

VERIFICACIÓN DEL MECANISMO DE COLAPSO DE UNA ESTRUCTURA POR PROGRAMACIÓN LINEAL

CUADROS, Patricia ^{*}, SEGUIN, Carlos E. [†]

^{*}Departamento de Matemática.
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de San Juan.
Av. Libertador 1109 Oeste, (CP 5400), San Juan, Argentina
e-mail: pcuadros@unsj.edu.ar

Instituto de Investigaciones Antisísmica Ing. Aldo Bruschi
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de San Juan
Av. Libertador 1109 Oeste, (CP 5400), San Juan, Argentina
e-mail: esegin@unsj.edu.ar

Palabras claves: diseño sismorresistente, mecanismo de colapso, programación lineal, método Simplex.

Resumen. *El diseño de estructuras sujetas a cargas externas demanda una valoración realista del factor de seguridad con respecto al colapso de la estructura, denominado multiplicador de colapso. La determinación de éste multiplicador y la identificación del mecanismo de colapso de una estructura sometida a acciones sísmicas severas representan elementos fundamentales, y un requisito, para lograr el diseño óptimo de la misma. Por otra parte el nuevo proyecto de reglamento INPRES – CIRSOC 103 requiere que el diseñador establezca un mecanismo de colapso de diseño, requisito que no es posible cumplir a priori. Ante éste requerimiento las metodologías de análisis que permiten determinar el mecanismo de colapso real para un estado de cargas dado cobran una importancia fundamental. Este trabajo de investigación se enmarca en el campo del diseño sísmico de estructuras y está enfocado al desarrollo de un método de análisis e identificación del mecanismo de colapso de una estructura asociada a un estado de cargas dado, mediante el estudio y verificación del comportamiento de ésta con técnicas de programación lineal. En este sentido se implementa un método sencillo como el Simplex al proceso de búsqueda del mecanismo de colapso de pórticos planos, contemplando momento flector y esfuerzo normal. El planteo de este problema estructural conduce a la forma estándar de esta metodología de programación lineal. Se muestra que la obtención del multiplicador de colapso puede ser totalmente automatizado para pórticos planos. A partir de un algoritmo de resolución sencilla, y en base a los mecanismos de colapso simples, se obtiene el mecanismo de colapso de la estructura para el estado de cargas dado. Finalmente se presenta un programa empleando este método en plataforma MATLAB - OCTAVE. El objetivo principal es la verificación y optimización del diseño de una estructura empleando el mecanismo de colapso real. Esta metodología permite además asegurar que todas las rótulas se produzcan simultáneamente para el estado de cargas de diseño.*

1 INTRODUCCIÓN

La identificación del mecanismo de colapso de una estructura sometida a acciones sísmicas severas representa un elemento fundamental para lograr el diseño óptimo de la misma.

El objetivo principal es generar una metodología que permita el diseño óptimo de una estructura. El proceso debería iniciarse asumiendo un mecanismo de colapso a priori, a partir de este calcular la estructura aplicando las prescripciones de la norma^{1,2,3}. Luego con base en los mecanismos de colapso simples determinar el mecanismo de colapso global para el estado de cargas patrón establecido en la norma. Haciendo uso de las técnicas de programación lineal, método Simplex, se verifica si se cumple con el mecanismo inicial, o sea comprobar que las solicitaciones se corresponden con el diagrama de momentos estáticamente admisible; si esto no ocurre se asume el último mecanismo de colapso obtenido, a partir de este punto el proceso es iterativo hasta alcanzar al diseño óptimo de la estructura, que es aquel que esta basado en una respuesta estructural predecible y controlable en el rango no lineal, minimizando las incertidumbres frente a la acción sísmica. Este planteo se aparta notablemente de la idea de considerar resuelto el problema cuando se realiza el “cálculo” de la estructura para las acciones previstas en el Código.

El presente trabajo muestra un procedimiento racional para la verificación del mecanismo de colapso real de un pórtico plano sometido a cargas sísmicas y la obtención del factor de seguridad o multiplicador de colapso de la estructura, sin considerar el orden en que se forman las diversas rótulas plásticas y de cómo las cargas llegan a sus valores de colapso.

El esquema del tema presentado es sencillo, aún cuando el análisis detallado sobre estructuras importantes pueda resultar muy laborioso manualmente.

2 CONCEPTOS BÁSICOS

Definimos el **mecanismo cinemático de colapso** como aquel en que la estructura posee, un número suficiente y en la posición adecuada de rótulas plásticas, que originan un mecanismo de un grado de libertad. Estado en el que las deformaciones del pórtico pueden continuar aumentando mientras las cargas externas permanecen constantes. Este mecanismo puede, o no, ser el que realmente produce la ruina de la estructura.

En la Figura 1 se grafica la hipótesis básica de los métodos de análisis plásticos para flexión, en ella se muestra la relación entre el momento flector M y la curvatura κ , que es válida para cualquier sección transversal de un elemento típico de un pórtico. El valor límite del momento es el denominado **momento plástico o de plastificación M_p** .

