

## AVANCES EN LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA Y EL DISEÑO DE SUPERFICIES ÓPTIMAS

R. Ausas<sup>a</sup>, P. Ragot<sup>b</sup>, G. Bayada<sup>c</sup>, G. Buscaglia<sup>d,a</sup>, I. Ciuperca<sup>e</sup> and M. Jai<sup>f</sup>

<sup>a</sup>Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro, 8400, Bariloche, Argentina, e-mail:  
rfausas@gmail.com

<sup>b</sup>RENAULT, Direction de l'Ingenierie Mécanique, Service Mécanique des Solides et Thermique (66151)  
92508 RUEIL MALMAISON CEDEX, e-mail: patrick.ragot@renault.com

<sup>c</sup>CNRS-UMR 5514, LAMCOS, INSA de LYON, Villeurbanne, France 69621, Villeurbanne, France,  
e-mail: Guy.Bayada@insa-lyon.fr

<sup>d</sup>Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Univ. de São Paulo, São Carlos, Brasil, e-mail:  
gustavo.buscaglia@gmail.com

<sup>e</sup>CNRS-UMR 5208, Univ. Claude Bernard - Lyon I, F-69621 Villeurbanne, France, e-mail:  
ciuperca@maply.univ-lyon1.fr

<sup>f</sup>CNRS-UMR 5208, INSA de LYON, Mathématiques, Bat Leonard de Vinci, F-69621 Villeurbanne,  
France, e-mail: Mohammed.Jai@insa-lyon.fr

**Keywords:** Lubricación, Cavitación, Micro-texturas, Cojinetes.

### Abstract.

En este trabajo se describen varios problemas actuales de modelado y diseño óptimo de dispositivos lubricados con fluidos incompresibles. Se presentan las ecuaciones de gobierno y los modelos matemáticos del fenómeno de cavitación, que es crucial para cojinetes circunferenciales (e.g.; bujes), así como los métodos numéricos utilizados. Se incluye también una breve revisión de resultados teóricos y numéricos recientes. Por último, se reportan tres resultados novedosos: En primer lugar, una demostración numérica de reducción de la fricción mediante texturación de la superficie. Se trata de la primera evidencia numérica obtenida con métodos conservativos, e indica que la mencionada reducción sólo es posible cuando la carga aplicada es de baja intensidad. En segundo lugar, una evaluación de formas obtenidas por diseño óptimo en las condiciones del ensayo NMVEG, de control de emisiones y consumo de combustibles para vehículos comercializados en la Unión Europea. En tercer lugar, realizamos una optimización de la forma de un cojinete radial sometido a la carga dinámica impuesta por un motor de cuatro tiempos. Se trata de la primera optimización de este tipo, y si bien preliminares los resultados sugieren que es posible una reducción del orden de 5% en la fricción.

# 1 INTRODUCCIÓN

Los dispositivos lubricados son extremadamente frecuentes en las más diversas tecnologías: Automotriz, micromecánica, hidráulica, bioingeniería, etc. El diseño de superficies lubricadas comparte objetivos con muchas áreas de la mecánica, a saber minimizar las pérdidas por fricción y maximizar la estabilidad del dispositivo. Con diferente éxito se han ensayado en los últimos años tanto un enfoque microscópico (texturación de la superficie para mejorar su comportamiento) como otro macroscópico (diseño de una forma óptima del dispositivo) (Kato and Obara, 1996; Etsion and Halperin, 2002; Ryk et al., 2002; Kovalchenko et al., 2004; Jane Wang and Zhu, 2005).

El texturado artificial de superficies es atractivo como herramienta para mejorar el comportamiento estático y dinámico de dispositivos lubricados tales como cojinetes y sellos mecánicos o inclusive cabezales lectores en sistemas de almacenamiento magnético como discos rígidos, ya que consiste simplemente en realizar un tratamiento superficial a una pieza ya diseñada. Por esta razón, grandes esfuerzos de investigación en el área de lubricación se han dirigido hacia el estudio del efecto de texturas (Etsion, 2005). En ausencia de cavitación, los resultados matemáticos existentes indican que la texturación de la superficie es siempre contraproducente, tanto en el caso incompresible como compresible (Buscaglia et al., 2005a,c). Al aparecer cavitación, en cambio, hemos hallado que el resultado numérico (no existen resultados teóricos) se vuelve extremadamente sensible al modelo de cavitación utilizado (cosa que no ocurre si la superficie no está texturada). Mostraremos incluso evidencia numérica indicando que en un cierto rango de funcionamiento es posible reducir la fricción por texturación. Para captar estos fenómenos es esencial un método numérico especialmente adaptado al problema. En este trabajo describimos las herramientas numéricas involucradas en esta temática y la complementamos con avances recientes aún no publicados.

Pasando ahora al diseño de formas óptimas, algunas son conocidas hace ya mucho tiempo. Más recientemente hemos extendido la optimización de superficies a ensayos normados de emisión de contaminantes, considerando todas las condiciones de operación (en una aproximación estática) durante un ensayo de una duración aproximada de una hora. Algunos de estos resultados se incluyen ilustrativamente en este artículo. La dificultad numérica, sin embargo, ha impedido hasta ahora la optimización de superficies de cojinetes en situaciones altamente dinámicas. Mostraremos en este trabajo avances recientes en esta dirección, en particular resultados preliminares de optimización considerando las cargas dinámicas variables a lo largo de un ciclo de un motor de cuatro tiempos.

## 2 ECUACIONES Y MODELOS EN LUBRICACIÓN

### 2.1 Ecuación de Reynolds

La ecuación fundamental de gobierno en lubricación se conoce como Ecuación de Reynolds, la cual representa simplemente el balance de masa en el lubricante. Se trata de una ecuación para el campo de presiones  $p$  y asume diferentes formas de acuerdo al problema que se considera y las definiciones de flujo que se hagan.

Para el caso compresible, la ecuación en su forma dimensional es

$$\nabla \cdot \left\{ \rho \left( \frac{h^3}{12\mu} \nabla p - \frac{h}{2} \vec{U} \right) \right\} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (1)$$

válida en todo punto  $(x_1, x_2)$  perteneciente a un cierto dominio  $\Omega$  y donde  $t$  representa el tiempo,

$h(x_1, x_2, t)$  representa la distancia entre las dos superficies en contacto lubricado,  $\mu$  es la viscosidad del lubricante,  $\vec{U}$  es el vector de velocidad relativa entre las dos superficies y  $\rho$  es la densidad del lubricante, que depende de la presión a través de una ecuación de estado. Como consecuencia, la ecuación es del tipo parabólico.

Por otra parte, para el caso incompresible, la densidad del lubricante puede considerarse constante, con lo cual, en ausencia de cavitación, la ecuación de Reynolds resulta

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{h^3}{12\mu} \nabla p - \frac{h}{2} \vec{U} \right\} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

que es del tipo elíptico.

## 2.2 Modelos de Cavitación - Motivación

Una cuestión clave en el modelado matemático-numérico en lubricación incompresible es el tratamiento del fenómeno de cavitación, correspondiente a presiones por debajo de la presión de vapor del lubricante. La cavitación ocurre en regiones en donde el film fluido se hace divergente, en micro-texturas (micro-cavitación) o si la cantidad de lubricante es insuficiente (starvation).

Existen dos modelos principales para tomar en cuenta la cavitación: El primero es debido a Reynolds y es bastante simple de implementar numéricamente, ya que se reduce a una desigualdad variacional. El mismo es ampliamente utilizado (ver por ejemplo [Brizmer et al. \(2003\)](#) y [Kato and Obara \(1996\)](#)). El segundo modelo, debido a [Elrod and Adams \(1974\)](#), es más proclive a inestabilidades numéricas pero es físicamente más realista dado que fuerza la conservación de la masa, la cual no siempre se cumple cuando se aplica el modelo de Reynolds. En este artículo consideramos el modelo de Elrod-Adams en su formulación  $p - \theta$  que ha sido detalladamente analizado por Bayada y colaboradores (ver por ejemplo [Bayada and Chambat \(1984\)](#)).

Se sabe que ambos modelos de cavitación predicen resultados bastante similares en muchas situaciones prácticas, y que las soluciones sólo difieren en su predicción de las fronteras de reformación del film fluido. Estas diferencias pueden ser de gran importancia cuando se analizan dispositivos micro-texturados donde la situación se torna muy compleja. En este caso la frontera de reformación podría consistir de muchas zonas no conexas entre si debido al fenómeno de micro-cavitación antes mencionado. En [Ausas et al. \(2007\)](#) analizamos en detalle las diferencias entre los dos modelos en casos de micro-texturación y se observa que el modelo de Reynolds subestima ampliamente la zona cavitada, prediciendo una reformación espuria del film fluido a escala de las celdas de textura. En el citado artículo se concluye que el uso del modelo de Reynolds en estos casos debe ser considerado inadecuado.

## 2.3 Descripción de los Modelos - Caso Estacionario

Sin pérdida de generalidad, se introduce la geometría del problema que nos interesa estudiar, el cual consiste de un cojinete radial, como se muestra en la Fig. 1.

En este tipo de problemas el dominio  $\Omega$  se divide en dos regiones: La región activa ( $\Omega^+$ ) en la cual la presión es estrictamente positiva, y la región cavitada ( $\Omega_0$ ) donde la presión es esencialmente cero.

