

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA ACOPLADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA DURANTE LA SOLIDIFICACIÓN DE MATERIALES DE ALTO CONTENIDO DE AGUA

Mariela C. Olguín^a, Viviana O. Salvadori^{b,c}, Rodolfo H. Mascheroni^{b,c}, Domingo A. Tarzia^{d,e},

^aDepto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina, mcolguin@fceia.unr.edu.ar,

^bCIDCA, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, CONICET, 47 y 116, B1900AJJ, La Plata, Argentina

^cMODIAL, Depto Ing. Química, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 48 y 115, 1900, La Plata, Argentina, vosalvad@ing.unlp.edu.ar, rhasche@volta.ing.unlp.edu.ar,

^dDepto de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.

^eConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina, Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Palabras Clave: Método cuasi-estacionario, Problema de Stefan, sublimación, congelación, pérdida de peso.

Resumen. La solidificación de materiales rígidos o semi-rígidos, no embalados y con alto contenido de agua implica dos procesos simultáneos de transferencia dentro del sistema: transferencia de calor por conducción (formación de hielo) y transferencia de masa por difusión (sublimación de la superficie de hielo).

En este trabajo se propone un modelo físico-matemático del problema expresado como un problema de cambio de fase con dos fronteras libres.

Utilizando el método cuasi-estacionario para obtener los perfiles de temperatura y concentración de vapor de agua y asumiendo condiciones convectivas en el borde fijo $x=0$, se obtiene la solución analítica del problema mediante la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El modelo permite evaluar la influencia de las características del material y de las variables del proceso en el avance de los frentes móviles de solidificación y de sublimación además de los perfiles de temperatura y de vapor de agua así como también la pérdida de peso durante el proceso de congelación de materiales de alto contenido acuoso. Se realiza un estudio de la solución hallada en función de diferentes parámetros del sistema.

1 INTRODUCCIÓN

Durante la solidificación del agua de materiales de alto contenido acuoso tales como suelos, tejidos animales o vegetales y alimentos, que no se encuentren cubiertos por un material impermeable y perfectamente adherido, ocurre simultáneamente la sublimación del hielo que se forma durante el proceso. La velocidad de ambos fenómenos (solidificación y sublimación) está determinada tanto por características del material (fundamentalmente su composición, estructura y forma), como por las condiciones de enfriamiento (temperatura, humedad y tipo de medio que rodea al material). El proceso de sublimación, aunque su magnitud es mucho menor que la del de congelación, determina aspectos fundamentales de la calidad final en el caso de alimentos y afecta la estructura y utilidad de los tejidos congelados.

El modelado de estos procesos simultáneos es muy difícil debido a que los balances de materia y energía están acoplados, existen dos frentes móviles de cambio de fase que se desplazan a velocidades muy diferentes y a que las propiedades físicas involucradas son en la mayoría de los casos variables con la temperatura y el contenido de agua.

El proceso de congelación (sin sublimación) ha sido extensamente estudiado por [Luikov \(1975\)](#), [Cleland \(1990\)](#) y [Lunardini \(1991\)](#). También puede verse una extensa bibliografía sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor en [Tarzia \(2000\)](#). El sistema ha sido modelado en forma analítica ([Lunardini, 1991](#); [Santillán Marcus y Tarzia, 2000](#)) y a través de métodos numéricos ([Cleland, 1990](#); [Lunardini, 1991](#); [Mascheroni y Calvelo, 1980](#)). Debido a la no linealidad del problema, es dificultoso dar una solución analítica al mismo. Sí en cambio es factible resolverlo para sistemas idealizados o de composición y estructura simple. Los métodos numéricos y semi-analíticos se hacen necesarios entonces y posibilitan considerar las características estructurales y de composición ([Plank, 1941](#); [Cleland, 1990](#); [Salvadori y Mascheroni, 1991](#); [Delgado y Sun, 2001](#))

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Al someter a un material de alto contenido acuoso a una temperatura inferior a su temperatura de solidificación, a la que se supone está inicialmente, se observan simultáneamente dos fenómenos:

- a) el líquido se congela,
- b) la superficie del hielo sublima,

por lo cual, se pueden definir claramente tres zonas: una deshidratada, otra congelada y una tercera no congelada (ver [Figura 1](#)). La congelación comienza a partir de la superficie refrigerada, a una temperatura T_{if} que es menor que la temperatura de solidificación del agua pura, debido a la presencia de materiales disueltos y continúa a lo largo de una línea de equilibrio (frontera libre) que es desconocida. Mientras tanto, en general, no todo el líquido se congela pues parte del mismo puede formar parte de las estructuras (caso de alimentos y tejidos) o solvatar a las sustancias disueltas en el medio. Simultáneamente comienza la sublimación del hielo en la superficie congelada y aparece un frente de deshidratación cuya velocidad de avance debe determinarse también. Normalmente, esta velocidad es mucho menor que la velocidad del frente de congelación ([Campañone, 2001](#)).

Por lo anterior, se plantea el problema de resolver simultáneamente un problema de transferencia de calor (congelación) y un problema de transferencia de masa (pérdida de peso) y se desconocen los bordes que separan las zonas deshidratada de la congelada y ésta de la aún sin congelar.

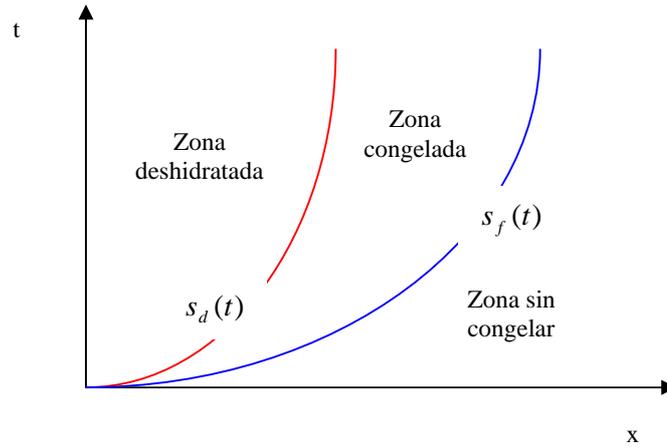


Figura 1: Esquema del sistema

Así planteado resulta un problema de tipo Stefan: Hallar las funciones $\{s_d(t), T_d(x, t), C_{va}(x, t), s_f(t), T_f(x, t)\}$ que representan respectivamente el frente de deshidratación, la distribución de temperatura en la zona deshidratada, las distribuciones de vapor de agua y de temperatura en la zona de congelación además del frente de congelación. Estas funciones están sujetas a las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho_d C_{p_d} \frac{\partial T_d}{\partial t} = k_d \frac{\partial^2 T_d}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s_d(t), t > 0 \\
 \varepsilon \frac{\partial C_{va}}{\partial t} = D_{ef} \frac{\partial^2 C_{va}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s_d(t), t > 0 \\
 \rho_f C_{p_f} \frac{\partial T_f}{\partial t} = k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s_f(t), t > 0 \\
 T_d(s_d(t), t) = T_f(s_d(t), t) = T_0(t), \quad t > 0 \\
 k_f \frac{\partial T_f(s_d(t), t)}{\partial x} - k_d \frac{\partial T_d(s_d(t), t)}{\partial x} = L_s m_s \dot{s}_d(t), \quad t > 0 \\
 D_{ef} \frac{\partial C_{va}(s_d(t), t)}{\partial x} = m_s \dot{s}_d(t), \quad t > 0 \\
 C_{va}(s_d(t), t) = Ma \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{R_g T_0(t)}, \quad t > 0 \\
 T_f(s_f(t), t) = T_{if}, \quad t > 0 \\
 k_f \frac{\partial T_f(s_f(t), t)}{\partial x} = \rho_f L_f \dot{s}_f(t), \quad t > 0 \\
 k_d \frac{\partial T_d(0, t)}{\partial x} = h(T_d(0, t) - T_s), \quad t > 0 \\
 D_{ef} \frac{\partial C_{va}(0, t)}{\partial x} = K_m (C_{va}(0, t) - C_a), \quad t > 0 \\
 s_f(0) = 0 = s_d(0), \quad T(x, 0) = T_{if}, \quad x \geq 0.
 \end{array} \right. \quad (1)$$

Se asume que $T_s < T_0(t) < T_{if}$, $t > 0$. Los coeficientes del problema son: C_a concentración másica de vapor de agua en el aire [kg/m^3]; C_p calor específico [$\text{J}/(\text{kg K})$]; D_{ef} coeficiente de difusión efectivo del agua [m^2/s]; h coeficiente de transferencia de calor [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$]; k conductividad térmica [$\text{W}/(\text{m K})$]; K_m coeficiente de transferencia de masa [m/s]; L calor latente de sublimación del agua [J/kg]; L_f calor latente de solidificación del agua [J/kg]; m_s masa sublimada por unidad de volumen [kg/m^3]; M peso molecular [kg/mol]; ε porosidad; ρ densidad [kg/m^3]; $R_g = 8.31$ [$\text{J}/(\text{mol K})$] constante universal de los gases, T temperatura [K]. El subíndice f se refiere a la zona congelada y el subíndice d a la zona deshidratada. Además se introducen los parámetros $a = 133.33$, $b = 23.986$, $c = 6139.9094$.

