

## ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL COJINETE DE LONGITUD FINITA USANDO EL MÉTODO DE PERTURBACIÓN REGULAR

Gustavo G. Vignolo<sup>a,b,c</sup>, Daniel O. Barilá<sup>c</sup>, Lidia M. Quinzani<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av Alem 1253 – 8000 – Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [gvignolo@plapiqui.edu.ar](mailto:gvignolo@plapiqui.edu.ar)

<sup>b</sup> Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), Universidad Nacional del Sur – CONICET Camino La Carrindanga km. 7 – CC 717 - Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [lquinzani@plapiqui.edu.ar](mailto:lquinzani@plapiqui.edu.ar)

<sup>c</sup> Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Ruta Prov. N° 1, Km. 4 – 9000 – Comodoro Rivadavia - Chubut, ARGENTINA, [dbarila@unpata.edu.ar](mailto:dbarila@unpata.edu.ar)

**Palabras Clave:** Perturbación Regular, Lubricación Hidrodinámica, Ecuación de Reynolds

**Resumen:** El estudio del funcionamiento de cojinetes hidrodinámicos lleva directamente a analizar el comportamiento de flujo de una película de fluido que, si es newtoniano, queda descrito por la ecuación de Reynolds. Esta ecuación surge de la integración de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en el fluido (ecuaciones de Navier – Stokes) una vez introducidas en la ecuación de continuidad. De esta manera se obtiene una ecuación diferencial para la presión ( $P$ ). El proceso exige un riguroso análisis de orden de magnitud basado en las relaciones entre las dimensiones del cojinete. De la etapa de adimensionalización surge que hay tres parámetros que rigen el comportamiento del sistema: el número de Sommerfeld ( $S$ ), la relación longitud a diámetro al cuadrado  $(L/D)^2$  y, menos directamente, la excentricidad relativa ( $\eta$ ).

La ecuación de Reynolds, resultante de este tratamiento, es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, cuya solución analítica ha sido estudiada ampliamente desde su formulación pero aún no ha sido hallada. Afortunadamente, para el caso especial de flujo en régimen estacionario y a temperatura constante se han encontrado aproximaciones a dos situaciones geométricas particulares: el caso del cojinete de longitud infinita ( $L/D \rightarrow \infty$ ) y el caso del cojinete de longitud nula ( $L/D \rightarrow 0$ ). Los cojinetes de longitud finita deben tratarse numéricamente.

En este trabajo se analiza el caso del cojinete de longitud finita haciendo uso del método de perturbación regular usando la relación  $(L/D)^2$  como parámetro de perturbación. Lo novedoso del tratamiento realizado es el estudio del comportamiento del cojinete corto efectuando la expansión en serie no sólo de  $P$  sino también de  $S$ . Dado que el número de Sommerfeld sólo aparece como un factor de un término de la ecuación de Reynolds en el que también está presente el parámetro de perturbación, la metodología propuesta permite ampliar el rango de valores que el parámetro  $S$  puede tomar, y por ende, el rango de  $\eta$ .

Hasta el presente se han considerado diversos valores de la relación  $L/D$  y se han comparado los resultados analíticos aproximados del método propuesto con la solución de orden cero, la solución perturbada sin expandir  $S$  y la solución numérica obtenida mediante diferencias finitas. Se han analizado los perfiles de presión, velocidades axial y tangencial y tensiones en función de la posición tangencial y axial, como así también la capacidad portante y las variables de proceso en función de  $S$ . Los resultados obtenidos muestran muy buenas predicciones hasta valores de  $\eta = 1/2$  y  $L/D = 1$ .

## INTRODUCCIÓN:

Los cojinetes son elementos de máquina que permiten a un eje girar libremente y soportar carga simultáneamente. En función de la máquina y la aplicación, los cojinetes tienen formas y diseños muy variados. Los más utilizados son, básicamente, los rodamientos y los cojinetes hidrodinámicos (Norton, 1999; Shigley y Mischke, 1999). Estos últimos resultan de particular interés tanto teórico como práctico. En funcionamiento normal, ellos evitan el contacto entre las superficies sólidas en movimiento relativo interponiendo una capa de fluido entre ellas sin necesidad de equipos o bombas auxiliares. Así, en teoría, tienen una vida útil infinita. Por otro lado, estos cojinetes presentan dos cualidades igualmente importantes, una es que la capacidad de soportar carga la logran produciendo una resistencia pequeña al movimiento relativo de las superficies y la otra es que tienen la capacidad de amortiguar cargas dinámicas en una amplia gama de condiciones.