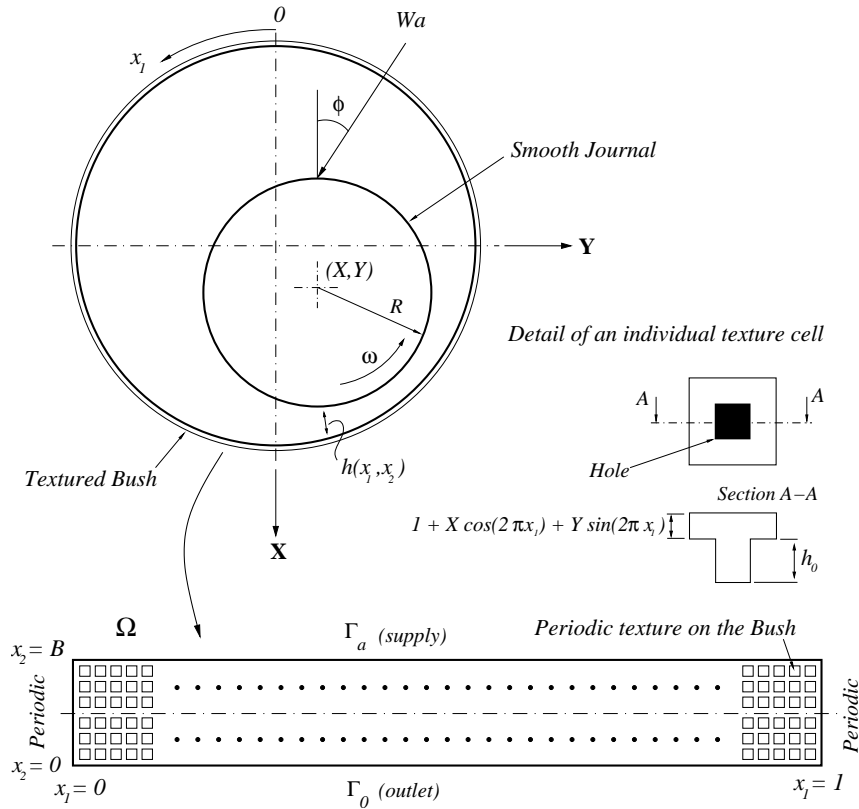


Figure 1: Esquema de un cojinete y su correspondiente dominio bidimensional.

$$\begin{aligned}\Omega &= (0, 1) \times (0, B) \\ \Omega^+ &= \{(x_1, x_2) \in \Omega; p(x_1, x_2) > 0\} \\ \Omega_0 &= \{(x_1, x_2) \in \Omega; p(x_1, x_2) = 0\}\end{aligned}$$

En el régimen estacionario y considerando un lubricante newtoniano, la ecuación adimensional que gobierna el campo de presiones *en la región activa* es

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) = \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (3)$$

Para el caso de un cojinete radial (ver Fig. 1), si  $(X, Y)$  es la posición del eje,  $h$  estará dado por

$$h(x_1, x_2) = 1 + X \cos(2\pi x_1) + Y \sin(2\pi x_1) + h_t(x_1, x_2) \quad (4)$$

donde  $h_t$  representa el apartamiento de la forma circular, sea macroscópica o microscópica (textura).

La ecuación (3), conocida como *Ecuación de Reynolds*, puede ser resuelta sin dificultad si el contorno de cavitación  $\Sigma$  (el borde de  $\Omega^+$ ) es conocido. Los dos modelos que se describen a continuación son modelos de cavitación en el sentido que ellos definen la localización de  $\Sigma$ .

#### • *Modelo de Reynolds*

En el modelo de Reynolds la presión es la única variable que gobierna el problema de lubricación. La formulación de este modelo es mejor entendida matemáticamente en términos de una

desigualdad variacional, lo cual cae fuera del alcance de este artículo (ver [Bayada and Du Parquet \(1974\)](#)). Eventualmente, el modelo provee la condición de contorno a ser aplicada en la frontera libre  $\Sigma$  que separa  $\Omega^+$  (“full-film”) de la región cavitada  $\Omega_0$  (sea ésta un punto de ruptura o uno de reformación).

El flujo de masa no dimensional en este modelo es

$$\vec{J} = -h^3 \nabla p + h \hat{e}_1 \quad (5)$$

donde  $\hat{e}_1$  es el vector unitario paralelo a  $x_1$ . Para cualquier tramo  $\Sigma$  en el cual la presión es cero, definamos (arbitrariamente) una normal  $\hat{n}$ . Esto nos permite definir los límites positivos y negativos de  $\vec{J}$  como

$$\vec{J}_{\pm}(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \vec{J}(\vec{x} \pm \epsilon \hat{n}) \quad (6)$$

Con esta definición, la condición de contorno general impuesta por el modelo de Reynolds en el contorno de presión cero  $\Sigma$  es

$$(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) \cdot \hat{n} \geq 0 \quad (7)$$

Notar también que, si  $h$  es continua en  $x \in \Sigma$ , entonces (7) implica que en  $\vec{x}$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_- - \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_+ \geq 0 \quad (8)$$

Sin embargo, ya que  $p$  es positiva (o cero) en todo punto, y es también nulo en  $\Sigma$ , es evidente que, en  $\vec{x}$ ,

$$\left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_- \leq 0 \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_+ \geq 0 \quad (9)$$

Las condiciones (8) y (9) sólo pueden ser satisfechas simultáneamente si

$$\left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_- = \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_+ = 0$$

la cual es la forma más familiar de la condición de Reynolds en  $\Sigma$ . Ya que las texturas con las que se suele trabajar son discontinuas y tanto ruptura como reformación ocurren en las discontinuidades, es (7) la condición que debe tomarse en cuenta al definir el modelo de Reynolds. Por inspección directa de (7) el lector puede verificar fácilmente que el modelo es no conservativo. De hecho,  $(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) \cdot \hat{n}$  es el flujo neto de masa “creado” en  $\vec{x} \in \Sigma$

• **Modelo de Elrod-Adams - Formulación  $p - \theta$**

En este modelo, la falta de conservatividad que se observa en el modelo de Reynolds es corregida mediante la introducción de un campo escalar  $\theta$  el cual puede ser visto como una función de saturación ([Bayada and Chambat, 1986a](#)), como la fracción del film fluido que posee lubricante ([Elrod and Adams, 1974](#)), o como el resultado de la homogeneización de los filetes de aceite a través de la altura del gap ([Jakobson and Floberg, 1957](#)). Este campo toma valores  $0 \leq \theta \leq 1$ , de modo que  $\theta = 1$  en la región de film completo ( $\theta = 1, p > 0$ ) y  $\theta < 1$  en la región cavitada ( $0 \leq \theta < 1, p = 0$ ).

En este modelo el flujo se escribe de la siguiente forma

$$\vec{J} = -h^3 \nabla p + h \theta \hat{e}_1 \quad (10)$$

con lo cual la formulación matemática resulta

*Hallar  $(p, \theta)$  tal que*

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) = \frac{\partial(\theta h)}{\partial x_1} \quad p > 0, \theta = 1 \text{ en } \Omega^+ \text{ y } p = 0, 0 < \theta < 1 \text{ en } \Omega_0 \quad (11)$$

La condición a ser satisfecha sobre  $\Sigma$ , con la notación introducida previamente, corresponde ahora a una conservación estricta de la masa.

$$(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) \cdot \hat{n} = 0 \quad (12)$$

Si  $h$  es continua (i.e.,  $h_- = h_+ = h$ ), la condición (12) coincide con la condición de Reynolds  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  en las fronteras de *ruptura*. De hecho, definiendo  $\hat{n}$  como el vector normal saliente desde la región no cavitada, tenemos, en el borde de ruptura,

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{n} > 0, \quad \theta_- = 1 \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_+ = 0$$

lo cual, combinado con (12), lleva a

$$h^3 \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_- = h(1 - \theta_+) \hat{e}_1 \cdot \hat{n} \geq 0 \quad (13)$$

Ya que (9) debe ser todavía válida porque es simplemente una consecuencia de que  $p \geq 0$ , tenemos que la derivada normal de  $p$  debe anularse, como se afirmara. En bordes de reformación sin embargo, aparece un salto en  $\theta$  y en  $\frac{\partial p}{\partial n}$  que lleva a una solución que conserva la masa, a diferencia de lo que ocurre con el modelo de Reynolds.

Comparaciones de las soluciones obtenidas con ambos modelos han sido publicadas por [Bayada and Chambat \(1986b, 1984\)](#), ilustrando el carácter no conservativo del modelo de Reynolds, así como también la existencia de áreas no cavitadas físicamente no realistas. Ambos fenómenos se amplifican cuando hay micro-texturas, como se dijo anteriormente. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de emplear un modelo de cavitación apropiado, razón por la cual se ha adoptado en este trabajo el correspondiente a Elrod-Adams, tanto para el caso donde se analizan micro-texturas en situaciones estáticas como para el caso de macro-texturación en el régimen dinámico.

## 2.4 Modelo $p - \theta$ - Caso Transitorio

El problema transitorio en su forma no dimensional se formula de la siguiente manera para el modelo  $p - \theta$

*Hallar  $(p, \theta)$  tal que*

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) = \frac{\partial(\theta h)}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial(\theta h)}{\partial t} \quad p > 0, \theta = 1 \text{ en } \Omega^+ \text{ y } p = 0, 0 < \theta < 1 \text{ en } \Omega_0 \quad (14)$$

que a diferencia del caso estacionario contiene el término de derivada temporal también conocido como “squeeze term”.