3 APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA (1)

3.1 Modelización

Se utiliza un método semi-analítico como el cuasi-estacionario (Lunardini, 1991). Este es un método que produce una buena aproximación de la solución de problemas de tipo Stefan cuando el número de Stefan tiende a 0, es decir en procesos estacionarios en los cuales el calor latente es suficientemente alto con respecto al coeficiente de calor específico del material (London y Seban, 1943; Lunardini, 1991).

Se propone una solución de la forma:

$$\begin{cases} T_d(x,t) = A(t) + B(t)x, & 0 < x < s_d(t), t > 0 \\ C_{va}(x,t) = D(t) + E(t)x, & 0 < x < s_d(t), t > 0 \\ T_f(x,t) = F(t) + G(t)x, & s_d(t) < x < s_f(t), t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

donde $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$, $E(t)$, $F(t)$ y $G(t)$ son nuevas funciones a determinar, además de las fronteras libres $s_d(t)$ y $s_f(t)$ y la temperatura $T_0(t)$. Reemplazando estas expresiones en el sistema (1), resulta el sistema de ecuaciones (3):

$$\begin{cases} k_d B(t) = h(A(t) - T_s) \\ D_{ef} E(t) = K_m (D(t) - C_a) \\ A(t) + B(t)s_d(t) = T_0(t) \\ F(t) + G(t)s_d(t) = T_0(t) \\ D(t) + E(t)s_d(t) = Ma \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{R_g T_0(t)} \\ F(t) + G(t)s_f(t) = T_{if} \\ k_f G(t) - k_d B(t) = L_s m_s \dot{s}_d(t) \\ D_{ef} E(t) = m_s \dot{s}_d(t) \\ k_f G(t) = \rho_f L_f \dot{s}_f(t) \end{cases} \quad (3)$$

Considerando las primeras seis ecuaciones del sistema (3), se obtienen las expresiones de $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ y $E(t)$ en función de $s_d(t)$ y la temperatura $T_0(t)$, así como también expresiones para $F(t)$ y $G(t)$ en función de $T_0(t)$, $s_d(t)$ y $s_f(t)$, según queda expresado en el

sistema de ecuaciones (4):

$$\left\{ \begin{aligned}
 A(t) &= \frac{T_0(t) + T_s \frac{h}{k_d} s_d(t)}{1 + \frac{h}{k_d} s_d(t)} \\
 B(t) &= \frac{h}{k_d} \frac{T_0(t) - T_s}{1 + \frac{h}{k_d} s_d(t)} \\
 D(t) &= \frac{\frac{K_m}{D_{ef}} C_a s_d(t) + Ma \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{R_g T_0(t)}}{1 + \frac{K_m}{D_{ef}} s_d(t)} \\
 E(t) &= \frac{K_m}{D_{ef}} \frac{Ma \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{R_g T_0(t)} - C_a}{1 + \frac{K_m}{D_{ef}} s_d(t)} \\
 F(t) &= \frac{T_0(t) s_f(t) - T_{if} s_d(t)}{s_f(t) - s_d(t)} \\
 G(t) &= \frac{T_{if} - T_0(t)}{s_f(t) - s_d(t)}
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Trabajando algebraicamente, se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones (ec. (5)) que relaciona los frentes y sus velocidades de avance con la temperatura sobre el frente de deshidratación.

Luego, definiendo los parámetros δ_i (ec. (6)), el sistema se reescribe en forma equivalente, según queda expresado en la ec. (7). Más aún, las funciones $F(t)$ y $G(t)$ pueden reescribirse según la ec. (8), con lo cual las funciones $T_d(x,t)$ y $T_f(x,t)$ quedan expresadas por el sistema (9) y la concentración $C_{va}(x,t)$ está dada por la ec. (10)

Sobre el borde fijo $x = 0$, T_d y C_{va} se evalúan de acuerdo a la ec. (11).

Como se dijo antes, al aplicar el método cuasi-estacionario al problema dado por el sistema de ecuaciones (1), se obtiene un problema equivalente como es el problema (7). En este caso se han de resolver numéricamente, mediante un esquema en diferencias finitas explícito, dos problemas de Cauchy (razón por la cual el método cuasi-estacionario es un método semi-analítico) para estimar las respectivas posiciones de los frentes de deshidratación y congelación. A partir de ellas se obtiene la temperatura sobre el frente de deshidratación $T_0(t)$ y en consecuencia las temperaturas $T_d(x,t)$ y $T_f(x,t)$, así como también la distribución de vapor de agua en la zona deshidratada $C_{va}(x,t)$.

$$\left\{ \begin{aligned}
& 1 + \frac{hT_s}{k_f T_{if}} s_f(t) + h s_d(t) \left(\frac{1}{k_d} - \frac{T_s}{k_f T_{if}} \right) - \frac{T_0(t)}{T_{if}} \left[1 + \frac{h}{k_f} s_f(t) + h s_d(t) \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_f} \right) \right] \\
& = \frac{L_s K_m}{T_{if} k_f} \frac{\left(1 + \frac{h}{k_f} s_f(t) \right) (s_f(t) - s_d(t))}{1 + \frac{K_m}{D_{ef}} s_d(t)} \left[Ma - \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{R_g T_0(t)} - C_a \right] \\
\bullet \quad s_d(t) & = \frac{k_f T_{if}}{m_s L_s} \frac{1 + \frac{hT_s}{k_f T_{if}} s_f(t) + h s_d(t) \left(\frac{1}{k_d} - \frac{T_s}{k_f T_{if}} \right) - \frac{T_0(t)}{T_{if}} \left[1 + \frac{h}{k_f} s_f(t) + h s_d(t) \left(\frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_f} \right) \right]}{\left(1 + \frac{h}{k_d} s_f(t) \right) (s_f(t) - s_d(t))} \\
\bullet \quad s_f(t) & = \frac{k_f T_{if}}{\rho_f L_f} \frac{1 - \frac{T_0(t)}{T_{if}}}{s_f(t) - s_d(t)} \\
& s_f(0) = s_d(0) = 0.
\end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\delta_1 = \frac{\rho_f L_f}{k_f T_{if}}, \quad \delta_2 = \frac{m_s}{C_a K_m}, \quad \delta_3 = \frac{L_s m_s}{h T_{if}}, \quad \delta_4 = \frac{Ma}{C_a R_g T_{if}}, \quad \delta_5 = \frac{\rho_f L_f}{h T_{if}}, \quad \delta_6 = \frac{T_s}{T_{if}} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& T_0(t) = T_{if} \left[1 - \delta_1 (s_f(t) - s_d(t)) \dot{s}_f(t) \right], \\
& \delta_2 \left(1 + \frac{K_m}{D_{ef}} s_d(t) \right) \dot{s}_d(t) = T_{if} \delta_4 \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{T_0(t)} - 1, \\
& \delta_5 \left[1 + \frac{h}{k_d} s_d(t) + \frac{h}{k_f} (s_f(t) - s_d(t)) \right] \dot{s}_f(t) \\
& = 1 - \delta_6 + \delta_3 \left(1 + \frac{h}{k_d} s_d(t) \right) \frac{T_{if} \delta_4 \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{T_0(t)} - 1}{\delta_2 \left(1 + \frac{K_m}{D_{ef}} s_d(t) \right)} \\
& s_f(0) = s_d(0) = 0.
\end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\begin{cases} F(t) = T_{if} \left[1 - \delta_1 \dot{s}_f(t) s_f(t) \right] \\ G(t) = T_{if} \delta_1 \dot{s}_f(t). \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} T_d(x,t) = \frac{T_0(t) \left(1 + \frac{h}{k_d} x \right) + T_s \frac{h}{k_d} (s_d(t) - x)}{1 + \frac{h}{k_d} s_d(t)}, & 0 < x < s_d(t), \quad t > 0 \\ T_f(x,t) = T_{if} \left[1 - \delta_1 \dot{s}_f(t) (s_f(t) - x) \right], & s_d(t) < x < s_f(t), \quad t > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$C_{va}(x,t) = \frac{\frac{K_m}{D_{ef}} C_a (s_d(t) - x) + M_a \frac{\exp\left(b - \frac{c}{T_0(t)}\right)}{T_0(t)} \left(1 + \frac{K_m}{D_{ef}} x \right)}{1 + \frac{K_m}{D_{ef}} s_d(t)}, \quad 0 < x < s_d(t), \quad t > 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} T_d(0,t) = \frac{T_0(t) + T_s \frac{h}{k_d} s_d(t)}{1 + \frac{h}{k_d} s_d(t)} \\ C_{va}(0,t) = C_a \left(1 + \delta_2 \dot{s}_d(t) \right). \end{cases} \quad (11)$$