La teoría matemática actual de la lubricación está basada en el trabajo de Reynolds (1886) que formula una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales cuya solución analítica ha sido estudiada ampliamente desde su formulación pero aún no ha sido hallada. Afortunadamente, para el caso especial de flujo en régimen estacionario y a temperatura constante se han encontrado aproximaciones a dos situaciones geométricas particulares: el caso del cojinete de longitud infinita ( $L/D \rightarrow \infty$ ) y el caso del cojinete de longitud nula ( $L/D \rightarrow 0$ ). Los cojinetes de longitud finita deben tratarse numéricamente (Pandazaras y Petropoulos, 2005). Sin embargo, existen diversos trabajos que emplean el método de perturbación regular para la obtención de una solución analítica aproximada de la ecuación de Reynolds para cojinetes de longitud finita. El parámetro de perturbación comúnmente usado es la excentricidad relativa ( $\eta$ ) aunque también se ha usado la relación geométrica  $(L/D)^2$  (Capriz y Cimatti, 1978; Buckholz y Hwang, 1986). En todos los casos se obtienen soluciones aproximadas correspondientes a situaciones de excentricidad pequeña, condición que no se encuentra frecuentemente en la práctica.

## ECUACIÓN DE REYNOLDS:

El estudio del funcionamiento de cojinetes hidrodinámicos se inicia analizando el comportamiento del flujo de la película de fluido existente entre el eje o muñón y el cojinete propiamente dicho (Figura 1a).

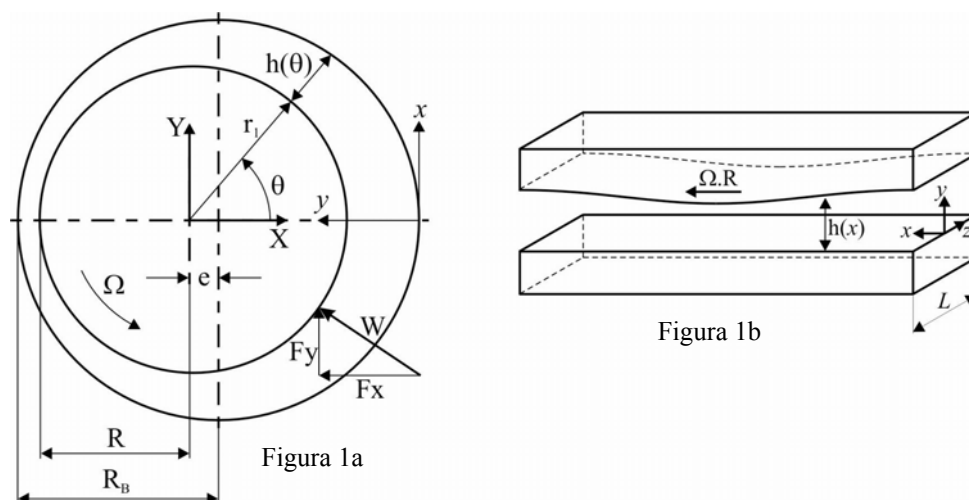


Figura 1: Geometría de un cojinete hidrodinámico (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b). Al despreciarse la curvatura, la coordenada  $x$  puede considerarse como  $R\theta$ .

La resolución de los balances de cantidad de movimiento y masa requiere la aplicación de consideraciones de orden de magnitud basadas en las relaciones entre las dimensiones del cojinete, teniendo en cuenta que el huelgo ( $c = R_b - R$ ) entre eje y cojinete es del orden de la milésima del diámetro ( $D=2R$ ). Esto permite despreciar la curvatura de la película fluida que puede entonces analizarse en coordenadas cartesianas, como se muestra en la [Figura 1b](#).

Integrando las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento para flujo reptante en el balance de masa se elimina la coordenada  $y$  y se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales para la presión ( $P$ ) llamada Ecuación de Reynolds. Si el flujo es estacionario y el fluido es Newtoniano y con propiedades constantes en toda la extensión de la película, la ecuación de Reynolds adimensional resultante es:

$$\frac{1}{2\pi} S_s \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left( \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial\Theta} \right) + \frac{1}{12} \frac{R^2}{L^2} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (1)$$

donde las variables adimensionales están definidas como:

$$p = \frac{P}{P_c}, \quad \Theta = \frac{\theta}{\pi}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad \tilde{h} = \frac{h_{(\Theta)}}{c} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta), \quad \eta = \frac{e}{c}, \quad \text{y} \quad S_s = \frac{\mu U}{P_c R} \left( \frac{R}{c} \right)^2,$$

donde  $P_c$  es la presión característica utilizada,  $\theta$  es la coordenada angular,  $L$  es el largo del cojinete,  $h_{(\Theta)}$  es la separación entre las superficies sólidas,  $\eta$  es la excentricidad relativa o adimensional,  $c$  es el huelgo radial,  $e$  es la excentricidad,  $S_s$  es el número de Sommerfeld,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $U$  es la velocidad tangencial del eje y  $R$  es el radio del eje.

Observando la ec. (1) puede apreciarse que hay tres parámetros que rigen el comportamiento del sistema: el número de Sommerfeld, la relación longitud a radio al cuadrado  $(L/R)^2$  y, menos directamente, la excentricidad relativa. Particularmente, dependiendo del valor que tome  $(L/R)^2$  la ecuación (1) puede simplificarse para situaciones límite. Así, para el caso de un cojinete “muy largo” ( $L/R \rightarrow \infty$ ) la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi} S_s \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \approx \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left( \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial\Theta} \right), \quad (2)$$

cuya solución es conocida como solución de Sommerfeld (1904). Por otro lado, en el caso de un cojinete “muy corto” ( $L/R \rightarrow 0$ ), la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi} S_s \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \approx \frac{1}{12} \frac{R^2}{L^2} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (3)$$

cuya solución es conocida como solución de Ocvirk (1953).