## 2.5 Resolución Numérica - Modelo $p - \theta$

Se presenta la formulación numérica empleada en la resolución de las ecuaciones para el modelo  $p - \theta$  transitorio. Para el caso estacionario el esquema numérico es similar. El primer paso en la formulación numérica es la discretización de las ecuaciones por el método de diferencias finitas. Considerando una discretización del dominio computacional  $\Omega$  en  $I$  puntos en la dirección  $x_1$  y  $J$  puntos en la dirección  $x_2$ , el siguiente stencil, el cual involucra ambos campos incógnita  $p$  y  $\theta$ , se obtiene para el nodo  $(i, j)$  al índice de tiempo  $n$ :

$$2 \Delta x_1 \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j}^{n-1}}{\delta t} + (c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n) \Delta x_1 = s_{i,j}^n p_{i+1,j}^n - (s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) p_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n p_{i-1,j}^n + \\ + q^2 \{ s_{i,j+1}^n p_{i,j+1}^n - (s_{i,j+1}^n + s_{i,j}^n) p_{i,j}^n + s_{i,j}^n p_{i,j-1}^n \} \quad (15)$$

donde

$$s_{i,j} = \theta_{i,j} (h_{i,j})^3 \quad c_{i,j} = \theta_{i,j} h_{i,j} \quad q = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \quad (16)$$

y donde  $\delta t$  es el paso de tiempo empleado.

El método que se ha escogido para la resolución de las ecuaciones obtenidas consiste en un proceso iterativo de Gauss-Seidel, en el cual no es necesario el ensamblaje de ningún sistema lineal. Se ha encontrado que este método es conveniente para el modelo  $p - \theta$ , evitando dificultades de convergencia que aparecen con otros métodos.

La estrategia iterativa puede ser delineada como sigue:

*Hallar  $(p_{i,j}^n, \theta_{i,j}^n)$   $i = 1, 2, \dots, I$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  y  $n = 1, 2, \dots, N$  tal que*

$$(p_{i,j}^n, \theta_{i,j}^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_{i,j}^{k,n}, \theta_{i,j}^{k,n}), \quad (p_{i,j}^{0,n}, \theta_{i,j}^{0,n}) = (p_{i,j}^{n-1}, \theta_{i,j}^{n-1})$$

donde

$$p_{i,j}^{k,n} = \omega_p P_{i,j}^{k,n} + (1 - \omega_p) p_{i,j}^{k-1,n} \\ \theta_{i,j}^{k,n} = \omega_\theta \Theta_{i,j}^{k,n} + (1 - \omega_\theta) \theta_{i,j}^{k-1,n}$$

con  $\omega_p$  y  $\omega_\theta$  los parámetros de relajación. Los valores de  $P_{i,j}^{k,n}$  y  $\Theta_{i,j}^{k,n}$  son los valores de la presión  $p$  y el campo  $\theta$  en cada nodo, en la iteración  $k$  y paso de tiempo  $n$  obtenidos del stencil dado en la Ec. (15) con todas las demás cantidades tomadas en su último valor computado. En este caso, el cálculo simultáneo de  $p$  y  $\theta$  en un nodo es posible debido a que en la región cavitada la presión es conocida ( $p = 0$ ,  $0 < \theta < 1$ ) mientras que en la zona no cavitada  $\theta$  es conocida ( $\theta = 1$ ,  $p > 0$ ).



### 3 EL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO: RESULTADOS TEÓRICOS

La evaluación de la performance de un dispositivo lubricado, de importancia para el análisis que se pretende realizar, está basada en el cálculo de la capacidad de carga  $W$  y la fricción  $F$ , las cuales se definen como

$$W = \int_{\Omega} p \, d\Omega \quad (17)$$

$$F = \int_{\Omega} \frac{1}{h} \, d\Omega + \int_{\Omega} 3h \frac{\partial p}{\partial x_1} \, d\Omega \quad (18)$$

El primer término en  $F$  se conoce como el término de *Couette* y el segundo como el término de *Poiseuille*. Ambos son, implícitamente, funciones del campo escalar  $h$  de separación entre las superficies. Los criterios de diseño procuran, o bien maximizar la capacidad de carga para un dado espaciamiento mínimo entre las superficies, o bien minimizar la fricción para una dada carga aplicada. Ambos problemas se prestan para utilizar técnicas de diseño óptimo, mediante cálculos analíticos o numéricos. En geometrías simples, la forma óptima del cojinete fue obtenida por [Rayleigh \(1918\)](#) (el conocido “escalón de Rayleigh”). También debe mencionarse en este contexto la contribución de [Maday \(1970\)](#). La optimización en condiciones más generales, apoyada en métodos numéricos para la resolución de la ecuación de Reynolds, fue introducida por [Rohde and McAllister \(1976\)](#). En estos casos, si bien se consideró el problema incompresible que tratamos en este artículo, no es necesario tener en cuenta fenómenos de cavitación porque las formas consideradas son de cuña convergente. También cabe mencionar trabajos en el área de diseño óptimo de contactos lubricados en el caso compresible: cojinetes de aire radiales ([Robert, 1990, 1995](#)), cabezas lectoras de discos magnéticos ([Hashimoto and Hattori, 2000](#)) y cojinetes de aire de turbinas de alta velocidad ([Jai et al., 2004](#)).

Fuera del enfoque clásico utilizado en los artículos antes mencionados, es también posible aplicar al problema de lubricación la técnica conocida como *optimización topológica* (ver por ejemplo [Masmoudi et al. \(2005\)](#) o [Novotny et al. \(2003\)](#)), en la cual la forma de las superficies es perturbada introduciendo depresiones de profundidad finita (en lugar de infinitesimal como en el caso de optimización clásica) pero de diámetro infinitesimal (ver [Buscaglia et al. \(2005b\)](#)). Este enfoque también permite obtener formas óptimas, equivalentes a las obtenidas con métodos clásicos (mostramos un ejemplo en la Fig. 2).

Las técnicas mencionadas arriba (optimización clásica y optimización topológica) no permiten, sin embargo, analizar el problema de la determinación de una textura microscópica óptima, es decir, de un tratamiento superficial (cuasi-)periódico de longitud de onda  $\epsilon$  mucho menor que el diámetro del dispositivo lubricado. La simulación de dispositivos con este tipo de formas se apoya en la teoría de homogeneización ([Bensoussan et al., 1978](#); [Allaire, 1992](#); [Buscaglia and Jai, 2004, 2003](#); [Buscaglia et al., 2002](#)). La optimización de texturas periódicas requiere por lo tanto una combinación de técnicas de homogeneización con técnicas de diseño óptimo, tal como fue propuesto recientemente por [Buscaglia et al. \(2005a, 2007\)](#).

Como ya fuera reportado en trabajos anteriores ([Buscaglia et al., 2007](#); [Quiroga et al., 2005](#)), la optimización de texturas en el problema homogeneizado (es decir, cuando el tamaño de la textura  $\epsilon$  tiende a cero) admite un resultado exacto cuando no existe cavitación: *La no-texturación (superficie pulida, sin texturas superficiales) maximiza la capacidad de carga y minimiza el coeficiente de fricción*. Este resultado sin embargo deja abierta la posibilidad de que alguna textura no nula reduzca la fricción en casos en que haya cavitación. El análisis de esta posibilidad forma parte de los trabajos reportados en este artículo. En presencia de cavitación el



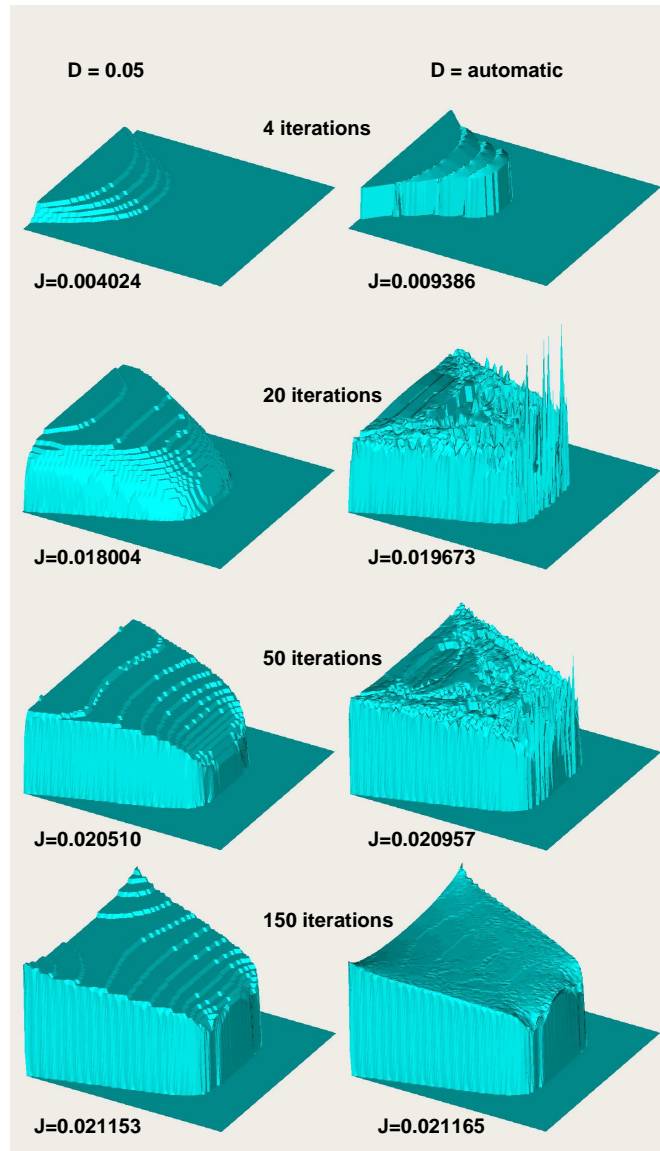


Figure 2: Proceso de optimización de un patín lubricado mediante técnicas de optimización topológica. La función objetivo  $J$  es la capacidad de carga. Se utilizan dos estrategias (columna izquierda y derecha) (Buscaglia et al. (2005b)).