3.2 Validación del modelo

Se compara la solución aproximada dada por el método desarrollado en el párrafo anterior aplicándolo a un problema simplificado.

Se considera un sistema en un medio semi-infinito con temperatura inicial constante e igual a la temperatura de congelación del agua y se supone que no existe sublimación del hielo. También se supone que la temperatura superficial es constante (es decir que se tiene un coeficiente de transferencia de calor muy alto). Este es el llamado Problema de Stefan y su solución puede hallarse en (Lunardini, 1991).

Con esta finalidad, el programa desarrollado (se utilizó Scilab 4.0 para la codificación), se ejecutó con un valor suficientemente grande del coeficiente de transferencia de calor, $h = 3000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$, y un muy bajo coeficiente de transferencia de masa para asegurar una temperatura superficial constante y hacer casi imperceptible la contribución de la zona deshidratada, $K_m = 0.000001 \text{ m/s}$ y $T_s = 263 \text{K}$. Si este supuesto es acertado, los resultados obtenidos deben ser cercanos a la solución analítica del problema con igual temperatura

superficial.

Como se observa en la [Figura 2](#), las gráficas de las posiciones del frente de cambio de fase obtenidas a través de la solución analítica de Stefan y del método cuasi-analítico propuesto son coincidentes. De la misma manera (ver [Figura 3](#)), este método predice una distribución de temperatura muy similar a la solución analítica del problema de testeo.

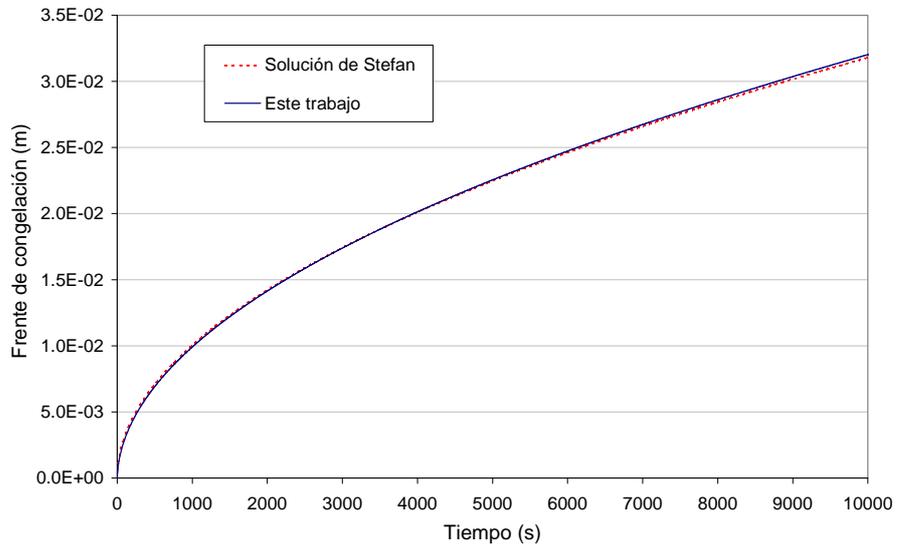


Figura 2: Comparación de la posición de los frentes de congelación dados por la solución de Stefan y este trabajo.

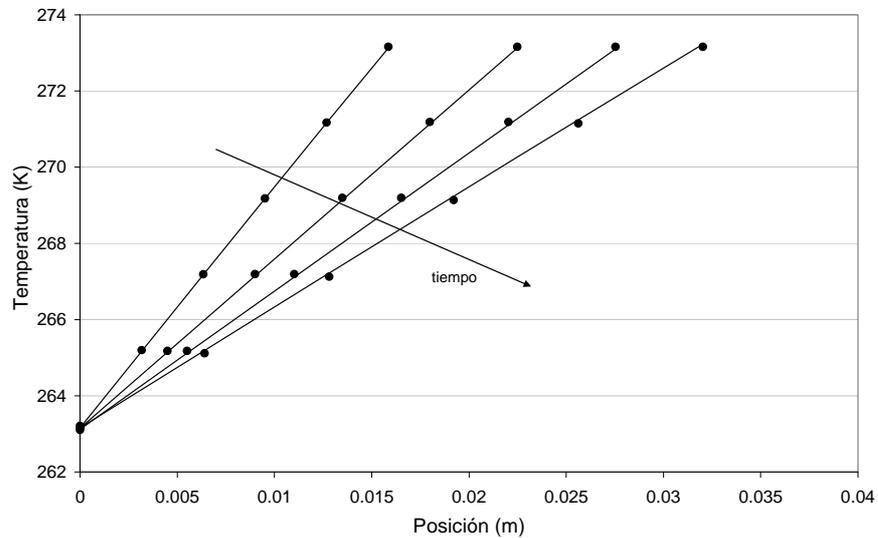


Figura 3: Perfil de temperatura en la zona congelada. La flecha indica el crecimiento del tiempo.
(—) Solución de Stefan, (•) Este trabajo.

En consecuencia, se considera que estos resultados son adecuados para validar el modelo desarrollado.

3.3 Resultados numéricos

Se estudia la influencia del coeficiente de transferencia de calor h y la temperatura T_s sobre la solución del problema (1) mediante el método propuesto.

Los cálculos se realizaron simulando el congelamiento de un material con alto contenido acuoso con propiedades térmicas y físicas tales como un gel de agar-agar muy diluído. Por ello, para muchas propiedades, se pueden utilizar los valores del agua pura ó del hielo. Para otras propiedades, como las de la fase deshidratada, los valores de materiales liofilizados se consideran aproximaciones válidos (Campañone, 2001). En la [Tabla 1](#) se presenta una lista de los valores de las propiedades fundamentales utilizados.

Propiedades físicas	Zona congelada	Zona deshidratada
ρ , kg/m ³	1000	20
C_p , J/(kg K)	1900	1000
D_{ef} , m ² /s	----	9.66 10 ⁻⁶
k , W/(m K)	1.7	0.07
Otros parámetros		
ε		0.98
C_a , kg/m ³		8.29 10 ⁻⁵
h , W/(m ² K)		10 a 150
K_m , m/s		0.0072 a 0.1082
L_s , J/kg		2.83 10 ⁶
L_f , J/kg		3.30 10 ⁵
m_s , kg/m ³		980
M , kg/mol		0.018
Coefficientes del vapor de agua	a= 133.33, b= 23.986, c= 6139.9094	
T_{if} , K		273.16
T_s , K		233 a 268

Tabla 1: Propiedades físicas y otros parámetros.

Con el fin de tener un claro conocimiento de la influencia que los parámetros externos h y T_s ejercen bajo diferentes combinaciones de condiciones de congelamiento, se cubrió un

amplio rango de variación para h y T_s . Se consideraron coeficientes de transferencia de calor entre 10 y 150 $W/(m^2K)$, el cual es un rango factible en condiciones reales de congelación; además de temperaturas externas variando entre 233 y 263 K (-40 a -10 $^{\circ}C$) para un tiempo máximo de cómputo de 10000 segundos, suficiente para determinar las características del sistema que se deseaban estudiar.