En la práctica, el valor de  $(2R/L)$  suele ubicarse entre  $\frac{1}{2}$  y 2, y la tendencia es hacia la fabricación de cojinetes cada vez más cortos ( $2R/L \approx 1$ ). Por ese motivo, el estudio de la solución de Ocvirk cobra importancia para la estimación de las propiedades de los cojinetes.

### Condiciones de Borde (CBs):

La solución de Ocvirk se obtiene utilizando las siguientes condiciones de borde:

$$z = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z = \frac{1}{2} \rightarrow p = p_e, \quad (4)$$

donde  $p_e$  representa la presión exterior adimensional que, por motivos prácticos, se considerará nula.

La presión así calculada presenta valores positivos para  $0 < \Theta < 1$  y negativos para  $1 < \Theta < 2$ , con magnitudes absolutas iguales en ambas zonas. Esta situación suele conocerse como 'solución  $2\pi$ ' (Pinkus, 1961; Mori *et al.*, 1968; Norton, 1999; Hamrock *et al.*, 2004). Esta situación ideal resulta poco realista ya que un fluido no es capaz de soportar una presión negativa de importancia sin mostrar cambios físicos. Lo que sucede en la práctica en la zona de presiones negativas es una combinación de varios fenómenos entre los que pueden destacarse la vaporización del fluido, cuando la presión alcanza a la presión de vapor para la temperatura de trabajo, y la incorporación de aire desde el exterior por los laterales (Mori *et al.*, 1968). Por ello la ecuación suele evaluarse sólo en  $0 \leq \Theta \leq 1$ , y se aproxima el valor de  $p$  en la otra mitad de la circunferencia como igual a  $p_e$ . Esta condición de borde es conocida como condición de Gumbel y la solución de las ecuaciones (2) ó (3) obtenida mediante su uso se denomina 'solución  $\pi$ ' (Norton, 1999). Esta condición es la utilizada en este trabajo.

Otra condición de borde que suele utilizarse es la denominada condición de Reynolds. Ésta considera que la presión se hace nula en algún valor de  $\Theta$  entre 1 y 2, denominado  $\Theta^*$ , pero asumiendo que la derivada de la presión respecto  $\Theta$  en ese punto también es nula, esto es:

$$\begin{aligned} z = 0 &\rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ z = \frac{1}{2} &\rightarrow p = p_e, \\ \Theta = \Theta^* &\rightarrow p = p_e, \\ \Theta = \Theta^* &\rightarrow \frac{\partial p}{\partial \Theta} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

La Figura 2 ejemplifica esta situación para un caso de cojinete de longitud infinita. Esta metodología incorpora una incógnita más,  $\Theta^*$ , pero también una ecuación más. Estas condiciones de borde son las utilizadas en el trabajo de Raimondi y Boyd (Mori *et al.*, 1968; Hamrock *et al.*, 2004).

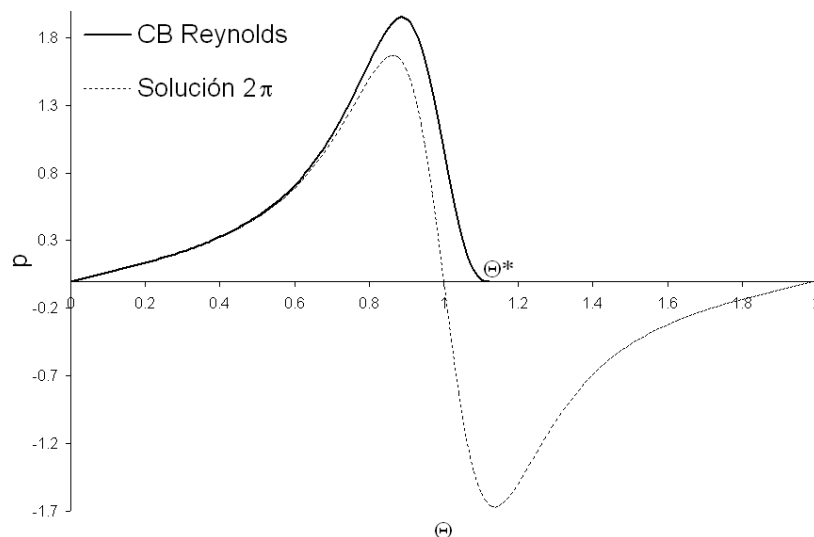


Figura 2: Perfiles de presión para cojinete de  $L/D \rightarrow \infty$  con  $\eta=0.8$ . Comparación de la solución para CBs de Reynolds y la solución  $2\pi$

Debe notarse que las CBs de Reynolds no pueden utilizarse cuando  $L/D \rightarrow 0$  ya que la ecuación diferencial resultante, ec. (3), contiene derivadas respecto de  $z$ , y no respecto de  $\Theta$ , lo que no admite condiciones de borde sobre valores de  $\Theta$  para eliminar las constantes de integración. Es por este motivo que se utilizan las CBs de Gumbel y no las de Reynolds en el presente trabajo. Esto debe tenerse en cuenta al momento de la comparación de resultados con las soluciones numéricas de referencia para el método propuesto (que también usan las CBs de Gumbel) y las de Raimondi y Boyd (que usan las CBs de Reynolds).