único enfoque posible es numérico, e incluso los resultados son sumamente sensibles al modelo utilizado, como se mencionara anteriormente. Los resultados numéricos de Quiroga (2005) usando el modelo de cavitación de Reynolds mostraban, por ejemplo, que toda textura hacía aumentar la fricción. Con el modelo de Elrod-Adams veremos que ocurre lo contrario cuando la carga es suficientemente baja, primer resultado positivo de nuestro conocimiento.

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para el caso de cojinetes radiales. En estos dispositivos siempre existe cavitación, y ésta juega un rol fundamental en la respuesta del mismo. Consideramos primero el caso estacionario incluyendo el efecto de micro-texturas. A posteriori, empleando formas macroscópicas, se analiza el comportamiento de co-

jinetes optimizados en las condiciones de un ensayo normalizado conocido como NMVEG. Finalmente, para el caso dinámico, se plantea el problema de optimización de forma bajo las solicitaciones impuestas por un motor de cuatro tiempos.

#### 4.1 Preliminares

##### • *Performance*

Para evaluar la performance en el caso de un cojinete tomando en cuenta el fenómeno de cavitación, la definición del torque por fricción queda modificada de la siguiente manera

$$T = \int_{\Omega^+} \frac{1}{h} d\Omega + \int_{\Omega^+} 3h \frac{\partial p}{\partial x_1} d\Omega \quad (19)$$

La integración sobre  $\Omega^+$  en lugar de  $\Omega$  en la definición de  $T$  es de fundamental importancia respecto de las diferencias en la predicción de esta cantidad según los modelos de Reynolds y Elrod-Adams. En la definición de  $W_X$  y  $W_Y$  esto no juega ningún rol debido a que el integrando contiene a la presión, la cual es nula fuera de  $\Omega^+$ . Por otra parte, algunos modelos más sofisticados pueden ser usados para evaluar el torque por fricción tomando en cuenta los llamados “streamers” en la zona cavitada (ver por ejemplo [Etsion and Pinkus \(1974\)](#)), pero en cualquier caso, esto no cambiará el campo de presiones o la zona de cavitación  $\Omega_0$  predicha por cada modelo. Sin embargo, la contribución a la fricción proveniente de  $\Omega_0$  no será cero como queda implicado en (19). En este trabajo se considerará como alternativa, en los casos dinámicos, la siguiente definición para el término de *Couette* del torque

$$T_c = \int_{\Omega^+} \theta \frac{1}{h} d\Omega \quad (20)$$

El cual contiene a  $\theta$  en el integrando como factor de peso.

##### • *Condiciones de contorno sobre $\partial\Omega$*

Las condiciones de contorno sobre  $\partial\Omega$  para el cojinete que se considerará son las siguientes

$$p = 0 \quad \text{en } \Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega; x_2 = 0\} \quad (21)$$

$$p = p_a \quad \text{en } \Gamma_a = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega; x_2 = B\} \quad (22)$$

$$p(0, x_2) = p(1, x_2) \quad x_2 \in (0, B) \quad (23)$$

$$\nabla p(0, x_2) = \nabla p(1, x_2) \quad x_2 \in (0, B) \quad (24)$$

donde (21) y (22) representan las condiciones de contorno a ser aplicadas en los bordes circunferenciales de salida y alimentación respectivamente y (23) y (24) las condiciones de borde periódicas para la presión y su gradiente respectivamente en  $x_1 = 0$  y  $x_1 = 1$  (ver Fig. 1).

#### 4.2 Micro-Texturas - Análisis Estático

En esta parte presentamos evidencia numérica de que el torque por fricción  $T$  puede ser reducido en un cierto rango de condiciones de operación en el régimen estático mediante el uso de micro-texturas periódicas.

##### • *La Textura*

Para los casos que se presentarán, la textura tendrá una forma cuadrada y será definida por los siguientes parámetros

- Número de texturas a lo largo de las direcciones  $x_1$  y  $x_2 \rightarrow N_1$  y  $N_2$
- Profundidad  $\rightarrow h_0$
- Fracción de área  $\rightarrow s$

donde la fracción de área  $s$  representa la fracción de una celda individual de textura que está cubierta por un agujero de profundidad  $h_0$  (ver Fig. 1).

En la Fig. 3 se muestran los campos  $p$  y  $\theta$  en algunas situaciones típicas. En la parte superior, mostramos un caso correspondiente a un cojinete liso mientras que en el centro y en la parte inferior se muestran los resultados para un cojinete texturado con  $50 \times 5$  y  $100 \times 10$  texturas respectivamente. La profundidad de textura  $h_0$  considerada es 0.3 y la fracción de área  $s$  20%. Adicionalmente, el espesor no dimensional  $B$  del cojinete considerado y la presión de alimentación no dimensional  $p_a$  (ver Eq. (22)) se tomarán iguales a 0.1 y 0.0075 respectivamente.

Los campos  $\theta$  mostrados en la Fig. 3 (derecha) permiten distinguir la región cavitada  $\Omega_0$  de la región no cavitada  $\Omega^+$ , en la cual la presión es estrictamente mayor que cero. Esta región puede ser afectada por la presión de alimentación como puede ser observado en la Fig. 4 donde las curvas de nivel de  $\theta$  son mostradas para diferentes valores de  $p_{al}$  en el caso de un cojinete liso. Para el caso de cojinetes texturados se observa una situación similar.

#### • *Evaluación de la Performance*

Para llevar a cabo la evaluación de la performance del dispositivo lubricado y por razones de claridad se dividirá a los valores de carga aplicada  $W_a$  en dos diferentes rangos:

- Rango 1  $\rightarrow W_a \in (0.0003, 0.0016)$
- Rango 2  $\rightarrow W_a \in (0.002, 0.010)$

En cuanto a la micro-texturación, se considerará un arreglo con  $50 \times 5$  texturas de diferentes profundidades y fracción de área  $s$  igual a 20 %, con lo cual, una discretización espacial de  $750 \times 75$  nodos resulta suficiente.

Pasando a los resultados, por un lado, para el primer rango considerado, en la Fig. 5 en la parte izquierda se muestra el torque por fricción  $T$  como función de  $W_a$  para diferentes valores de la profundidad de textura  $h_0$ . En este rango podemos apreciar claramente la reducción en  $T$  respecto del caso liso correspondiente a  $h_0 = 0$ . Debajo de estas curvas se muestran las dos componentes de la fricción, el término de Couette y Poiseuille respectivamente. Como se puede ver, en este caso se pueden obtener reducciones de fricción en el orden de un 2.5%.

Se ha observado que el comportamiento de la fricción mostrado en la Fig. 5 para el primer rango de cargas estudiado (izquierda) es bastante dependiente de la presión de alimentación  $p_{al}$ . Por el momento no hemos hallado una explicación física o matemática acabada de este comportamiento.

Para finalizar, en la columna izquierda de la Fig. 5, mostramos los resultados para el segundo rango de cargas  $W_a$  considerado. En este caso podemos ver que las texturas producen un aumento en la fricción con respecto al cojinete liso. Para los parámetros considerados, el término