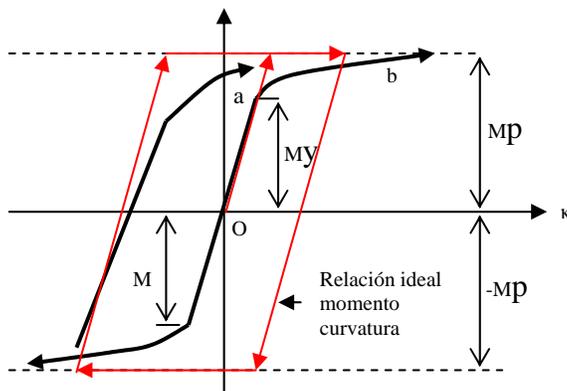


Figura 1. Relación momento flector-curvatura

El concepto de **rótula plástica** es el siguiente: suponiendo que en una sección de un elemento del pórtico el momento alcanza el valor M_p , mientras que en otras secciones la magnitud de M es menor que M_p , la curvatura en esa sección puede ser indefinidamente grande. Así se puede describir el comportamiento de la sección con $M = M_p$ como con una rótula que admite una rotación de cualquier magnitud mientras el valor del momento permanece constante. La magnitud real de la rotación en la rótula en cualquier caso, está determinada por la rigidez que presente el resto de la estructura a los cambios de carga, mientras la acción de la rótula se esta desarrollando. Si el valor del momento se reduce por debajo de M_p , se produce la descarga elástica y la rotación de la rótula en sentido contrario, lo que disminuye el valor de la rotación total.

Una **hipótesis básica es que en cualquier sección de un elemento del pórtico, el valor del momento M debe variar entre $-M_p$ y M_p :**

$$-M_p \leq M \leq M_p \quad (1)$$

3- TEOREMAS BÁSICOS DEL DISEÑO ÓPTIMO

El análisis al estado límite^{4,5} de la estructura puede realizarse aplicando alguno de los siguientes teoremas: i) el **teorema estático o teorema del límite inferior** y ii) el **teorema cinemático o teorema del límite superior**, ambos desarrollados alrededor del año 1950.

El diseño de una estructura real excepcionalmente se lleva a cabo con la aplicación directa de estos teoremas, por lo engorroso que resulta su uso salvo para pequeñas estructuras, en general se tienden a adoptar otros métodos. En estructuras simples es obvia la existencia de un solo mecanismo de colapso posible y en esos casos el cálculo del factor de colapso, f , no presenta dificultades. Pero cuando existe más de un mecanismo de colapso posible, se hace necesario encontrar el mecanismo de colapso real de la estructura y el correspondiente factor de colapso, que es el mínimo de todos los mecanismos posibles. Esto representaría la aplicación de los teoremas a cada posible mecanismo lo que no hace viable este camino de solución.

El **teorema estático** requiere maximizar un factor entre la carga real y la correspondiente al mecanismo de colapso, satisfaciendo las condiciones de equilibrio y de fluencia. Permite encontrar un factor de carga denominado factor estático, que acota inferiormente el factor de colapso de la estructura. Es de hacer notar que tanto la función a usar para maximizar el factor de carga, como las condiciones de equilibrio son expresiones de tipo lineal, por lo que la naturaleza de las condiciones de fluencia que se adopten determinan el tipo de problema de programación matemática a plantearse.

El **teorema cinemático** permite determinar un factor de carga, denominado factor cinemático, que acota superiormente al factor de colapso de la estructura. Utiliza conceptos de trabajo virtual.

La validez de aplicación de los teoremas depende esencialmente de la relación momento-curvatura asumida para cada elemento del pórtico, siendo para este estudio la clásica bilineal, indicada en la figura 1, que admite la aplicación de los teoremas estático y cinemático. Los dos rasgos fundamentalmente importantes de este tipo de relación son que un incremento de momento flector siempre causa un incremento de curvatura del mismo signo, y que la magnitud de la curvatura siempre tiende a ser indefinidamente grande cuando la magnitud del momento flector tiende a su valor límite M_p . Como corolario, se supone que siempre que el momento alcance el valor M_p en una sección transversal cualquiera, se forma en ella una

rótula plástica que puede sufrir rotación de gran magnitud manteniéndose constante el momento flector en M_p .

En realidad si la estructura es de acero, las articulaciones tienen gran posibilidad de rotación debido a la ductilidad de ese material, aunque el pandeo local condiciona esta posibilidad. Si es de hormigón armado o pretensado, sus posibilidades de rotación se ven muy restringidas debido al comportamiento del hormigón, dependiendo mucho de las cuantías de armaduras, de la resistencia del hormigón y del esfuerzo de compresión al que está sometida la zona de la rótula.

Asumiremos que el valor de M_p es una constante definida para cada elemento del pórtico dado, sin considerar los valores de las fuerzas axiales y de corte. Las secciones se diseñan para evitar una falla frágil.

Puede demostrarse que durante el colapso plástico la distribución de momento flector del pórtico permanece inalterada con el aumento de las deformaciones. Los aumentos de deformaciones durante el colapso deben ser por consiguiente debidos solamente a las rotaciones en las rótulas plásticas, y estas rótulas plásticas deben formarse en un número suficiente de secciones para desarrollar en la estructura un mecanismo, en el resto de las secciones el valor de la deformación no se altera, por ende tampoco el diagrama de momentos. Resulta evidente que una vez formado el mecanismo de colapso, el trabajo hecho por las cargas externas debe ser igual al trabajo disipado en las rótulas plásticas. Esto último se deduce del hecho que durante el colapso no hay cambio de curvatura en una sección cualquiera salvo aquéllas en que existen rótulas plásticas esto es no hay trabajo interior de los momentos flectores excepto en las rótulas.