Físicamente, ninguno de estos dos conjuntos de condiciones de borde es totalmente correcto, y existen discrepancias sobre cuál es el que mejor ajusta a las mediciones experimentales, aunque el error que ambos producen es acotado. La diferencia de los resultados obtenidos utilizando uno u otro conjunto aumenta a medida que lo hace la excentricidad relativa ( $\eta$ ) (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004).

### MÉTODO PROPUESTO:

Observando la ecuación de Ocvirk, ec.(3), puede notarse que para que se cumpla la igualdad, el orden de magnitud de  $S_s$  debe ser  $(R/L)^2$ . Esto limita la validez de la solución a valores de  $S_s$  elevados. Por este motivo, en este trabajo se analiza el caso del cojinete de longitud finita haciendo uso del método de perturbación regular tomando la relación  $(L/2R)^2$  como parámetro de perturbación ( $\varepsilon$ ) (Nayfeh, 1973; Bender y Orszag, 1978; Deen, 1998). Lo novedoso del tratamiento realizado es el estudio del comportamiento del cojinete corto efectuando la expansión en serie no sólo de la presión ( $p$ ), sino también del número de Sommerfeld ( $S_s$ ). Por ese motivo, al método propuesto se referirá como *Perturbación  $p$  y  $S$* . Dado que el parámetro  $S_s$  sólo aparece como un factor de un término de la ecuación de Reynolds en el que también está presente el parámetro de perturbación, la metodología propuesta permite ampliar el rango de valores que el parámetro  $S_s$  puede tomar, y por ende, el rango de  $\eta$ .

Así, si  $\varepsilon=(L/2R)^2$ , las expansiones para  $p$  y  $S_s$  resultan:

$$\begin{aligned} S_s &= S_0 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2 S_1 + \dots \rightarrow S_s = S_0 + \varepsilon S_1 + O(\varepsilon^2) \\ p &= p_0 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2 p_1 + \dots \rightarrow p = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (6)$$

y reemplazando en la ecuación de Reynolds se tiene:

$$\frac{2}{\pi}(S_0 + \varepsilon S_1)\varepsilon \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{3\pi^2}\varepsilon \frac{\partial}{\partial\Theta} \left[ \tilde{h}^3 \frac{\partial(p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial\Theta} \right] + \frac{1}{12}\tilde{h}^3 \frac{\partial^2(p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial z^2}, \quad (7)$$

donde la solución de orden cero es la de Ocvirk:

$$p_0 = 12S_0^* \left[ \frac{1}{4} - z^2 \right] \frac{\eta \sin(\pi\Theta)}{[1 + \eta \cos(\pi\Theta)]^3}. \quad (8)$$

La solución de orden uno queda dada por:

$$p_1 = 2\eta \frac{[A \sin(\pi\Theta) + B \sin(2\pi\Theta) + C \sin(3\pi\Theta)]}{D \cos(\pi\Theta) + E \cos(2\pi\Theta) + F \cos(3\pi\Theta) + G \cos(4\pi\Theta) + H \cos(5\pi\Theta) + I}, \quad (9)$$

donde:

$$\begin{aligned}
A &= S_1^* (-24z^2\eta^2 - 96z^2 + 6\eta^2 + 24) + S_0^* (112\eta^2z^4 - 168\eta^2z^2 + 48z^2 - 32z^4 + 35\eta^2 - 10), \\
B &= 64S_0^*\eta z^4 - 96\eta S_1^*z^2 - 96S_0^*\eta z^2 + 20\eta S_0^* + 24\eta S_1^*, \\
C &= \eta^2 (-24z^2S_1^* + 16S_0^*z^4 - 24S_0^*z^2 + 6S_1^* + 5S_0^*), \\
D &= 80\eta + 120\eta^3 + 10\eta^5, \\
E &= 80\eta^2 + 40\eta^4, \\
F &= 40\eta^3 + 5\eta^5, \\
G &= 10\eta^4, \\
H &= \eta^5, \\
I &= 16 + 80\eta^2 + 30\eta^4,
\end{aligned}$$

donde  $S_0^*$  y  $S_1^*$  están definidos como:

$$\begin{aligned}
S_0^* &= S_0\varepsilon, \\
S_1^* &= S_1\varepsilon.
\end{aligned}$$