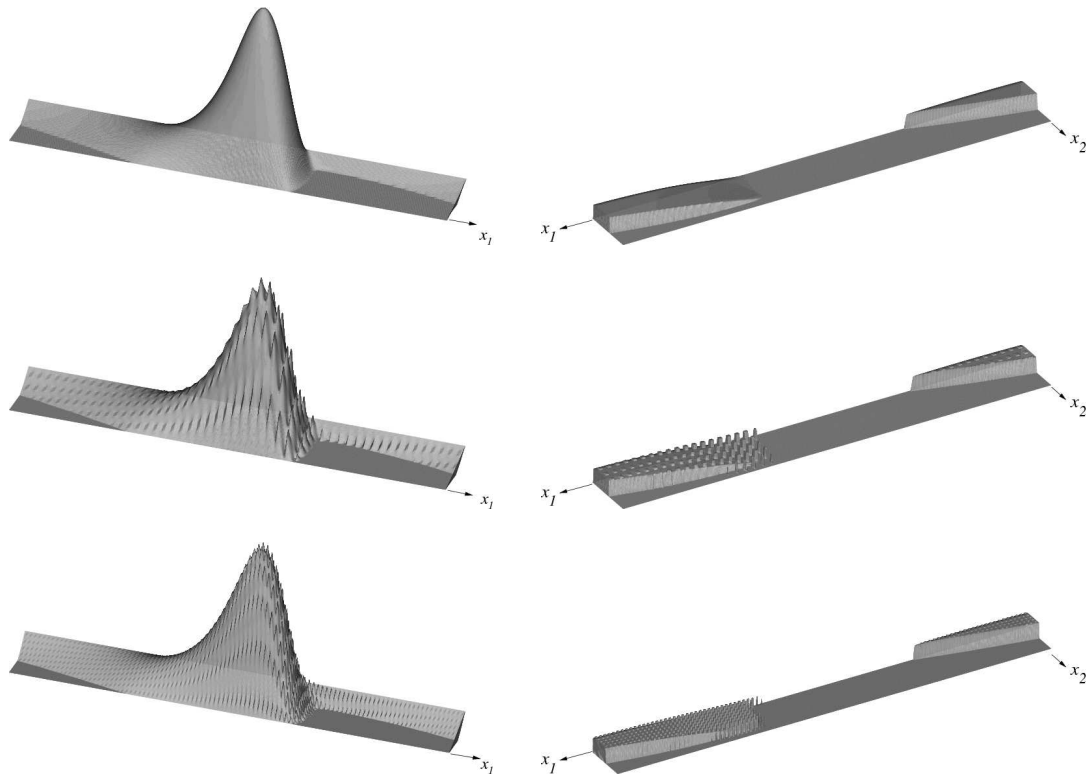


Figure 3: Vista 3D del campo de presión (izquierda) y  $\theta$  (derecha) obtenidos por el modelo de Elrod-Adams  $p - \theta$  para un cojinete liso (arriba) y dos cojinetes texturados (centro y abajo) con  $50 \times 5$  y  $100 \times 10$  texturas respectivamente. Los valores máximos para la presión son 0.055 (liso, arriba), 0.048 (texturado  $50 \times 5$ , centro) and 0.048 (texturado  $100 \times 10$ , abajo). La escala para  $\theta$  varía entre 0.4 to 1 (región plana).

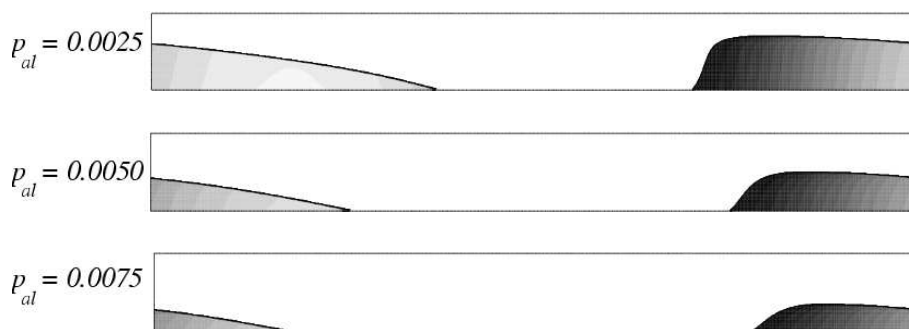


Figure 4: Curvas de nivel del campo  $\theta$  para un cojinete liso considerando diferentes valores para la presión de alimentación  $p_{al}$ . La escala de color varía entre 0.4 (oscuro) hasta 1 (claro) (por razones de claridad la región no cavitada en la cual  $\theta = 1$  no ha sido coloreada).

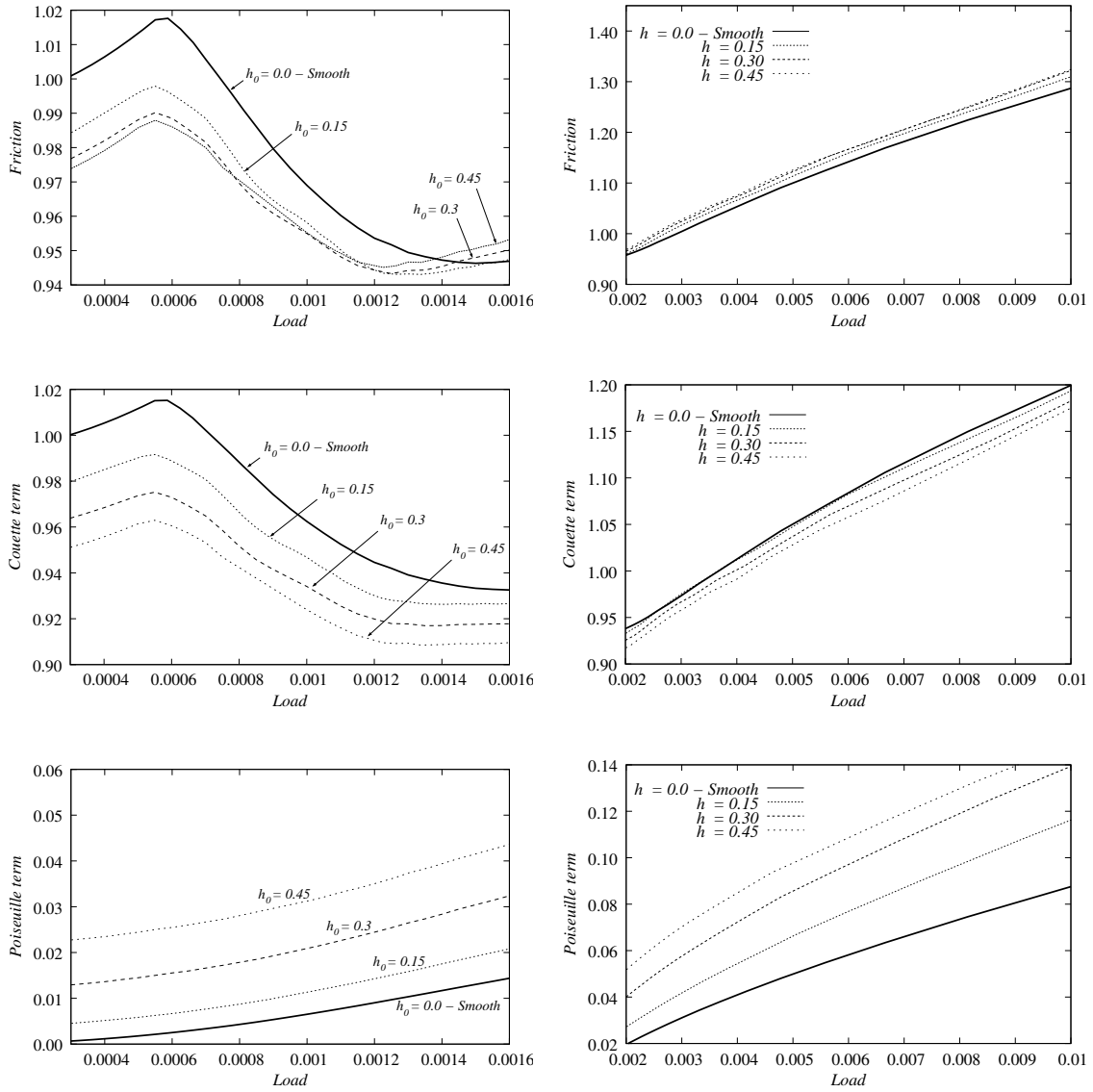


Figure 5: Torque por fricción  $T$  y sus componentes como función de la carga aplicada  $W_a$ . Diferentes valores para la profundidad  $h_0$  de la micro-textura son considerados.

de Couette de la fricción disminuye, pero el término de Poiseuille, si bien casi un orden de magnitud más chico que este, aumenta, dando como resultado neto que no existe una reducción del torque por fricción.

### 4.3 Formas óptimas - Optimización en condiciones del ensayo NMVEG

Ya mencionamos que las técnicas clásicas de optimización permiten obtener formas que reducen la fricción para diversos tipos de cojinetes. La forma óptima depende obviamente de las condiciones de operación del dispositivo. Para cojinetes radiales, algunas de estas formas (obtenidas con un algoritmo similar al que se describe en la próxima sección) pueden verse en las Figs. 6-8.

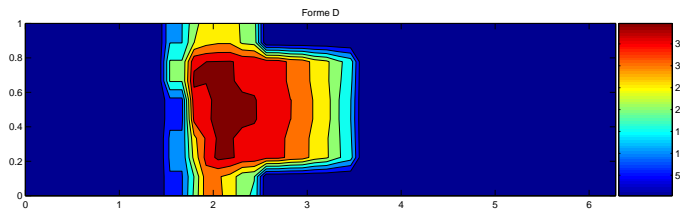


Figure 6: Forma D en el dominio adimensional  $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ , obtenida para 2000 RPM y  $\mu = 0.05 Pa \cdot s$ . La escala de colores indica la profundidad de la forma en  $\mu m$ .

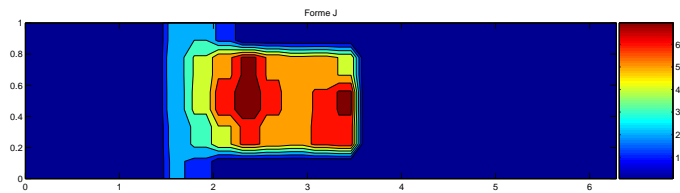


Figure 7: Forma J en el dominio adimensional  $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ , obtenida a 4000 RPM y  $\mu = 0.005 Pa \cdot s$ . La escala de colores indica la profundidad de la forma en  $\mu m$ .