En las Figuras 4a, b y 5a, b se muestra la evolución de los frentes de deshidratación y congelación bajo la influencia de los coeficientes de transferencia h y K_m (K_m es directamente proporcional a h). Se ve que ambos, $s_d(t)$ y $s_f(t)$, varían linealmente en tiempos muy cortos, pero como la capa deshidratada crece, ambos procesos (congelación y sublimación) continúan avanzando progresivamente, aunque a menor velocidad. Esto es debido (ver Figura 1) al desarrollo de la superficie deshidratada que tiene un menor k y D_{ef} que la zona congelada, lo que disminuye las velocidades de transferencia de calor y materia.

Otro hecho que se observa es que $s_f(t)$ es monótonamente creciente con respecto al parámetro h , en cambio no hay monotonía para el frente $s_d(t)$ (ver Figura 5a,b). Ello es debido a que existe una doble y opuesta influencia del parámetro h : significa una tasa de sublimación mayor al incrementarse K_m pero, al mismo tiempo, una fuerza impulsora menor debido al rápido enfriamiento de la superficie donde decrece la presión del vapor de agua. A tiempos cortos, el primer efecto prevalece pero con el transcurso del tiempo, el segundo factor tiene gran peso y a tiempos suficientemente grandes, mayores valores de h implican una menor pérdida de agua.

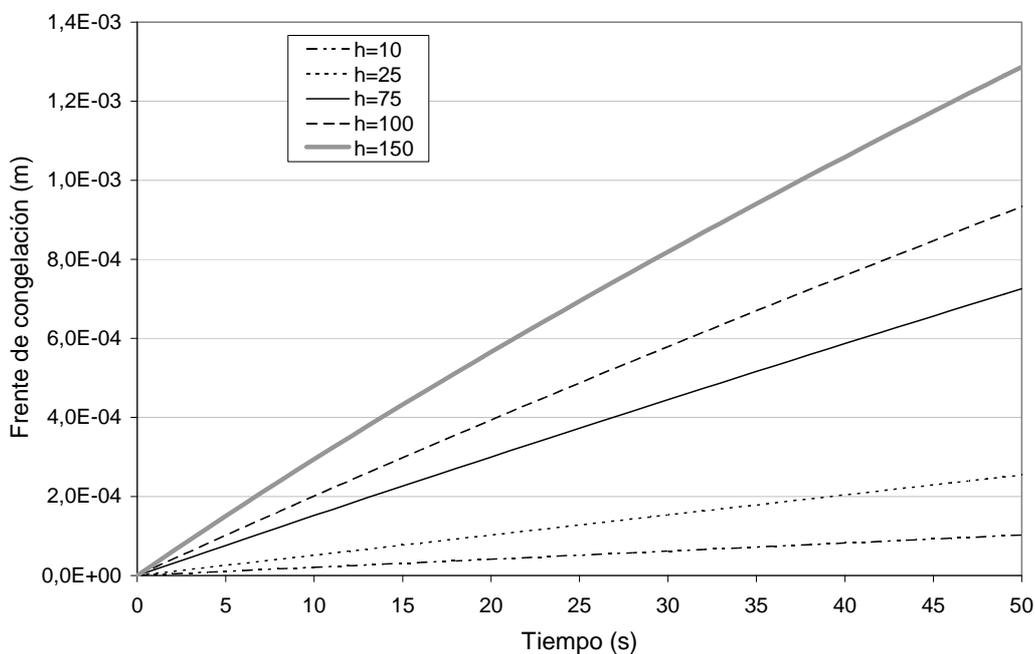


Figura 4a: Influencia del coeficiente de transferencia de calor sobre la evolución del frente de congelación (en tiempos muy cortos), $T_s = 243 K$.

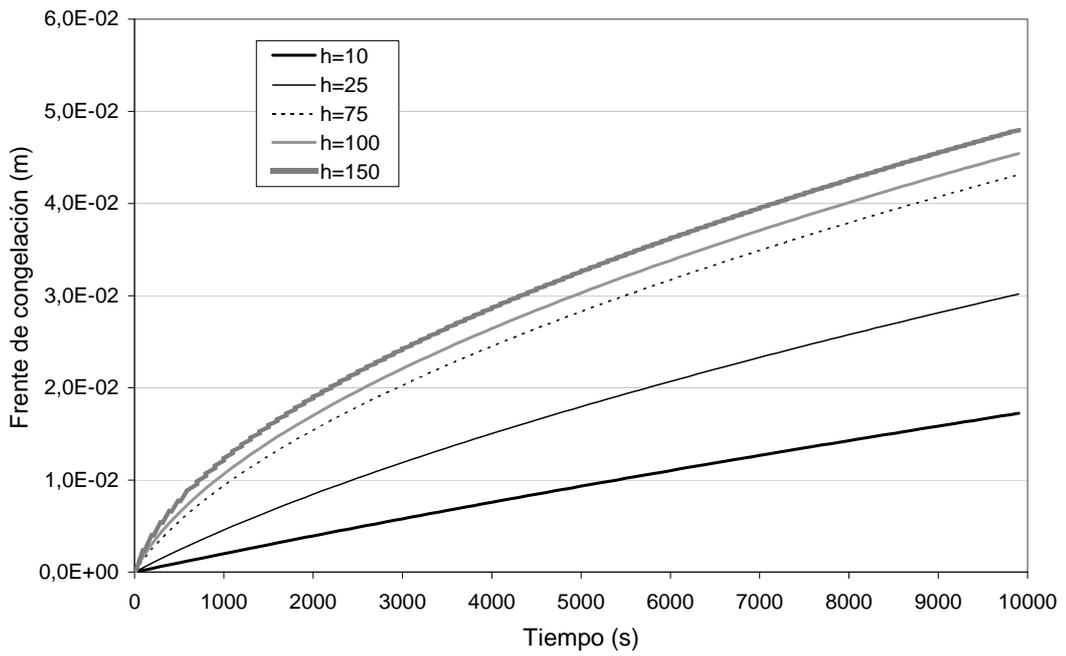


Figura 4b: Influencia del coeficiente de transferencia de calor sobre la evolución del frente de congelación, $T_s = 243 K$.

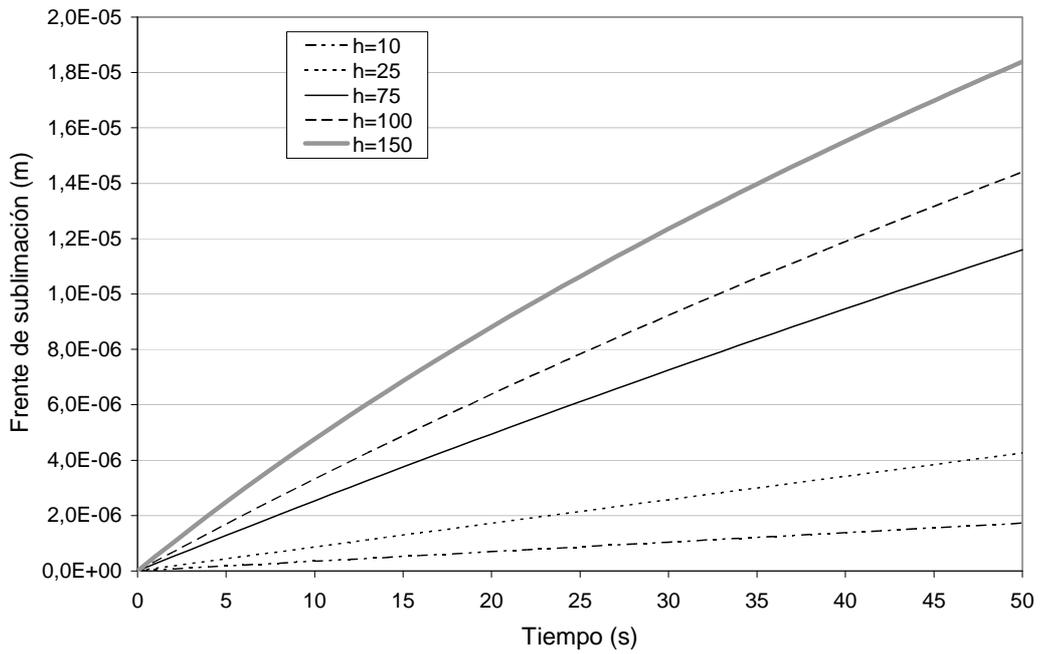


Figura 5a: Influencia del coeficiente de transferencia de calor en la evolución del frente de sublimación (a tiempos muy cortos), $T_s = 243 K$.

