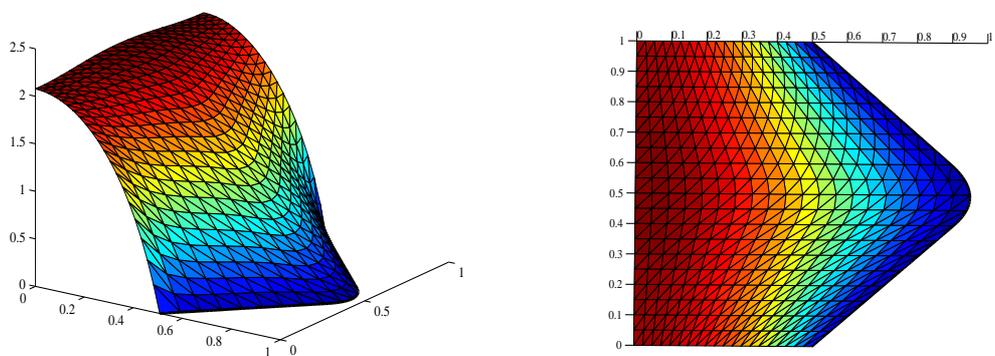


Figura 6: Dominio inicial simétrico, elementos triangulares y aproximación splines Bézier.

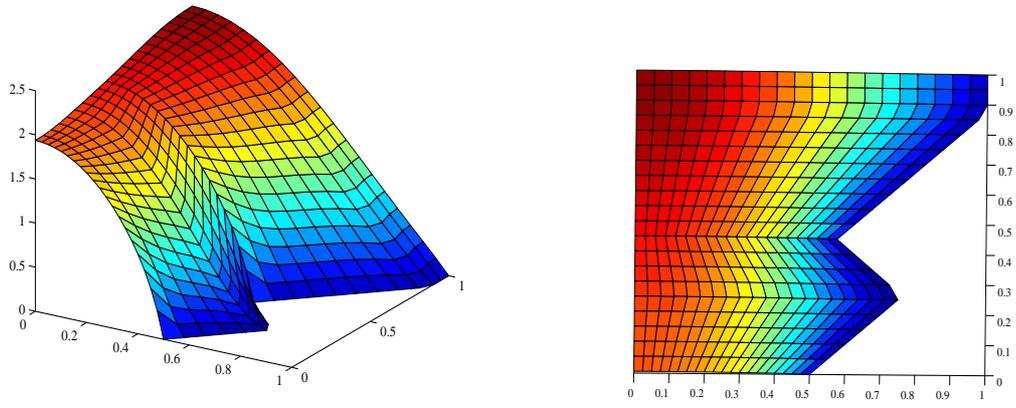


Figura 7: Dominio inicial trapezoidal, elementos cuadriláteros.

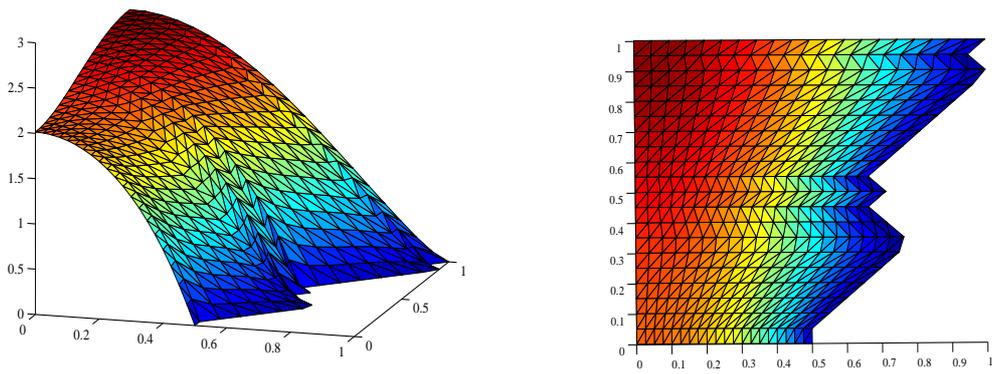


Figura 8: Dominio inicial trapezoidal, elementos triangulares.

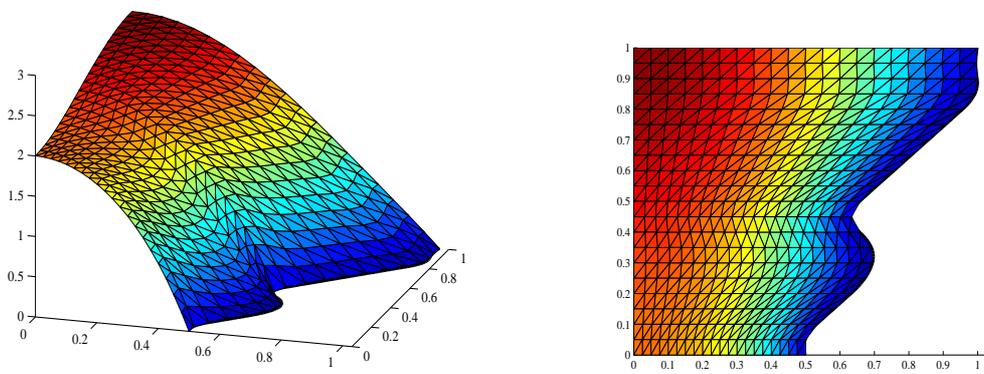


Figura 9: Dominio inicial trapezoidal, elementos triangulares y aproximación splines Bézier.