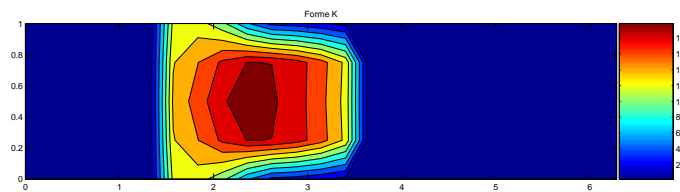


Figure 8: Forma K en el dominio adimensional  $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ , obtenida a 10000 RPM y  $\mu = 0.05 Pa \cdot s$ . La escala de colores indica la profundidad de la forma en  $\mu m$ .

En la Unión Europea se aplica un ensayo normalizado (ensayo NMVEG, duración: 20 minutos) para la medición de las emisiones y consumo de combustible de los vehículos comercializados al público. Los datos de este ensayo (temperatura, velocidad de rotación, presión de alimentación, en función del tiempo) se muestran en la Fig. 9.

Resulta interesante evaluar formas optimizadas en las condiciones de este ensayo patrón, que varían fuertemente en el tiempo. Cabe mencionar que el cojinete considerado no está sometido a

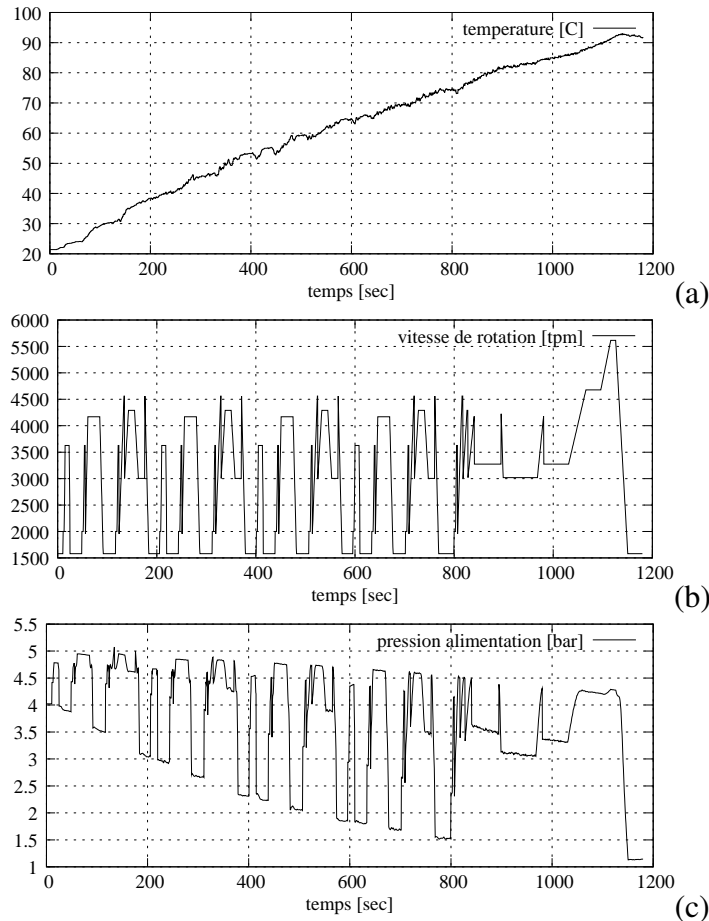


Figure 9: Datos del ensayo NMVEG.

la carga dinámica que discutiremos en la próxima sección, sino a una carga estática. La variable fundamental son las pérdidas por fricción, que mostramos en la Fig. 10. Se observa que la forma K, obtenida por diseño óptimo, permite un ahorro de potencia del orden de un 10% respecto de la forma circular lisa. Las otras formas son menos convenientes, por consideraciones que omitimos en aras de la brevedad.

#### 4.4 Formas óptimas - Optimización en régimen Dinámico

El objetivo en este caso consiste en introducir cambios macroscópicos en las superficies que están siendo lubricadas a fines de mejorar parámetros tales como el torque por fricción (ver Ecs. (19) y (20)) en un cojinete que se encuentra bajo un ciclo de carga dinámica correspondiente a un motor de cuatro tiempos. En este caso, los resultados que se presentarán corresponden a una configuración en la cual se tiene dos cojinetes dispuestos simétricamente con respecto al borde de alimentación  $x_2 = B$  (ver Fig. 1) a los cuales se aplica la carga total  $W_a(t)$ .

##### • *Planteo del Problema Dinámico*

Antes de pasar a los resultados, conviene describir el esquema de cálculo seguido para resolver el problema dinámico relacionado con el movimiento del eje dentro el cojinete.

El problema consiste en hallar la evolución dinámica del eje, el cual posee dos grados de libertad  $(X(t), Y(t))$ . El mismo se encuentra por un lado, sometido a la acción de una fuerza



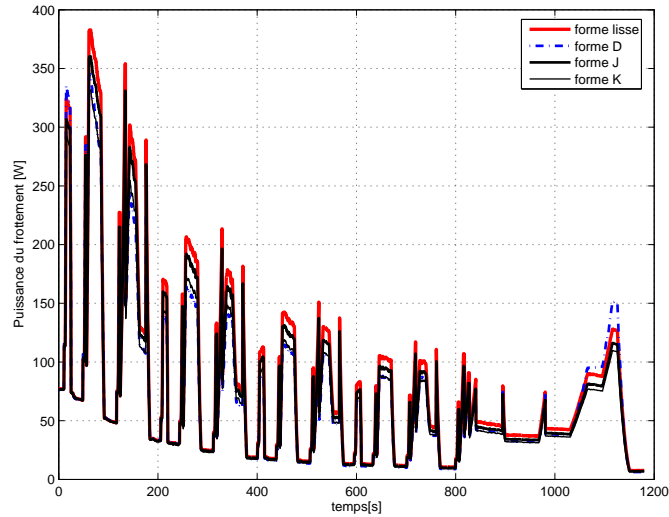


Figure 10: Pérdidas por fricción (en Watts) para las cuatro formas consideradas (en rojo la forma circular lisa) durante el ensayo NMVEG. La tendencia decreciente en el tiempo se debe al aumento de la temperatura del aceite.

externa ( $W_x^a(t)$ ,  $W_y^a(t)$ ) (en nuestro caso, el ciclo de carga dinámico) y por otro lado, a la fuerza que ejerce el fluido lubricante que estará dada por

$$W_x(t) = \int_{\Omega} p(x_1, x_2, t) \cos(2\pi x_1) d\Omega \quad W_y(t) = \int_{\Omega} p(x_1, x_2, t) \sin(2\pi x_1) d\Omega \quad (25)$$

Para un eje de masa  $M$ , las ecuaciones de movimiento simplemente quedan expresadas de la siguiente manera

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = W_x(t) + W_x^a(t) \quad (26)$$

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} = W_y(t) + W_y^a(t) \quad (27)$$

Para resolver numéricamente el problema completo se han probado dos alternativas. La primera consiste en discretizar el término de derivada temporal según (28), y llevar a cabo un esquema de Newton-Raphson para determinar la posición de equilibrio ( $X^n, Y^n$ ) que satisface a las ecuaciones de movimiento discretizadas.

$$\left. \frac{d^2 X}{dt^2} \right|^n \approx \frac{X^n - 2X^{n-1} + X^{n-2}}{\delta t^2} \quad (28)$$

La segunda alternativa, más simple, consiste en resolver las ecuaciones de movimiento mediante un esquema de Newmark que se encuentra inmerso en el loop de Gauss-Seidel empleado en la resolución del campo de presiones. Tal esquema de Newmark quedaría expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
X^{k,n} &= X^{n-1} + u^{n-1} \delta t + \frac{\delta t^2}{2M} (W_x^{k,n} + W_x^{a,n}) \\
u^{k,n} &= u^{n-1} + \frac{\delta t}{M} (W_x^{k,n} + W_x^{a,n}) \\
Y^{k,n} &= Y^{n-1} + v^{n-1} \delta t + \frac{\delta t^2}{2M} (W_y^{k,n} + W_y^{a,n}) \\
v^{k,n} &= v^{n-1} + \frac{\delta t}{M} (W_y^{k,n} + W_y^{a,n})
\end{aligned}$$

donde  $u$  y  $v$  son las dos componentes de la velocidad para el eje, el índice  $k$  se refiere a la iteración de Gauss-Seidel y  $n$  al paso de tiempo.

Se ha encontrado que ambos esquemas convergen al mismo resultado, siendo el primero más conveniente en aquellos casos en que la masa del eje  $M$  es muy pequeña ( $< 10^{-7}$ ), en caso contrario el segundo esquema resulta ser más eficiente computacionalmente.

### • *Método de Optimización*

Para llevar a cabo la optimización se considera al dominio de cálculo  $\Omega$  dividido en  $N_t$  regiones rectangulares y a cada una se asigna un profundidad de textura  $h_g$  uniforme sobre la celda y que se suma a la profundidad correspondiente al cojinete liso (ver Ec. (4)), es decir, las variables a optimizar son  $h_g$   $g = 1, 2, \dots, N_t$ .