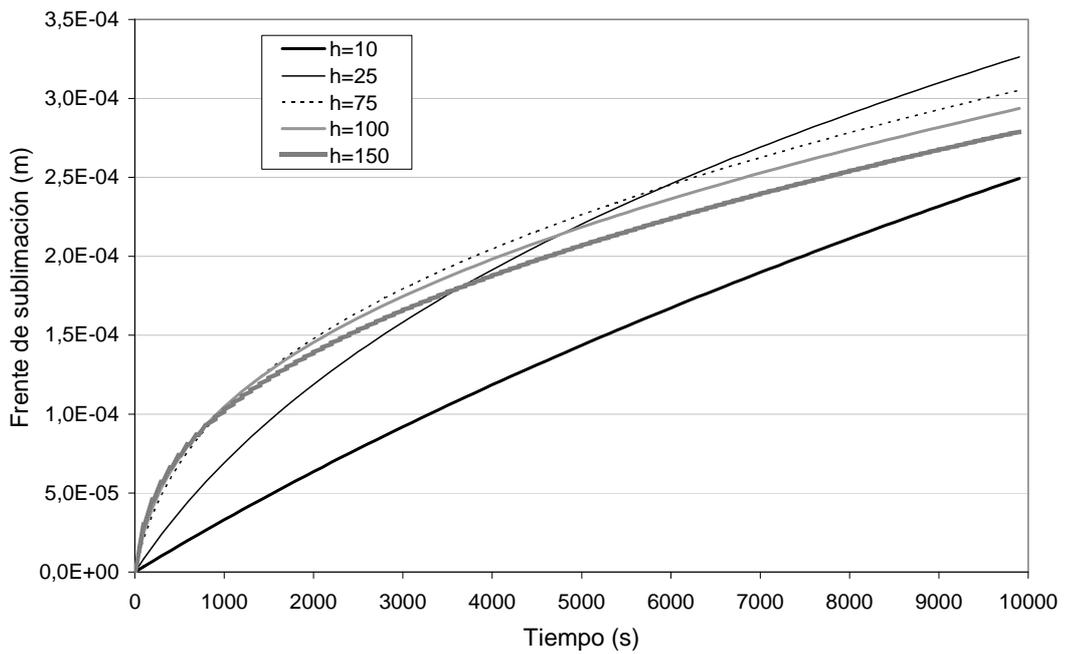


Figura 5b: Influencia del coeficiente de transferencia de calor en la evolución del frente de sublimación, $T_s = 243 K$.

Otra característica de la influencia de h es la monotonía decreciente de la temperatura sobre el frente de sublimación. Este efecto es más notorio para valores pequeños de h y el comportamiento se vuelve asintótico para altos valores del parámetro (ver [Figura 6](#)).

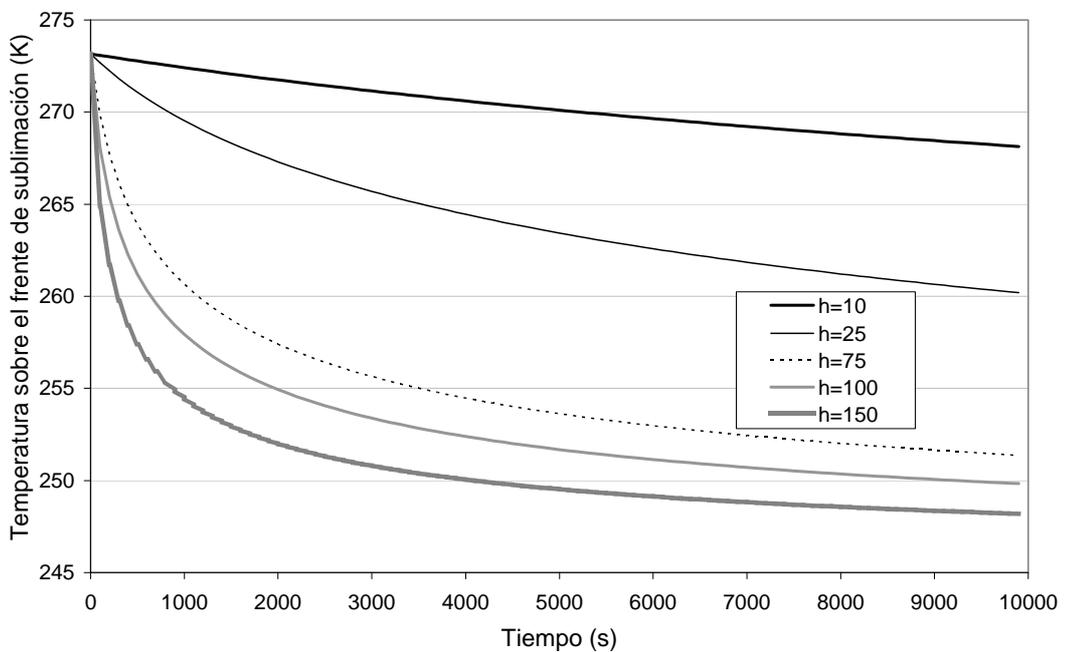


Figura 6: Influencia del coeficiente de transferencia de calor en la temperatura del frente de sublimación, $T_s = 243 K$.

Cuando se considera a T_s como parámetro, se obtiene que $s_f(t)$ es monótonamente decreciente y $s_d(t)$ es monótonamente creciente como función de T_s (ver Figuras 7 y 8, respectivamente). En el caso de $s_d(t)$, inicialmente T_s no tiene influencia, pero a grandes tiempos existe una clara influencia de la temperatura externa.

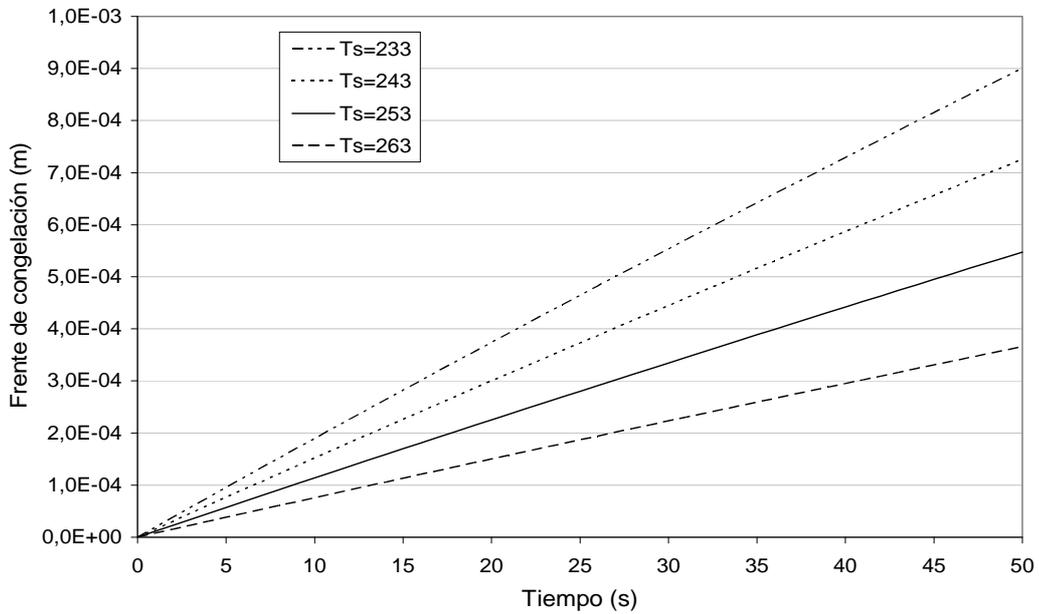


Figura 7a: Influencia de la temperatura externa en la evolución del frente de congelación (a tiempos muy cortos), $h = 75 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$