El cálculo de  $S_0$  y  $S_1$  surge de la definición adoptada para la presión característica  $P_c$ . En este caso, tal como se lo hace generalmente,  $P_c$  se define como la carga o capacidad portante ( $W$ ) proyectada por unidad de área, es decir:

$$P_c = \frac{W}{LD}, \quad (10)$$

$$\text{donde: } W = \sqrt{Fx^2 + Fy^2},$$

$$Fx = P_c LR \pi \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 -p \cos(\pi\Theta) dz d\Theta, \text{ y} \quad (11)$$

$$Fy = P_c LR \pi \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 -p \sin(\pi\Theta) dz d\Theta. \quad (12)$$

De esta manera, las ecuaciones a resolver son, para  $S_0$ :

$$\frac{4}{\pi^2} = \left[ \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 -p_0 \cos(\pi\Theta) dz d\Theta \right]^2 + \left[ \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 -p_0 \sin(\pi\Theta) dz d\Theta \right]^2, \quad (13)$$

y para  $S_1$ :

$$\frac{4}{\pi^2} = \left[ \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 -(p_0 + \varepsilon p_1) \cos(\pi\Theta) dz d\Theta \right]^2 + \left[ \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 -(p_0 + \varepsilon p_1) \sin(\pi\Theta) dz d\Theta \right]^2. \quad (14)$$

Debe hacerse la aclaración de que los resultados presentados de aquí en adelante serán en función del número de Sommerfeld definido como:

$$S = \frac{\mu N}{P_c} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \quad (15)$$

donde  $N$  son las revoluciones por segundo del eje. Se utiliza esta definición para comparar los resultados obtenidos con los de Raimondi y Boyd (Shigley y Mischke, 1999), que están expresados utilizando al número de Sommerfeld definido de esta manera. La relación entre las definiciones dadas para el número de Sommerfeld es una constante, ya que:

$$S_s = 2\pi S .$$

## RESULTADOS OBTENIDOS:

En la solución de Ocvirk, ec.(8), se asume que el gradiente circunferencial de presión puede despreciarse respecto del axial. Esta suposición es válida para relaciones  $L/D$  menores a  $1/8$  aunque en la práctica, esta suposición es usada para valores de  $L/D$  de hasta  $1/2$  ya que los errores en el cálculo de torque, caudal y capacidad portante se mantienen acotados, como se verá en la Figura 4 (Frêne *et al.*, 1997). Sin embargo, dado que el comportamiento del número de Sommerfeld es, a grandes rasgos, inversamente proporcional a la excentricidad relativa, y dado que la solución de Ocvirk es válida para valores de  $S$  elevados, las excentricidades para las cuales esta solución es aplicable deben ser pequeñas.

### Presión y capacidad portante:

La Figura 3 muestra un ejemplo de los perfiles de presión que se obtienen con el método propuesto en comparación con la solución numérica y la solución de Ocvirk para el caso de  $L/D=1/2$ ,  $\eta=0.5$  y  $z=0.0263$ . Para  $1/2 \leq \eta < 1$ , los errores que se obtienen mediante la solución de Ocvirk se tornan importantes sobre todo en el valor de la presión máxima y en la posición de la misma.

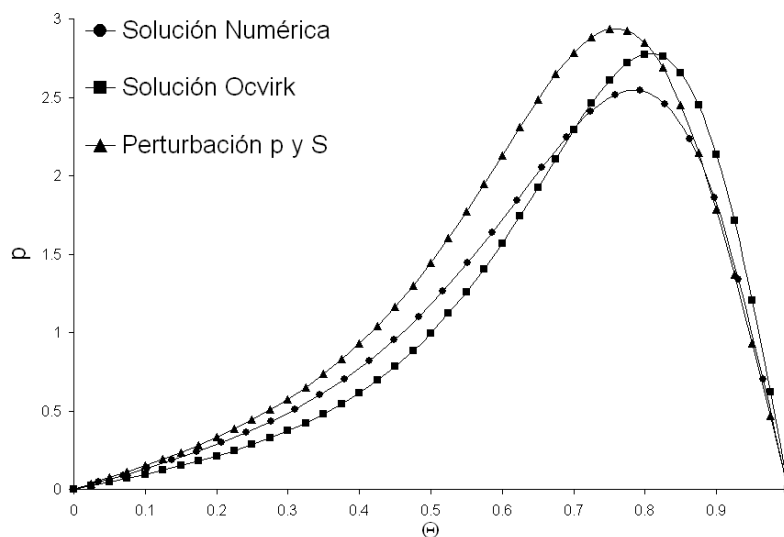


Figura 3: Perfil de presión adimensional calculado numéricamente y calculado mediante la solución de Ocvirk y mediante el método propuesto. Los valores corresponden a  $L/D=1/2$ ,  $\eta=0.5$  y  $z=0.0263$ .

Cabe mencionar que los perfiles de presión calculados con el método de perturbación propuesto muestran valores negativos cuando la excentricidad tiende a la unidad, y el efecto es más notorio a medida que la relación  $L/D$  también lo hace. Sin embargo, la predicción de la capacidad portante mejora notablemente respecto de la calculada utilizando la solución de Ocvirk a medida que los valores de  $L/D$  y  $\eta$  se acercan a la unidad, según muestra la Figura 4. Nótese que se relaciona a esta figura con la capacidad portante debido a que la definición del

número de Sommerfeld ( $S$ ) involucra a la presión proyectada, que se calcula utilizando la capacidad portante del cojinete ( $W$ ).