La combinación de los teoremas estático y cinemático forman un **teorema de singularidad**. Así se sabe del teorema estático que para cualquier valor de carga P sobre la carga de colapso P_p , es imposible de encontrar una distribución de momento flector que sea estáticamente admisible. Por otra parte el teorema cinemático expresa que es imposible encontrar un mecanismo cualquiera en que la carga correspondiente sea menor de P_p . Combinando estos resultados, puede enunciarse el teorema como sigue: si para un pórtico dado y cargado externamente puede encontrarse por lo menos una distribución de momento flector estáticamente admisible, y el momento flector es igual al momento plástico en suficientes secciones transversales para formar un mecanismo debido a las rotaciones de las rótulas plásticas en esas secciones, la carga correspondiente deberá ser igual a la carga de colapso P_p .

Este teorema lo demostró Horne (1950), su valor radica en que si se piensa que el mecanismo de colapso real es conocido, la confirmación del mismo puede obtenerse en seguida por la construcción del diagrama de momento flector correspondiente. Es de interés notar que Drucker, Prager y Greenberg lo demostraron para el caso general de cuerpos sólidos compuestos por material cuyas relaciones tensión-deformación son generalizaciones apropiadas de la relación plástica ideal de la figura 1.

Definiendo como **“Multiplicador estáticamente admisible”** (f_e) a aquel que hace que las cargas estén en equilibrio con al menos un diagrama estáticamente admisible, y como **“Multiplicador cinemáticamente admisible”** (f_c) a aquel que hace que las cargas estén en equilibrio con un diagrama de momentos que tiene momentos plásticos en las posiciones y con signos apropiados para que se verifique un campo de desplazamientos cinemáticamente admisibles. Se enuncia el **“Teorema Fundamental”**⁶ como: cualquier multiplicador estáticamente admisible es menor o a lo sumo igual a cualquier multiplicador cinemáticamente admisible:

$$f_e \leq f_c \quad (2)$$

Para una estructura dada y cargada, la ecuación de equilibrio siempre puede obtenerse por la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, asumiendo un movimiento apropiado y pequeño del mecanismo de colapso, y los momentos que actúan en las rótulas en equilibrio estático con las cargas. Las rótulas no se consideran así como rótulas plásticas, pero se supone que ocurren para hacer posible un movimiento imaginario y pequeño de la estructura mientras el equilibrio se mantiene. Si las posiciones de las rótulas se escogen iguales que aquéllas de los posibles mecanismos de colapso que se analizarían por la teoría plástica, las ecuaciones de equilibrio obtenidas precisamente serán aquéllas que corresponden a éstos mecanismos.

Una ecuación de trabajo para determinar el valor de P que corresponde a un mecanismo supuesto puede considerarse como realizar dos pasos en uno. El primero de estos pasos es establecer una ecuación de equilibrio por el Principio de Trabajo Virtual, y el segundo es insertar en esta ecuación esos valores de momentos plásticos que aumentan al máximo la carga. Interpretado de esta manera, está claro que escribiendo una ecuación de trabajo el valor de la carga de colapso que se obtiene es idéntico al que se encuentra aplicando un análisis estático. En este caso se debe prestar especial atención a los sentidos (signos) de rotación de las rótulas, esto es porque físicamente el trabajo absorbido por la rótula plástica debe ser siempre positivo

4- PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La aplicación de conceptos de programación matemática para analizar el comportamiento de estructuras se ha desarrollado ampliamente, especialmente en las dos últimas décadas.

En todo problema de programación lineal hay que tomar ciertas decisiones, estas se representan con **variables de decisión** x_j . La estructura de un problema de este tipo es maximizar o minimizar una **función objetivo**, sujeta a un grupo de **condiciones restrictivas o simplemente restricciones**. La función es una representación matemática de la meta global formulada en función de las variables de decisión x_j . El conjunto de restricciones, también formulado en función de x_j , representan las condiciones que es preciso satisfacer cuando se establecen los valores extremos de las variables de decisión. Las restricciones definen una región limitada por un conjunto poliédrico convexo, quedando definido su borde por ecuaciones y como desigualdades los valores interiores de la región.

La función **objetivo** es una representación matemática del mecanismo de colapso formulada en función de las variables de decisión x_i , que en el caso general representan los momentos M_i y los esfuerzos normales N_i , de la estructura, satisfaciendo al mismo tiempo un grupo de **restricciones**, que están dados por las solicitaciones de plastificación inicial de la estructura. Las **restricciones** de un problema de programación lineal pueden representarse con ecuaciones o desigualdades de tipo \leq y/o \geq , en este caso las combinaciones M_i y N_i menores o iguales a los valores de plastificación.

5- MÉTODO SIMPLEX

El método Simplex⁷ es una herramienta básica de la programación lineal. Fue creado por George Dantzing en 1947, demostrando que la optimización era útil para responder determinadas preguntas en diversos campos de la industria, pero las ideas básicas del método son anteriores, se remontan a Newton, Liebnitz, y Lagrange, siendo el campo de la programación Lineal creado en 1940⁸.