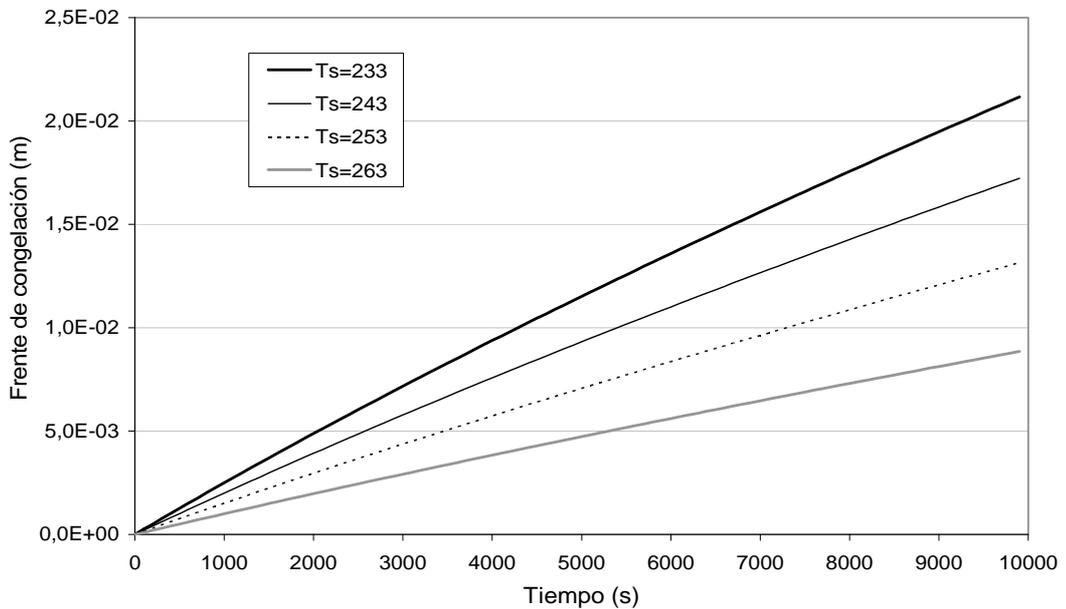


Figure 7b: Influencia de la temperatura externa en la evolución del frente de congelación, $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$

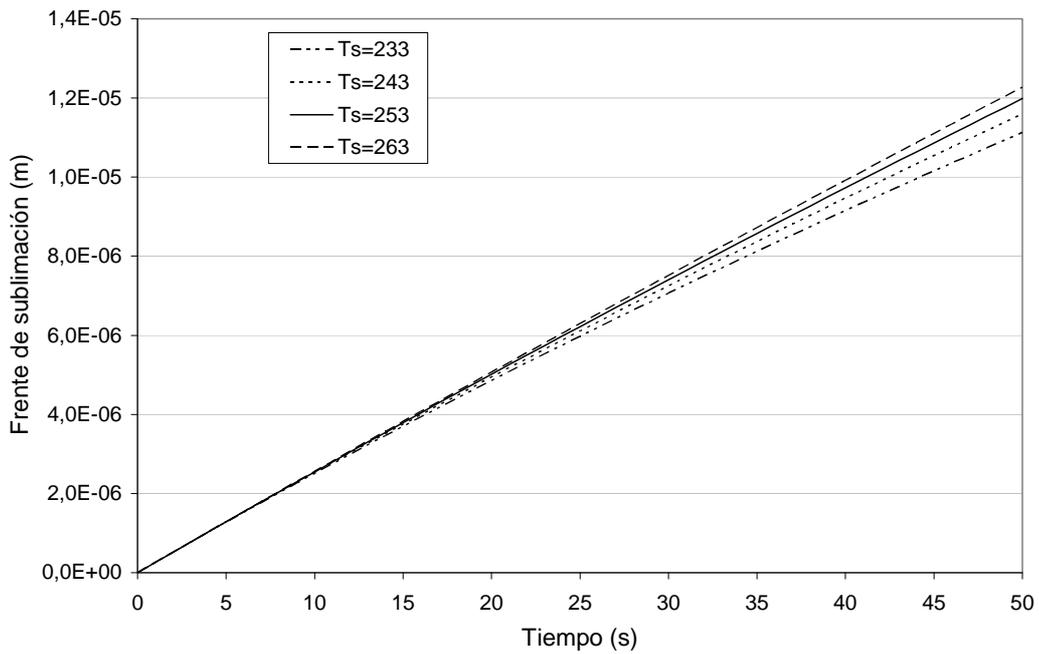


Figure 8a: Influencia de la temperatura externa en la evolución del frente de sublimación (a tiempos muy cortos), $h = 75 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$

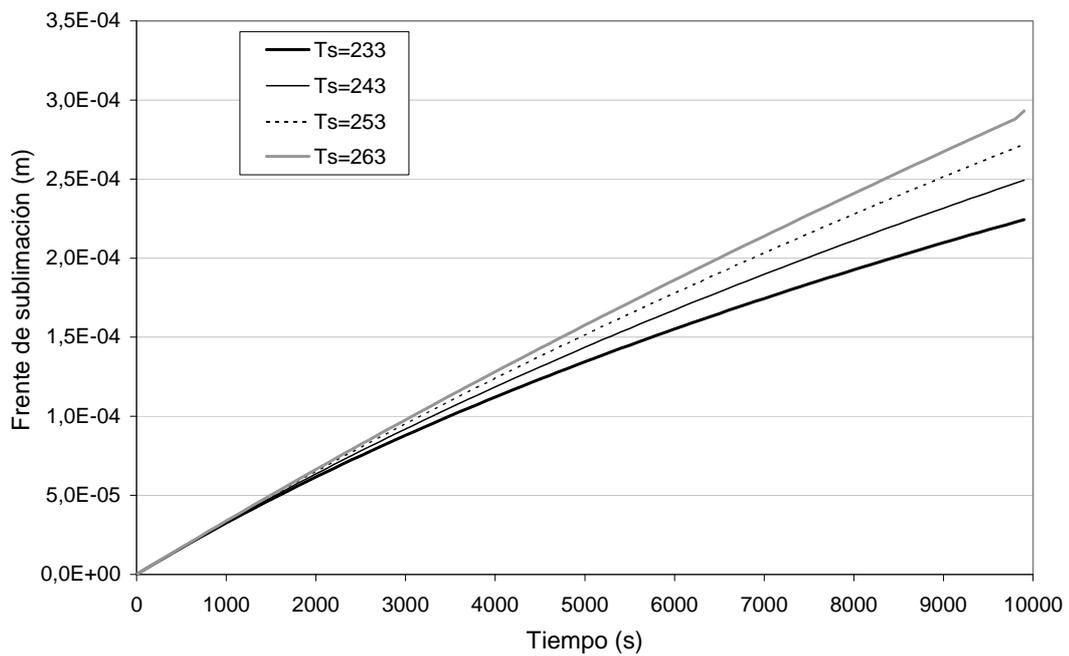


Figure 8b: Influencia de la temperatura externa en la evolución del frente de congelación, $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$

Además, los datos mostrados en las Figuras 4 a 8, muestran claramente que para sistemas de iguales características y condiciones de congelamiento, los valores de $s_f(t)$ son, al menos,

2 ordenes de magnitud mayores que los de $s_d(t)$ y que para un sistema real y en tiempos normales de congelamiento la sublimación del hielo está restringida a una zona muy delgada. Por los ejemplos dados en este trabajo los valores mayores de $s_d(t)$ son alcanzados luego de los 10000 segundos y son menores de 0.3 milímetros.

La [Figura 9](#) muestra la influencia de T_s sobre T_0 . Esto muestra que a bajos valores de la temperatura externa se tiene menor temperatura de sublimación y que su influencia crece a medida que avanza el tiempo (mayor separación entre las temperaturas de sublimación para diferentes temperaturas externas). Mas aún, en la [Figura 10](#), se ve el cambio en los perfiles de temperatura en las zonas deshidratada y congelada en el tiempo para un valor dado de los parámetros h y T_s . En la figura se ve un perfil que cambia rápidamente en la zona deshidratada pero es gradual (casi lineal) en la zona congelada. Ambos perfiles tienen, al mismo tiempo, menor pendiente a medida que los frentes $s_d(t)$ y $s_f(t)$ avanzan hacia el interior del sistema.