El método de optimización es un simple método de gradientes, para el cual se construye un vector gradiente mediante diferenciación numérica de la función costo, que en este caso es el torque por fricción  $\bar{T}$  promedio a lo largo del ciclo, es decir

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial h_I} (h_1, \dots, h_I, \dots) = \frac{\bar{T}(h_1, \dots, h_I + \delta, \dots) - \bar{T}(h_1, \dots, h_I, \dots)}{\delta} + \mathcal{O}(\delta) \quad (29)$$

donde  $\delta$  es el tamaño de la perturbación en la diferenciación numérica y el torque promedio  $\bar{T}$  viene dado por

$$\bar{T}(h_1, \dots, h_I, \dots) = \frac{1}{P} \int_0^P T(t) dt \quad (30)$$

donde  $P$  es el período o duración del ciclo de carga. A su vez, el vector gradiente calculado es normalizado empleando los siguientes criterios de diseño:

- Penalización a priori de ciertas regiones en las que no se desea producir cambios de forma.
- Penalización de aquellas derivadas que producen protuberancias en lugar de agujeros.

El primer criterio se basa en la experiencia acerca del comportamiento del dispositivo y permite reducir el espacio de búsqueda y por lo tanto el costo computacional asociado al proceso de optimización. El segundo criterio permite descartar soluciones que no son viables desde el punto de vista constructivo.

### • *Resultados de la Optimización*

Se mostrarán resultados obtenidos en tres casos distintos, considerando dos posibles valores para la masa del eje  $M$  y modificando  $h$  en diferentes regiones del cojinete, las cuales estarán definidas por  $(x_1^{\min}, x_1^{\max}, x_2^{\min}, x_2^{\max})$ :

- **Caso 1**  $\rightarrow M = 10^{-4} - (x_1^{min}, x_1^{max}) = (0.68, 1)$
- **Caso 2**  $\rightarrow M = 10^{-5} - (x_1^{min}, x_1^{max}) = (0.44, 0.68)$
- **Caso 3**  $\rightarrow M = 10^{-5} - (x_1^{min}, x_1^{max}) = (0.2, 0.6)$

En todos los casos que se mostrarán,  $(x_2^{min}, x_2^{max})$  se tomará igual a  $(0, B)$ , es decir se considera el ancho total del cojinete para la optimización. En particular, para el **Caso 2**, la optimización comienza desde una forma previamente optimizada en la región  $(x_1^{min}, x_1^{max}) = (0.68, 1)$  similar a la obtenida en el **caso 1** para un valor de  $M = 10^{-4}$ .

Respecto a los parámetros numéricos empleados para el cálculo transitorio, el paso de tiempo  $\delta t$  fue 0.001 para el **Caso 1** y 0.0005 para los **Casos 2 y 3**. En cuanto a la discretización espacial, se empleó un malla con  $150 \times 25$  nodos. Convergencia de los resultados fue verificada sobre las formas ya optimizadas. Finalmente, cabe aclarar que en todos los casos, los resultados presentados son adimensionales.

Para comenzar, en la Fig. 11 se muestra el ciclo de carga aplicado. En la parte superior se muestra la componente  $W_x^a(t)$  y en la parte inferior la componente  $W_y^a(t)$  para tres ciclos consecutivos.

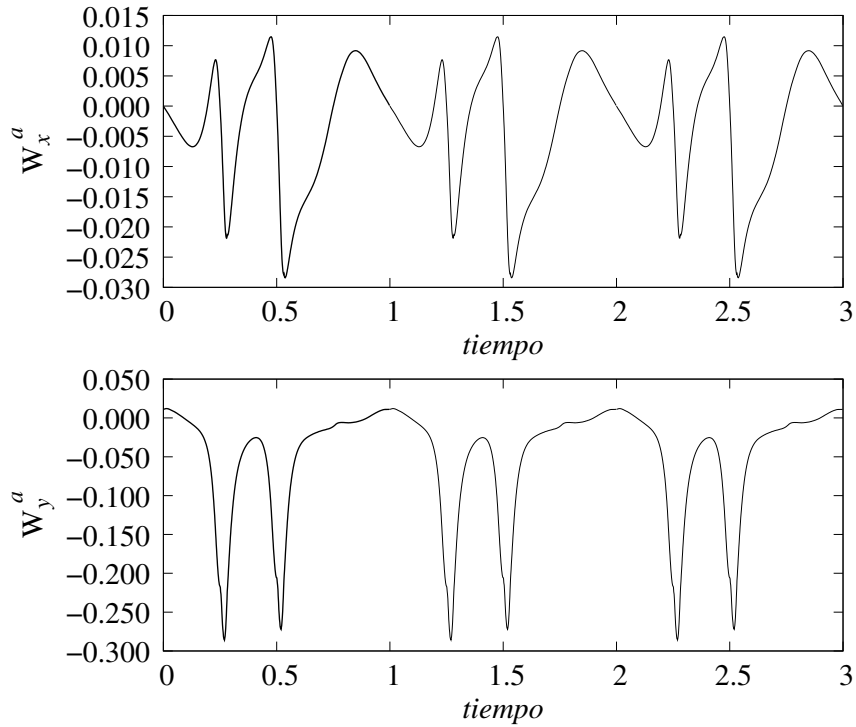


Figure 11: Componentes  $W_x^a(t)$  (arriba) y  $W_y^a(t)$  (abajo) para el ciclo de cargas dinámico considerado para la optimización.

Pasando al torque por fricción, en las figuras 12 y 13 se muestra la evolución en función del tiempo para el torque total, empleando (20) para evaluar el término de *Couette*. En la parte superior se muestran los resultados correspondientes a  $M = 10^{-4}$  y en la parte inferior para  $M = 10^{-5}$ . En éstos se compara el resultado correspondiente al caso liso, sin textura (línea continua), con los resultados de la optimización (línea punteada). Como se puede ver, en todos

los casos considerados la fricción instantánea cae por abajo de la correspondiente al caso liso para casi todo tiempo  $t$  a lo largo del ciclo. Los resultados presentados se grafican a partir de  $t = 1$ , tiempo a partir del cual se verifica un comportamiento periódico del cojinete.

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos en los diferentes casos, donde se indica la reducción porcentual obtenida con respecto al caso liso, el número de pasos de optimización empleado y el número de grupos de textura optimizados. En la Fig. 14 se muestran los contornos de nivel de las formas optimizadas correspondientes a cada caso.

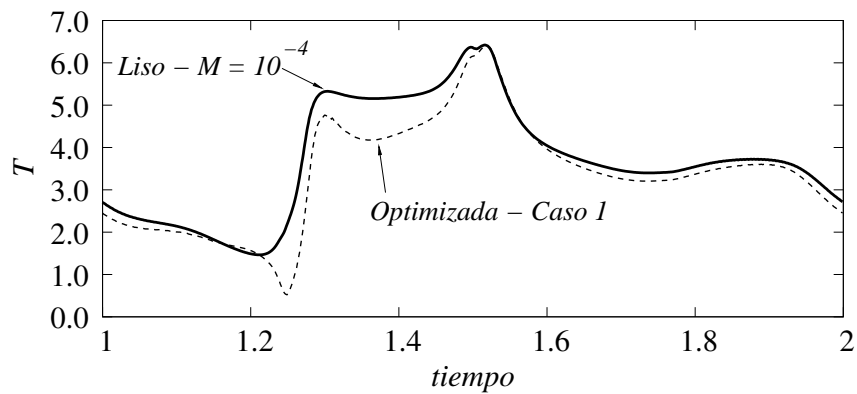


Figure 12: Comparación del Torque por fricción en función del tiempo para el **Caso 1** correspondiente a  $M = 10^{-4}$ . Línea continua: Cojinete liso, Línea punteada: Cojinete mejorados con modificación de la forma.

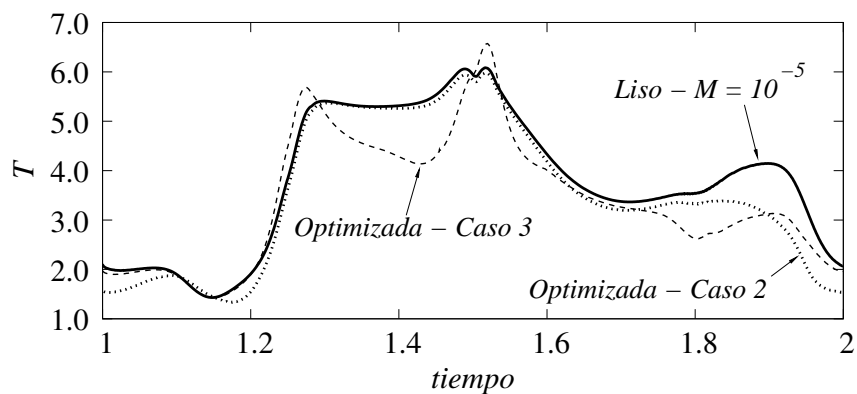


Figure 13: Comparación del Torque por fricción en función del tiempo para los **Casos 2 y 3** correspondientes a  $M = 10^{-5}$ . Línea continua: Cojinete liso, Línea punteada: Cojinetes mejorados con modificación de la forma.

En el **Caso 3**, la región cavitada  $\Omega^+$  para la forma obtenida al cabo del primer paso de optimización introduce dificultades en la convergencia del algoritmo, razón por la cual, solamente un paso de optimización es llevado a cabo como consecuencia del elevado tiempo de cálculo en cada evaluación de la función costo  $\bar{T}$ .