Es un método iterativo que comienza con una solución factible inicial (por ejemplo $M_i = 0$ y $N_i = 0$). A continuación se busca la posible existencia de una mejor solución, que se mide según pueda o no mejorarse el valor de la función objetivo (en este caso el valor de f). Entendiéndose como mejor solución a aquella que brinda valores que nos acercan más a la solución del problema, o sea al valor óptimo de la función objetivo, para nosotros de f . Al ser un método iterativo, luego de encontrada una mejor solución, se reanuda la búsqueda con esta última solución como partida. Para generar cada solución sucesiva se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales, continuando hasta que el valor de la función objetivo no admite más mejoras.

El objetivo del método es transformar una matriz dada, por medio de sucesivas operaciones de pivoteo entre filas, en otra equivalente con una forma deseada.

Las ventajas de este método son:

- Es eficiente en tiempo operacional
- Es mecánico, se basa en formular matrices y operaciones elementales entre filas y columnas de las mismas, similar a la eliminación gaussiana.
- No involucra la geometría, por lo que se pueden resolver problemas de cualquier número de variables y restricciones.

Como es bien conocido un problema de optimización se plantea como:

$$\text{maximizar } Z = c^T x \quad (3)$$

$$\text{Sujeta a las restricciones: } A x \leq b \quad (4)$$

$$\text{Con } x \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad b \geq 0 \quad (5)$$

siendo A una matriz de coeficientes de las restricciones de $m \times n$,

c un vector de coeficientes de la función objetivo de $n \times 1$, que representan los pesos de la variable x .

x un vector de variables de decisión de $n \times 1$,

b un vector de términos independientes de las restricciones de $m \times 1$

Hipótesis del método:

$$b \geq 0 \Rightarrow b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$m < n, \quad m = \text{rango}(A) \quad (7)$$

Hay que hacer notar que el método selecciona el cambio más adecuado a hacer en cada iteración sin necesidad de información sobre las pasadas o próximas iteraciones.

Se estudia solo el caso estándar del método porque todos los problemas de ingeniería estructural se reducen a este caso.

El sistema de restricciones representa un poliedro en \mathfrak{R}^n , un conjunto convexo cuyos vértices o puntos extremos son posibles valores óptimos de la función objetivo. En el caso de los planteos dentro de la ingeniería estructural siempre se verifica que el poliedro es cerrado y no vacío, ya que representa un diagrama de interacción.

6- APLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO A PÓRTICOS SOLICITADOS POR FLEXIÓN Y ESFUERZO AXIAL

El concepto de la formación y de la rotación indefinida de una rótula plástica en un elemento, manteniendo constante el valor de M_p es de importancia fundamental en la teoría plástica. De hecho, la simplicidad de los métodos plásticos de análisis es debida a este

concepto. Debe reconocerse, sin embargo, que el M_p de un elemento dado no es una cantidad definida, constante. Considerando que $M_p = W_p \cdot \sigma_y$, donde W_p es el módulo resistente y σ_y es la tensión de fluencia, el valor de M_p depende de la forma y tamaño de la sección y de la tensión de fluencia. La tensión de fluencia es dependiente del esquema de carga y de la historia de carga anterior de la estructura. Así una variación en la tensión de fluencia ocasiona una variación en el valor de M_p , efecto Bauschinger^{4,5}.

El reglamento INPRES-CIRSOC 103, Parte II, año 2000¹, establece en el artículo 1.5. como método de diseño al denominado diseño por capacidad⁹. Entre las características principales de este procedimiento se encuentra que se inhiben, en los elementos que tienen rótulas plásticas, los modos indeseables de deformación inelástica, tales como los que podrían originarse por fallas de corte o anclaje e inestabilidad, asegurando que la resistencia de estos modos sea mayor que la de las rótulas plásticas cuando estas desarrollan su sobrerresistencia flexional (capacidad).

Tomamos como ejemplo un pórtico plano empotrado en sus bases, con todos los miembros del pórtico uniformes, con igual sección transversal y material, asumiendo un comportamiento elastoplástico ideal sin endurecimiento por deformación, figura 2, con un momento plástico de magnitud M_p en todas las rótulas potenciales.

Considerando elemento a aquel que se encuentra definido entre dos nudos. Se numeran los nudos de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha, de forma similar los elementos. No se distinguen, al numerar, vigas de columnas. Siendo M_{ij} el momento flector con i = número de elemento, j = número de nudo. No se consideran los esfuerzos axiales en la viga.

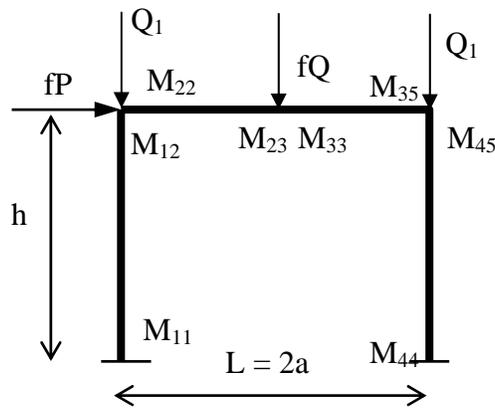


Figura 2. Pórtico solicitado por momento flector y esfuerzo normal

La forma de graficar las combinaciones de M - N que provocan la falla en una sección dada de columna es mediante un **diagrama de interacción**, figura 3, el mismo se supone conocido para este caso. Delimita la región “posible” de carga de la “imposible” de alcanzar. En la zona de la curva el material ingresa en fluencia a fin de impedir que la misma sea atravesada. Podemos, en el caso de perfiles laminados, aproximar la curva por rectas, en este caso la aproximación resulta muy razonable. Definimos el diagrama en forma paramétrica mediante la expresión:

$$\begin{aligned} -1 \leq \nu N - \mu M \leq 1 \\ -1 \leq \nu N + \mu M \leq 1 \end{aligned} \quad \text{donde los parámetros son: } \mu = \frac{1}{1,18 M_p}, \quad \nu = \frac{1}{N_p} \quad (8)$$

Por convención consideramos aquí que la compresión es positiva y la tracción es negativa. Cada diagrama corresponde a un tipo de acero.