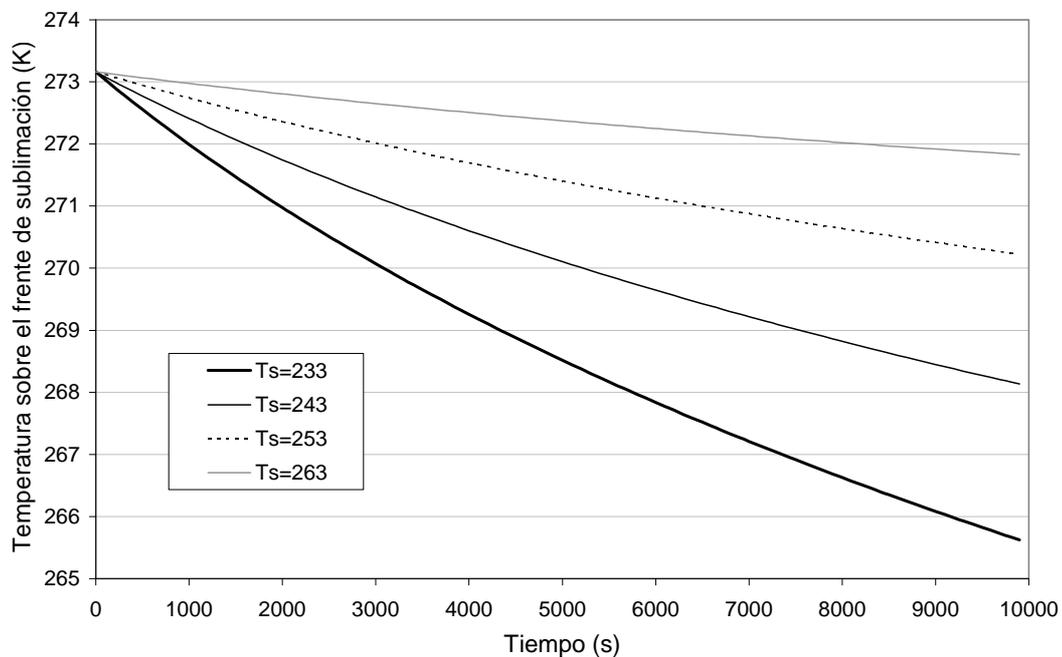


Figure 9: Influencia de la temperatura externa sobre la temperatura del frente de sublimación

Con el fin de analizar mejor la evolución de la temperatura, las [Figuras 11 y 12](#) presentan la influencia de h y T_s en la predicción de los perfiles de temperatura en un tiempo dado (1000s) para las zonas congelada y deshidratada respectivamente. Los gráficos tienen el comportamiento esperado, con menores temperaturas para valores altos de h y bajos de T_s . La suma de ambas figuras define la distribución de temperatura en el sistema completo.

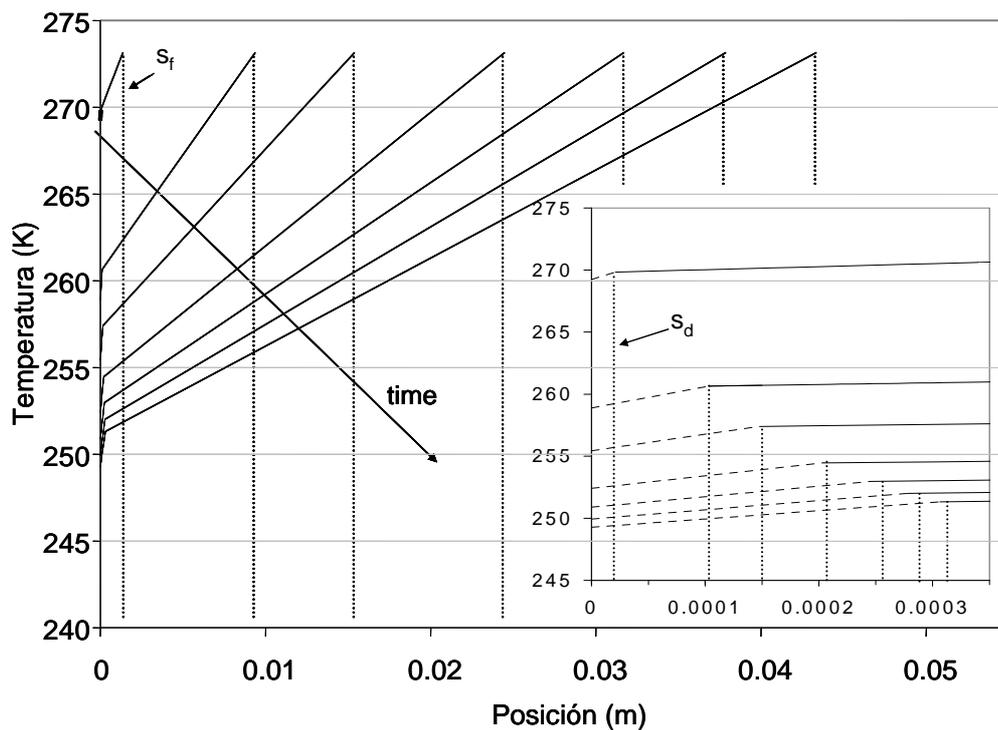


Figure 10: Perfiles de temperatura en las regiones deshidratada y congelada y las posiciones de los respectivos frentes a diferentes tiempos (entre 100 y 10000 s), $h = 75 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ y $T_s = 243 \text{ K}$. La flecha indica el crecimiento del tiempo

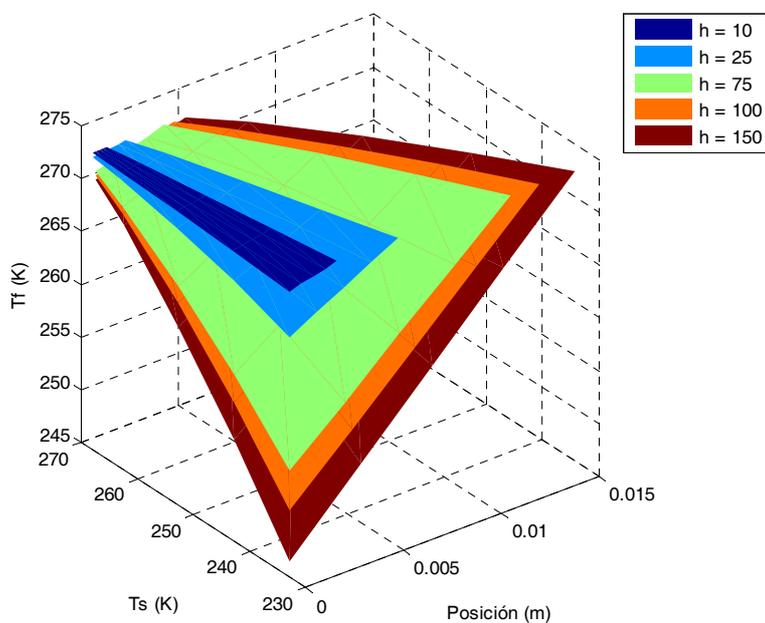


Figure 11: Perfiles de temperatura en la zona congelada a los 1000 s, como función de h y T_s .

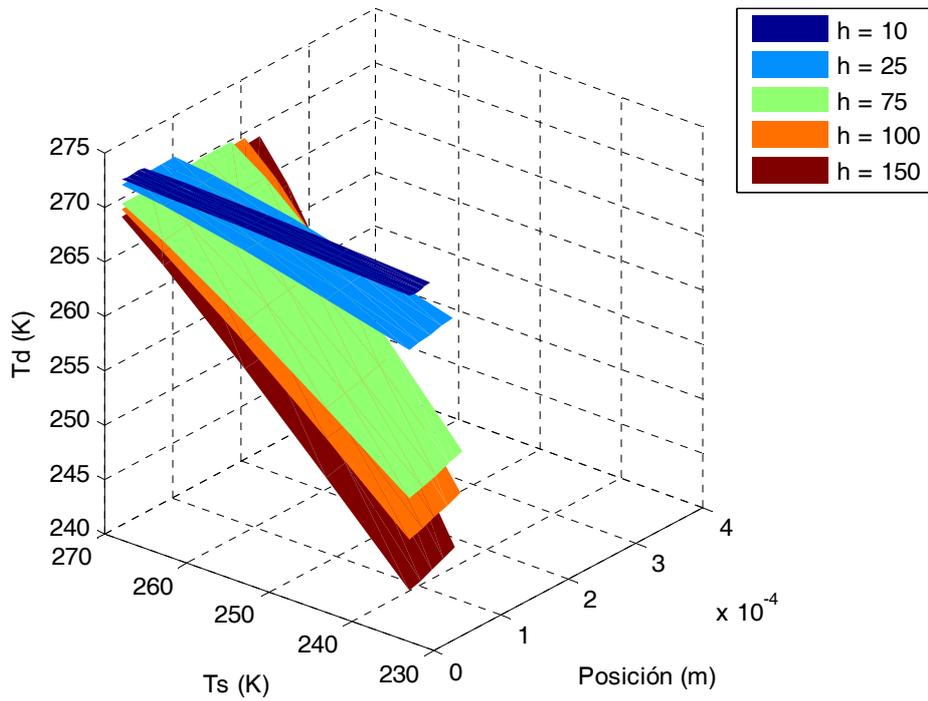


Figure 12: Perfiles de temperatura en la zona deshidratada a los 1000 s, como función de h y T_s