Finalmente, cabe mencionar que las formas obtenidas en los **casos 2 y 3** fueron evaluadas con un valor de  $M = 10^{-6}$  obteniéndose resultados muy similares en cuanto a la reducción de fricción. Esto es debido esencialmente al hecho de que el comportamiento dinámico del cojinete se hace bastante independiente de la masa del eje para valores de  $M$  inferiores a  $10^{-5}$ .

Table 1: Resultados obtenidos para los diferentes casos de optimización.

	Reducción de $\bar{T}$	# de Pasos	# de Grupos
<b>Caso 1</b>	9.3 %	4	40
<b>Caso 2</b>	7.6 %	2	30
<b>Caso 3</b>	10.5 %	1	50

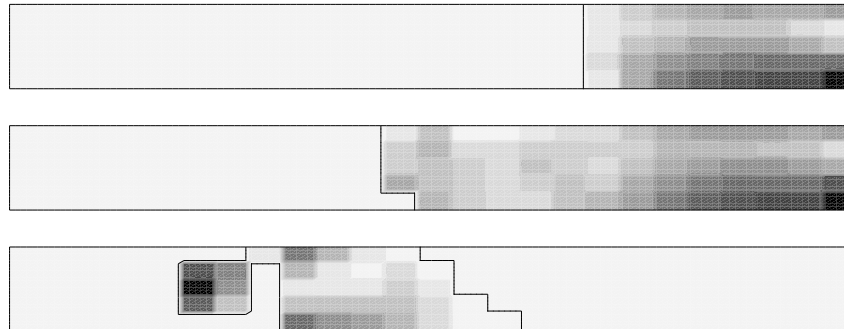


Figure 14: Formas optimizadas obtenidas. Arriba: **Caso 1**  $\rightarrow$   $Min = 0$  (claro),  $Max = 1.4$  (oscuro), Centro: **Caso 2**  $\rightarrow$   $Min = 0$  (claro),  $Max = 1.63$  (oscuro), Abajo: **Caso 3**  $\rightarrow$   $Min = 0$  (claro),  $Max = 0.5$  (oscuro).

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos una revisión de avances en la simulación numérica de lubricación hidrodinámica y el uso de formas no circulares y de texturas para mejorar la performance de dispositivos lubricados.

Recordamos brevemente resultados teóricos que demuestran que en ausencia de cavitación el uso de texturas es contraproducente desde el punto de vista hidrodinámico, tanto en el caso incompresible como en el compresible. Al aparecer cavitación observamos que la situación difiere, haciéndose necesario el uso de modelos matemático-numéricos apropiados capaces de contemplar correctamente la presencia de texturas. Con respecto a esto, y para el caso particular de cojinetes radiales, mostramos evidencia numérica de que existe un cierto rango de condiciones de operación para el cual existe un beneficio en el uso de texturas.

Pasando al caso de optimización clásica de forma, mostramos una evaluación de formas optimizadas en las condiciones del ensayo NMVEG, utilizado en la Unión Europea. Se observan reducciones de las pérdidas por fricción del orden de 10% para una de las formas (forma K).

Finalmente, pasamos al problema de optimización en el régimen dinámico para un cojinete, donde se considera un ciclo de carga variable correspondiente a un motor en condiciones realistas de operación. Se muestran formas macroscópicas obtenidas como resultado de aplicar un simple algoritmo de gradientes, que mejoran la performance del dispositivo hasta valores superiores al 5%.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (Argentina). GB pertenece al CONICET (Argentina) y al CNPq (Brasil). RA es

becario de CONICET (Argentina).

## REFERENCES

- G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23:1482–1518, 1992.
- R. Ausas, P. Ragot, J. Leiva, M. Jai, G. Bayada, and G. Buscaglia. The impact of the cavitation model in the analysis of micro-textured lubricated journal bearings. *ASME Journal of Tribology*, In press, 2007.
- G. Bayada and M. Chambat. Existence and uniqueness for a lubrication problem with non regular conditions on the free boundary. *Boll. U.M.I.*, 6,3b:543–557, 1984.
- G. Bayada and M. Chambat. Sur quelque modelisation de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique. *Journal de mécanique théorique et appliqué*, 5:703–729, 1986a.
- G. Bayada and M. Chambat. The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation: A mathematical proof. *Appl. Math. Opt.*, 14:73–93, 1986b.
- G. Bayada and J. Du Parquet. The influence of operating parameters on the cavitation in a dynamically loaded journal bearing. *1st LEEDS LYON Symposium on Cavitation and Related Phenomena in Lubrication, I.M.E.*, 1974.
- A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*. North-Holland, 1978.
- V. Brizmer, Y. Kligerman, and I. Etsion. A laser surface textured parallel thrust bearing. *Tribology Transactions*, 46:397–403, 2003.
- G. C. Buscaglia, S. Ciuperca, and M. Jai. Homogenization and two-scale analysis of the transient compressible reynolds equation. *Asymptot. Anal.*, 32:131–152, 2002.
- G. C. Buscaglia, S. Ciuperca, and M. Jai. The effect of periodic textures on the static characteristics of thrust bearings. *ASME Journal of Tribology*, 127:899–902, 2005a.
- G. C. Buscaglia, S. Ciuperca, and M. Jai. Topological asymptotic expansions for the generalized poisson problem with small inclusions and applications in lubrication. *Inverse Problems*, 23: 695–711, 2005b.
- G. C. Buscaglia, S. Ciuperca, and M. Jai. On the optimization of surface textures for lubricated contacts. *J. Math. Anal. Appl.* doi:10.1016/j.jmaa.2007.02.051, 2007.
- G. C. Buscaglia and M. Jai. Homogenization of the generalized reynolds equation. *Serie Mecánica Computacional - Volume XXII. Number 1. Fluid Mechanics (A)*, pages 41–56, 2003.
- G. C. Buscaglia and M. Jai. Homogenization of the generalized reynolds equation for ultra-thin gas films and its resolution by fem. *ASME Journal of Tribology*, 126:547–552, 2004.
- G.C. Buscaglia, A.F. Quiroga, G. Bayada, and M. Jai. Sensitivity of lubricated devices to changes in their macro/microscopic shape. *Proceedings of the 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro*, 2005c.
- H. G. Elrod and M. Adams. A computer program for cavitation. Technical report 190. *1st LEEDS LYON Symposium on Cavitation and Related Phenomena in Lubrication, I.M.E.*, 103:354, 1974.
- I. Etsion. State of the art in laser surface texturing. *ASME Journal of Tribology*, 127:248–253, 2005.
- I. Etsion and G. Halperin. A laser surface textured hydrostatic mechanical seal. *Tribology Transactions*, 45:430–434, 2002.
- I. Etsion and O. Pinkus. Analysis of short journal bearings with new upstream boundary conditions. *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, 96:489–496, 1974.

- H. Hashimoto and Y. Hattori. Improvement of the static and dynamic characteristics of magnetic head sliders by optimum design. *Transactions of the ASME*, 122:459–466, 2000.
- M. Jai, G. Buscaglia, and I. Iordanoff. Multi-constrained optimization of running characteristics of mechanisms lubricated with compressible fluid. *Transactions of the ASME*, 126:132, 2004.
- B. Jakobson and L. Floberg. The finite journal bearing considering vaporization. *Tran. Chalmers University of Technology*, page 354, 1957.
- Q. Jane Wang and D. Zhu. Virtual texturing: Modeling the performance of lubricated contacts of engineered surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 127:722–728, 2005.
- T. Kato and S. Obara. Improvement in dynamic characteristics of circular journal bearings by means of longitudinal microgrooves. *Tribology Transactions*, 39:462–468, 1996.
- A. Kovalchenko, O. Ajayi, A. Erdemir, and Etsion I. Fenske, G. The effect of laser texturing of steel surfaces and speed-load parameters on the transition of lubrication regime from boundary to hydrodynamic. *Tribology Transactions*, 47:299–307, 2004.
- C. J. Maday. The maximum principle approach to the optimum one-dimensional journal bearing. *ASME J. Lubr. Technology*, 92:482–489, 1970.
- M. Masmoudi, J. Pommier, and B. Samet. The topological asymptotic expansion for the maxwell equations and some applications. *Inverse Problems*, 21:547–564, 2005.
- A. A. Novotny, R. A. Feijóo, C. Padra, and E. Taroco. Topological sensitivity analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192:803–829, 2003.
- A. Quiroga, G. Buscaglia, I. Ciuperca, and M. Jai. Resultados analíticos y numéricos sobre el efecto de texturas uniformes en dispositivos lubricados. *Serie Mecánica Computacional - Volume XXIV. Number 8. Applications to the Automotive Industry.*, pages 1479–1492, 2005.
- Alfredo Quiroga. Diseño óptimo en lubricación. Trabajo de Graduación, Instituto Balseiro, 2005.
- L. Rayleigh. Notes on the theory of lubrication. *Phylosophical Magazine*, 35:1–12, 1918.
- M.P. Robert. Optimization of self-acting gas bearings for maximum static stiffness. *ASME J. Appl. Mech.*, 57:758–761, 1990.
- M.P Robert. New class of sliders numerically designed for maximum stiffnes. *ASME J. Tribol*, 117:456–460, 1995.
- S. M. Rohde and G. T. McAllister. On the optimization of fluid film bearings. *Proc. R. Soc. London*, A351:481–497, 1976.
- G. Ryk, Y. Kligerman, and I. Etsion. Experimental investigation of laser texturing for reciprocating automotive components. *Tribology Transactions*, 45:444–449, 2002.