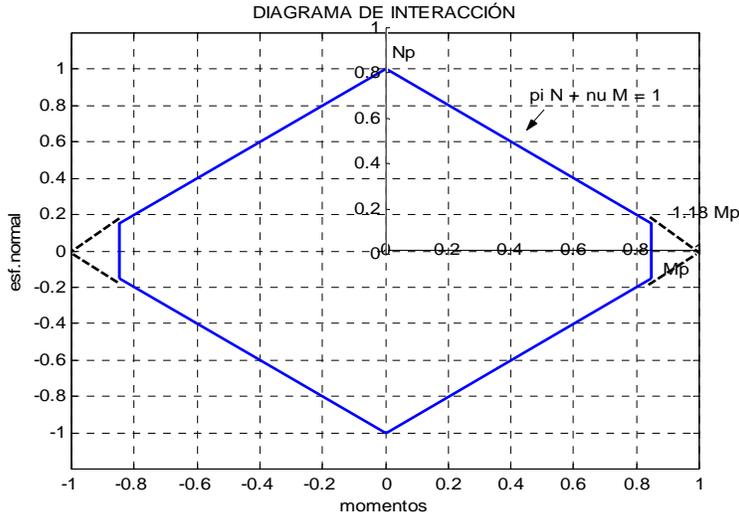


Figura 3. Diagrama de interacción para elementos

Para el caso del hormigón armado, cuando la curva del diagrama es convexa, reemplazándola por una serie de tangentes es posible resolver el problema, salvo en pequeñas zonas, correspondientes al entorno de las intersecciones con el eje vertical, que se denominan zonas no seguras, figura 4. Esta serie de tangentes implica que aparecen más condiciones en el caso de columnas. En el cuaderno 240 DIN 1045 – tablas de flexo-compresión desviada aparecen diagramas de interacción con curvas no convexas, pero esto es porque corresponden a criterios de diseño no de comportamiento. La condición puede expresarse como:

$$-1 \leq \nu N \pm \mu \cos \alpha M \leq 1 \quad (9)$$

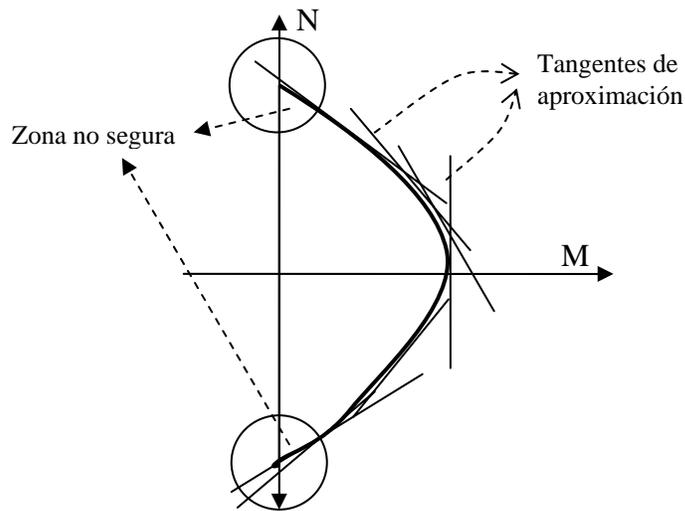


Figura 4. Diagrama de interacción. Aproximación por tangentes para elementos de hormigón armado

Continuando con el análisis del diagrama planteado para nuestro problema, haciendo la $\frac{dN}{dM}$ obtenemos la pendiente de un segmento del poliedro (diagrama). Cuando la estructura llega a la fluencia las distintas combinaciones de M-N siguen los segmentos lineales.

Puede observarse que cuando el punto definido por los valores obtenidos cae fuera del diagrama de interacción implica que no es una zona posible de carga, la pieza ha entrado en fluencia, se debería recalcularla, cambiando su sección o en caso de ser hormigón armado y de mantener las dimensiones aumentar su cuantía.

Planteando las ecuaciones de equilibrio para los elementos del pórtico simple, de acuerdo al esquema de la figura 5, queda:

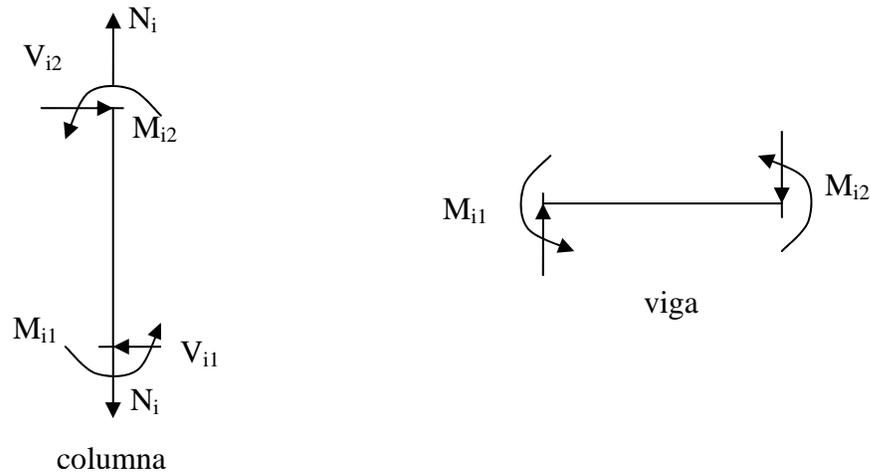


Figura 5. Esquemas de equilibrio

$$M_{12} + M_{21} = 0$$

$$M_{23} + M_{33} = 0 \quad (\text{equilibrio de nudos}) \quad (10)$$

$$M_{35} + M_{45} = 0$$

$$M_{11} = 0$$

$$M_{44} = 0 \quad (\text{empotramientos}) \quad (11)$$

$$\frac{M_{11} + M_{12}}{h} + \frac{M_{14} + M_{45}}{h} = P \cdot f \quad (12)$$

$$\frac{M_{22} + M_{23}}{a} + N_1 = Q_1 \quad (13)$$

$$N_2 - \frac{M_{33} + M_{35}}{a} = Q_1 \quad (14)$$

$$-\frac{M_{22} + M_{23}}{a} + \frac{M_{33} + M_{35}}{a} = Q \cdot f \quad (15)$$

Si la carga Q_l proviene del peso propio no es afectada por el multiplicador de colapso.

La **función objetivo** se obtiene como suma de las condiciones de equilibrio, de (10) a (15), resultando:

$$N_1 + N_2 + M_{22} + M_{23} + M_{33} + M_{35} = 2Q_1 + f(Q + Pb) \quad (16)$$

El sistema de restricciones es:

$$-Mp_{ij} \leq M_{ij} \leq Mp_{ij} \quad , i = 1 \dots ne \quad , j = 1 \dots nn \quad (17)$$

$ne = \text{número de elementos,}$
 $nn = \text{número de nudos}$

corresponde a las limitaciones impuestas al momento flector

$$-1 \leq \nu N_i \pm \mu M_{ij} \leq 1 \quad (18)$$

corresponde a las limitaciones impuestas por la presencia de esfuerzo normal.

Se observa que las restricciones no cumplen con las condiciones que establece la forma estándar del Método Simplex, hay que plantear un cambio de variables.

Para la resolución el programa entregará los valores de M y N, los cuales en general no corresponden a la situación de colapso inminente salvo que el número de rótulas sea el que haga a la estructura isostática, en cuyo caso la configuración de esfuerzos es única.

Para el caso del primer grupo de restricciones,(17), que involucra solo a los esfuerzos flectores, el número total de esfuerzos flectores a considerar en una estructura es

$$ntf = vi \cdot (sc + 1) \cdot 2 + co \cdot 2 \quad (19)$$

siendo: $ntf = \text{número total de momentos flectores}$

$vi = \text{número de vigas de la estructura}$

$sc = \text{número de secciones críticas a considerar por vano de la estructura.}$

$Co = \text{número de columnas de la estructura.}$

$$M_{ij} = x_{ij} = x_k$$

$$Mp_{ij} = Mp_k \quad , k = 1 \dots ntf \quad (20)$$

el cambio de variables propuesto es:

$$y_k = x_k + Mp_k^- \quad (21)$$

donde y_k debe ser positivo y en valor absoluto menor que Mp_{ij}^- (valor negativo de momento de plastificación), reemplazando se obtiene:

$$-2Mp_k \leq y_k \quad (22)$$

El conjunto de estas restricciones queda expresado como:

$$y_k \leq 2Mp_k \quad \text{o bien} \quad [y] \leq 2[Mp] \quad (23)$$

El otro grupo de restricciones, que involucra al esfuerzo normal, que forman el sistema total es

$$-1 \leq \gamma N_n + \mu M_{ij} \leq 1 \quad n = 1 \dots co, \quad (24)$$

$co = \text{número de columnas del pórtico.}$

estas restricciones están sin desplazar

$$\gamma N_n + \mu M_{ij} + 1 \leq 2 \quad (25)$$

$$\gamma N_n + \mu M_{ij} + 1 = s_i \quad \text{siendo } s_i \text{ una nueva variable} \Rightarrow [s_i] \leq 2^* \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{4*co.x1} \quad (26)$$

El vector de las variables queda formado por:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_k \\ s_i \end{bmatrix}_{ntf+4*co.x1} \quad (27)$$

El sistema de restricciones se puede expresar por:

$$[A][y] \leq [b] \quad (28)$$

$[A]_{(ntf+4*co)x(ntf+4*co)}$ = matriz de coeficientes del sistema, que resulta ser la matriz identidad, lo que constituye una ventaja de realizar el cambio de variables.

$$[b] = 2^* \begin{bmatrix} Mp_{ij} \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{(ntf+4*co)x1} \quad (29)$$

con tantos Mp_{ij} como momentos flectores hay, o sea ntf filas.