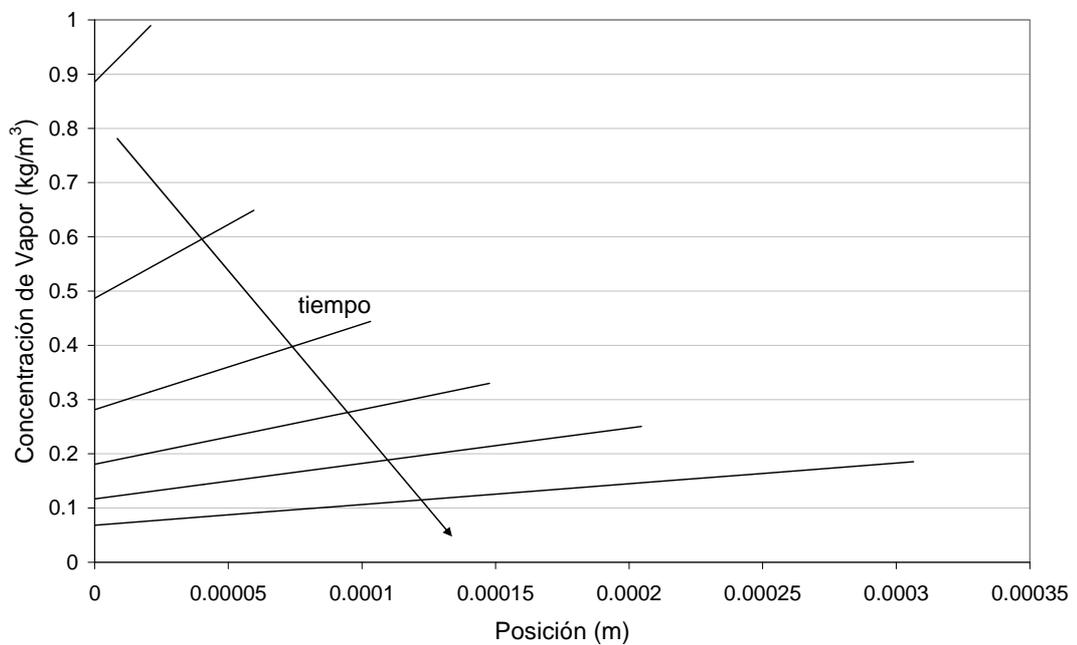


Figure 13: Perfiles de concentración de vapor a diferentes tiempos (entre 100 y 10000 s) en la zona deshidratada, $h = 75 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ y $T_s = 243 \text{ K}$. La flecha indica el crecimiento del tiempo

En la Figura 13 se muestra el perfil de la concentración de vapor de agua entre los 100 y 10000 segundos para $h = 75 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ y $T_s = 243 \text{ K}$. Como es de esperar, se encuentra que los valores de la concentración son menores a altos tiempos debido a la disminución de $T_0(t)$, que origina a su vez el bajo valor de $C_{va}(s_d(t), t)$. Estos resultados se complementan con los que se observan en la Figura 14, donde se muestra la influencia de h y T_s sobre la concentración de vapor a los 1000 segundos.

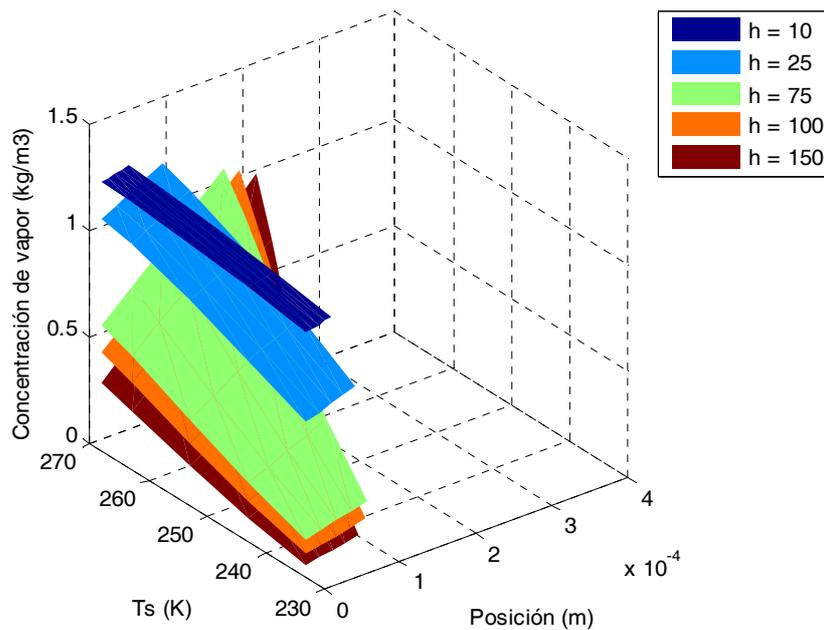


Figure 14: Perfiles de concentración de vapor en la zona deshidratada a los 1000 s, como función de h y T_s .

4 CONCLUSIONES

El modelo cuasi-analítico, desarrollado con pocas suposiciones que simplifiquen el problema real, permite predecir con sencillez la influencia de las características del material y condiciones de congelamiento en la evolución de los frentes de congelación y sublimación así como también la distribución de temperatura en las regiones congelada y deshidratada y la concentración de vapor de agua en la zona deshidratada.

Este método puede ser utilizado para optimizar condiciones de congelamiento de ciertos tipos de materiales así como también constituye una base para el desarrollo de modelos mas complejos, que incluyan un rango de congelamiento o temperaturas iniciales distintas de las material a congelar.

REFERENCIAS

L.A. Campañone. *Transferencia de calor en congelación y almacenamiento de alimentos*.

- Sublimación de hielo, calidad, optimización de condiciones de proceso*, Tesis de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina (2001).
- A.C. Cleland. *Food Refrigeration Processes. Analysis, Design and Simulation*. Eds. Elsevier, London, 95-136, 1990.
- A.E. Delgado, D.-W. Sun. Heat and mass transfer models for predicting freezing processes review. *Journal of Food Engineering*, 47:157-174, 2001.
- A.L. London, R.A. Seban. Rate of ice formation. *Transactions of ASME*, 65:711-779, 1943.
- A. V. Luikov. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies (review). *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 18:1-14, 1975.
- V.J. Lunardini. *Heat Transfer with Freezing and Thawing*, Eds. Elsevier, London, 1-167, 1991.
- R.H. Mascheroni, A. Calvelo. Relationship between heat transfer parameters and the characteristic damage variables for the freezing of beef. *Meat Science*, 4:267-285, 1980.
- R. Plank. Beitrage zur Berechnung und Bewertung der Gefriereschwindigkeit von Lebensmitteln. *Beiheft zur Zeitschrift fur die gesamte Kalte-Industrie*, 3:1-17, 1941.
- V.O. Salvadori, R.H. Mascheroni. Prediction of freezing and thawing times by means of a simplified analytical method. *Journal of Food Engineering*, 13:67-78, 1991.
- E.A. Santillán Marcus, D.A. Tarzia. Explicit solution for freezing of humid porous half-space with heat flux condition. *International Journal of Engineering Science*, 38:1651-1665, 2000.
- D.A. Tarzia. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan and related problems, MAT - Serie A, # 2, Rosario, (2000) 297 páginas. Ver [www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2\(2000\)](http://www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000))