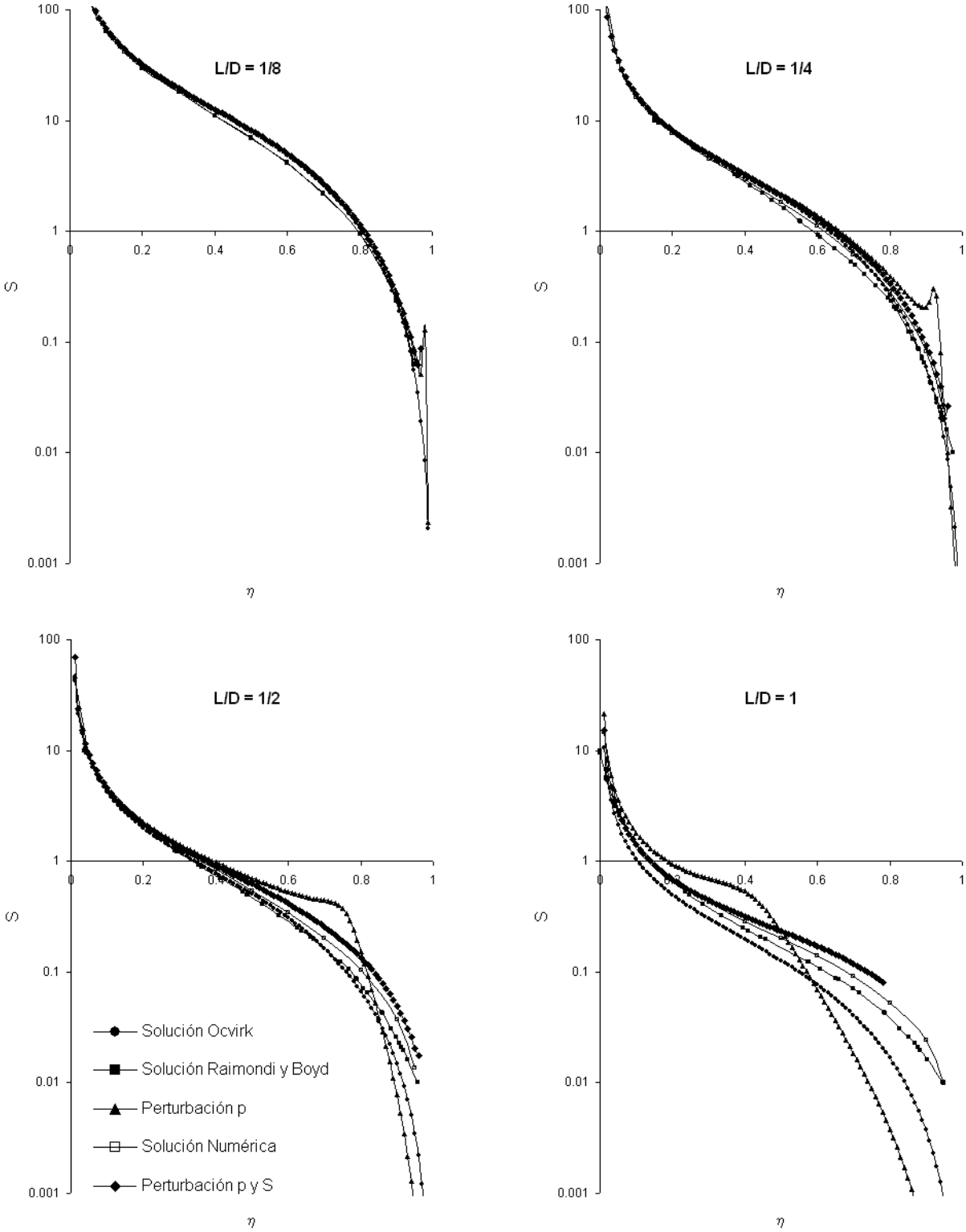


Figura 4: Número de Sommerfeld ( $S$ ) en función de la excentricidad relativa ( $\eta$ ) predicho por los diferentes métodos de cálculo, para valores de  $L/D$  de  $1/8$  a  $1$ .



### Tensión sobre la pared y fricción:

La tensión de corte adimensional se define como:

$$T = -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\tilde{h}} = \frac{\tau|_{\tilde{h}}}{\mu U}. \quad (16)$$

En la [Figura 5](#) se esquematizan los valores de tensión de corte adimensional sobre la pared en función de  $\Theta$  para las condiciones de la [Figura 3](#). Al igual que con el perfil de presión, el método de perturbación propuesto adelanta la ubicación del valor máximo de  $T$ , aunque aproxima mejor la forma del perfil que la solución de Ocvirk.