En la **función objetivo** se debe realizar el mismo desplazamiento de variables. Para el ejemplo que estamos desarrollando, la función es:

$$N_1 + N_4 + M_{22} + M_{23} + M_{33} + M_{35} = 2Q_1 + f(Q + Pb) \quad (30)$$

$$N_1 = \frac{s_1 - (1 - \mu y_1 + \mu Mp_1)}{\gamma}$$

$$N_4 = \frac{s_5 - (1 - \mu y_7 + \mu Mp_7)}{\gamma}$$

reemplazando variables y reordenando se puede expresar (30), como:

$$[c][y] + [c1][Mp] = 2Q_1 + f(Q + Pb) - \frac{2}{\gamma} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 [c] &= \left[\frac{-\mu}{\gamma}, 0, 1, 1, 1, 1, \frac{-\mu}{\gamma}, 0, \frac{1}{\gamma}, 0, 0, 0, \frac{1}{\gamma}, 0, 0, 0 \right] \\
 [c_1] &= \left[\frac{-\mu}{\gamma}, 0, 1, 1, 1, 1, \frac{-\mu}{\gamma}, 0 \right]
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

siendo:

[c] = vector de coeficientes de la función

[y] = vector de variables

[c1] = vector de coeficientes de las solicitaciones de plastificación

[Mp] = vector de solicitaciones de plastificación

[b] = vector de términos independientes

[A] = matriz de coeficientes del sistema de restricciones

A través del Método Simplex se maximiza $z = [c] [y]$, por lo que se puede expresar como resultado del mismo que:

$$z \max = 2Q_1 + f(Q + Pb) - [c_1][Mp] - \frac{2}{\gamma} \tag{33}$$

despejando el multiplicador de colapso:

$$\frac{z \max + [c_1][Mp] - 2Q_1 - \frac{2}{\gamma}}{Q + Pb} = f \tag{34}$$

7 CONCLUSIONES

Es un hecho, ya suficientemente probado, que la programación lineal provee un formalismo matemático ideal para los problemas de análisis de mecanismos de colapso de pórticos.

Se muestra que la obtención del multiplicador de colapso de la estructura para el estado de cargas dado, puede ser totalmente automatizado para pórticos planos, usando conceptos del método simplex.

El proceso debería iniciarse asumiendo un mecanismo de colapso a priori, a partir de este se calcula la estructura aplicando las prescripciones de la norma. Luego con base en de los mecanismos de colapso simples determinar el mecanismo de colapso global para el estado de cargas patrón establecido en la norma. Haciendo uso de las técnicas de programación lineal se verifica si se cumple con el mecanismo inicial, o sea comprobar que las solicitaciones se corresponden con el diagrama de momentos estáticamente admisible; si esto no ocurre se asume el último mecanismo de colapso obtenido, a partir de este punto el proceso es iterativo hasta alcanzar al diseño óptimo de la estructura, que es aquel que esta basado en una respuesta estructural predecible y controlable en el rango no lineal.

Debe destacarse también que es necesario invertir un esfuerzo considerable en investigar y explotar las diversas alternativas para el desarrollo de metodologías de análisis y obtención del mecanismo de colapso real de una estructura sometido a solicitaciones de esfuerzo normal y momento flector.

La conclusión más importante hasta el momento es que los resultados obtenidos, aunque escasos, por su potencial y versatilidad de aplicación permiten empezar a vislumbrar una aplicación directa de esta metodología en la práctica profesional, contribuyendo a optimizar los diseños. El método podría ser fácilmente incorporado a los reglamentos para el cálculo de pórticos.

ANEXO : EJEMPLO NUMÉRICO

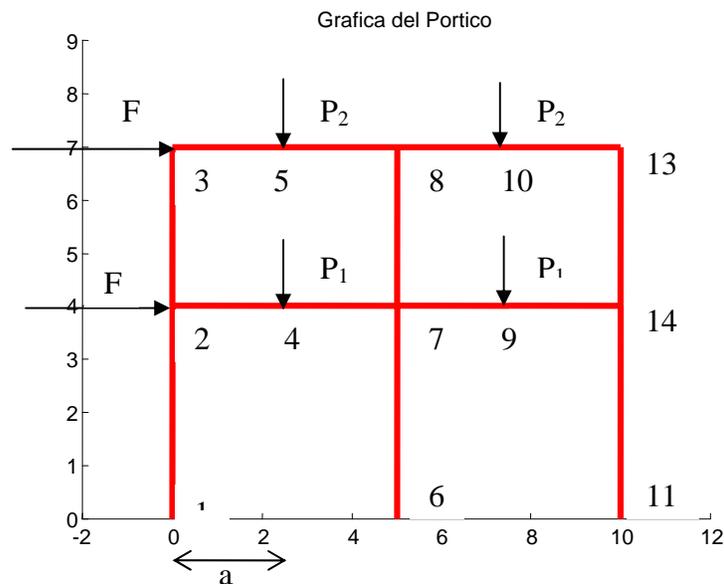


Figura 6. Pórtico de dos niveles y dos vanos

La verificación del mecanismo de colapso del pórtico de dos niveles presentado en la figura 6 se realiza con un programa desarrollado en plataforma MATLAB^{13,14} para tal fin, empleando el método descrito en los apartados anteriores.

Datos requeridos:

$M_p=580$, valor del momento de plastificación

$N_p=4347.8$, valor del esfuerzo normal de plastificación

$n_p=2$, número de pisos de la estructura

$n_v=2$, número de vanos de la estructura

$s_c=1$, número de secciones críticas por elemento del pórtico

$r=9$; número total de reacciones de vínculo

$a=2.5$; mitad de la longitud del vano

$l=2*a$, longitud de los vanos

$F=[100;100]$; fuerzas externas horizontales aplicadas

$P=[500\ 500;600\ 600]$; fuerzas externas verticales aplicadas

$h=[3;4]$; altura de los pisos

$Q_1=100$;

Resultados:

número total de esfuerzos flectores a considerar : $n_{tf} = 28$

número total de esfuerzos normales a considerar: $n_{tn} = 6$
número total de secciones críticas en la estructura: $n_{sc} = 13$
número total de variables de decisión: $n_{tv} = 34$
número de ecuaciones de restricción: $n_{tr} = 52$

Valor del multiplicador de colapso $f_{colap} = 16.6567$

valores de los momentos en el instante de plastificación

$M_{solic} =$

-580	-580	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-580	-580	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	580	0	580	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	580	0	580	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	580	0	0	580	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	580	0	0	580	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-580	-580	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-580	-580	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	580	0	580	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	580	0	580	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	580	0	0	580	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	580	0	0	580
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-580	-580	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-580	-580

valores de los esfuerzos normales en el instante de plastificación

$N_s =$

-661.2237	N_1 : esfuerzo normal en el elemento 1 (columna)
-663.2237	N_2 : esfuerzo normal en el elemento 2 (columna)
0	
0	
0	
0	
-661.2237	N_7 : esfuerzo normal en el elemento 7 (columna)
-663.2237	N_8 : esfuerzo normal en el elemento 8 (columna)
0	
0	
0	
0	
-661.2237	N_{13} : esfuerzo normal en el elemento 13 (columna)
-663.2237	N_{14} : esfuerzo normal en el elemento 14 (columna)

En la figura 7 se grafica el diagrama de interacción correspondiente y los puntos de sollicitaciones de la estructura, donde se aprecia que todos los puntos de rotulación coinciden en su localización. Con estos resultados se concluye que la estructura responde al mecanismo de colapso planteado inicialmente.

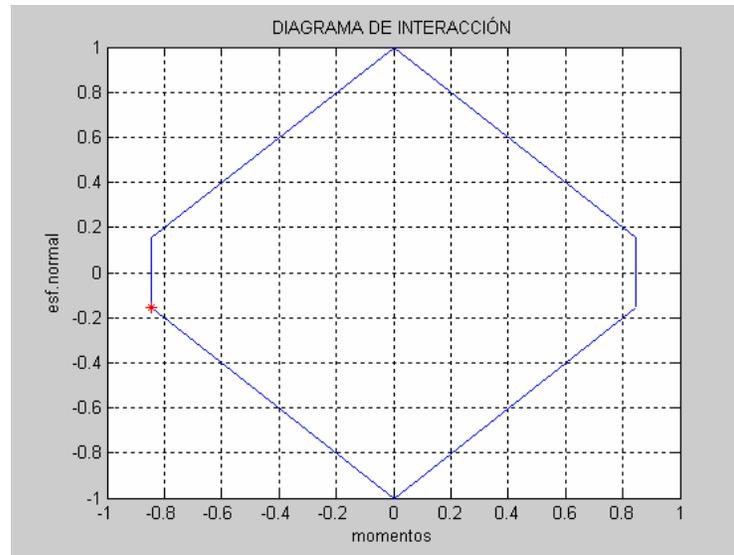


Figura 7. Diagrama de interacción y puntos de solicitaciones de la estructura

8 REFERENCIAS

- [1] Normas Argentinas para Construcciones Sismorresistentes INPRES - CIRSOC 103 - Parte I - Parte II . (1983), INPRES.
- [2] ACI – American Concrete Code – N° 318. capítulo 21. (1995).
- [3] New Zeland Standard Code of Practice for the Desing of Concrete Structure. NZS 3101 – Part I. (1982), Standards Association of New Zeland .
- [4] Lubliner, J. (1990). “Plasticity Theory”. Mc Millan New York
- [5] Chen, W. F., Hahn, D.J., Plasticity for Structural Engineers. Spriger Verlag. New York 1988
- [6] Cuadros, P., Seguin, C. E. (2003) “Aplicación de la programación lineal a la ingeniería estructural”. Mecánica Computacional, Vol XXII, pp. 771-785
- [7] Budnick, F. (1997) “Matemática Aplicada para Administración, Economía y Ciencias Sociales”. 3° edición Ed. Mc. Graw Hill.
- [8] George Dantzing, John von Neumann (Princeton), y Leonid Kantorovich
- [9] Paulay, T., Priestley, M.J.N., Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings
- [10] Riddell, R , De la Llera J. C. (1996), “Seismic Analysis and Design: Current Practice and Future Trends”. Proc. 11 World Conference on Earthquake Engineering.
- [11] Mokhtar-Zedeh, A., Kaveh, A. (1999) “Optimical plastic analysis and design of frames: graph theoretical methods”. Computers & Structures vol. 73 pp. 485-496.
- [12] Spiliopoulos, K. V. And Souliotis, P. G. (1997) “Automatic collapse load analysis of regular plane frames using the force method”. Computers & Structures vol. 64 pp. 531 - 540.
- [13] MATLAB Reference Guide, The Mathworks, Inc. Natick, Massachussets
- [14] Eaton, J.W., GNU – OCTAVE- Versión 2.1.46 (alpha ev67 – Dec- osf 5.1) (1996 – 2003), free software – [http:// www.octave.org](http://www.octave.org)