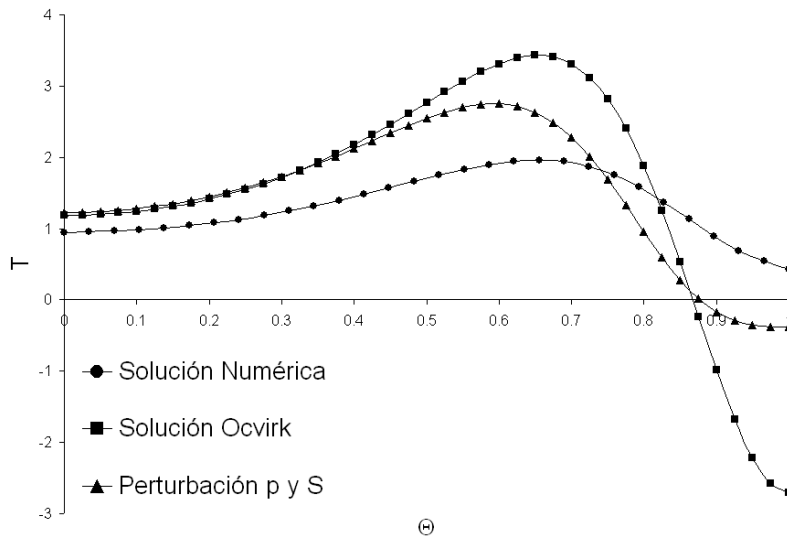


Figura 5: Perfil de tensión de corte adimensional sobre la pared calculado numéricamente y calculado mediante la solución de Ocvirk y mediante el método propuesto. Los valores corresponden a  $L/D=1/2$ ,  $\eta=0.5$  y  $z=0,0263$ .

El coeficiente de fricción adimensional queda determinado por:

$$f \frac{R}{c} = \frac{1}{2} \pi S \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y} dz d\Theta + \frac{1}{2} \pi S \int_{-1/2}^{1/2} \int_1^2 \frac{\partial u_c}{\partial y} dz d\Theta, \quad (17)$$

donde se considera que para  $1 < \Theta \leq 2$  el fluido es arrastrado por el eje sin que exista diferencia de presión ( $u_c$  es la velocidad que se obtiene en flujo Couette). Es decir, al igual que en el cálculo de capacidad portante, se considera que sólo existe gradiente de presión para  $0 \leq \Theta \leq 1$ , mientras que para  $1 < \Theta \leq 2$  el fluido es arrastrado por el eje.

La predicción de  $f.R/c$  con el método de perturbación propuesto muestra una notable mejoría respecto de la solución de Ocvirk a medida que  $\eta$  y  $L/D$  tienden a la unidad, tal como lo muestra la [Figura 6](#). Cabe mencionar que todas las curvas mostradas en la [Figura 6](#) se hacen asintóticas a la solución de Petroff (1883) para  $S$  grandes, quien calculó el coeficiente de fricción adimensional asumiendo que el eje y el cojinete están centrados, es decir, para  $\eta=0$  (Norton, 1999; Shigley y Mischke, 1999). Por lo ya explicado, esta condición se verifica cuando  $S \rightarrow \infty$ . El valor de  $f.R/c$  calculado por Petroff queda determinado por:

$$f \frac{R}{c} = 2\pi^2 S.$$

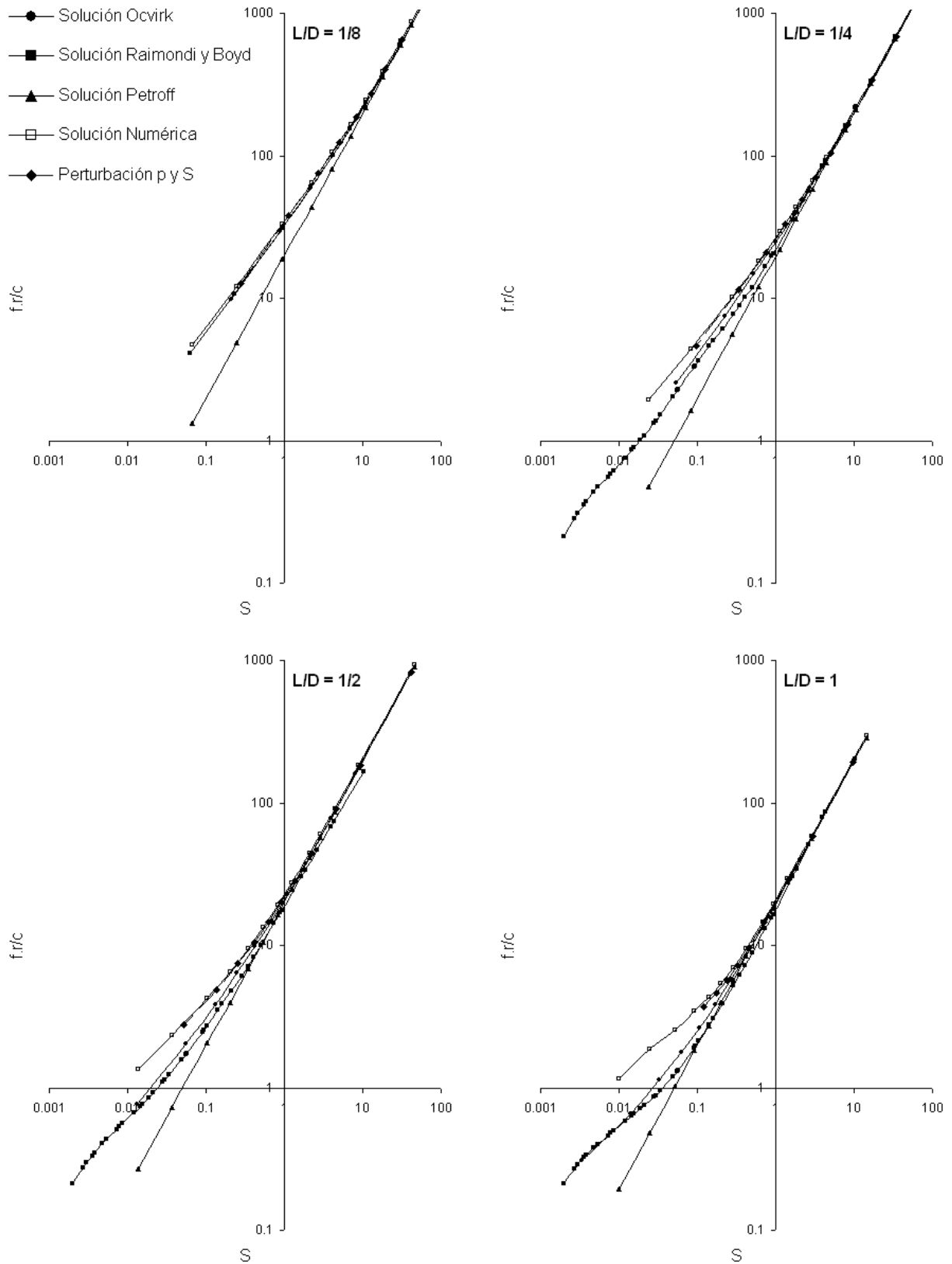


Figura 6: Coeficiente de fricción adimensional en función del número de Sommerfeld predicho por los diferentes métodos de cálculo, para valores de  $L/D$  de  $1/8$  a  $1$ .

### Perfiles de velocidad y caudal:

Los perfiles de velocidad axial y tangencial surgen de la integración de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en  $z$  y  $\Theta$ , respectivamente, quedando determinados por:

$$u = \frac{1}{4\pi^2 S} \frac{\partial p}{\partial \Theta} (y^2 - \tilde{h}y) + \frac{y}{\tilde{h}}, \quad (18)$$

$$w = \frac{1}{4\pi S} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h}y). \quad (19)$$

Los resultados obtenidos por los diferentes métodos difieren en el valor de las derivadas de la presión y, como ya se ha visto en la [Figura 3](#), la discrepancia entre los perfiles de velocidad obtenidos con los diferentes métodos variará dependiendo de los valores de  $L/D$ ,  $\eta$ ,  $\Theta$  y  $z$  considerados.

Por otra parte, el caudal de fluido  $Q_s$  que debe suministrarse al cojinete a través de un orificio central o ranura debe ser igual al flujo axial de fluido que sale del mismo por sus laterales. Este caudal queda expresado por:

$$Q_s = -\frac{\pi}{24} \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{RNcL}{S} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta, \quad (20)$$

y el caudal adimensional ( $q_s$ ) será:

$$q_s = \frac{Q_s}{RNcL} = -\frac{\pi}{24S} \left(\frac{D}{L}\right)^2 \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta. \quad (21)$$

Los cálculos de caudal mediante el método de perturbación propuesto no presentan mejoras respecto de los obtenidos mediante la solución de Ocvirk y, según puede verse en la [Figura 7](#), estos cálculos sobreestiman a los estimados numéricamente. Esta discrepancia aumenta al hacerlo la excentricidad relativa ( $\eta$ ), es decir, a medida que disminuye el número de Sommerfeld ( $S$ ), y al aumentar el valor de  $L/D$  (ver [Figura 7](#)).

Cabe mencionar que el cálculo de caudal realizado utilizando la solución de Ocvirk presenta una sencillez excepcional que resulta muy ventajosa, ya que el caudal adimensional calculado por este método se expresa como:

$$q_{s,Ockirk} = 2\pi\eta$$

Observando las ecs. (19) y (21), puede notarse que el cálculo del caudal involucra la derivada de la presión respecto de  $z$ . Por el contrario, si se considera la ec. (7) surge que el cálculo de la capacidad portante del cojinete involucra a la derivada de la presión respecto de  $\Theta$ . La misma conclusión puede obtenerse al observar las ecs. (17) y (18) que determinan el coeficiente de fricción. Por lo tanto, y recordando que la solución de Ocvirk desprecia el gradiente circunferencial de presión (derivada de la presión respecto de  $\Theta$ ), se puede comprender por qué el método propuesto predice mejor tanto a la capacidad portante como al coeficiente de fricción.

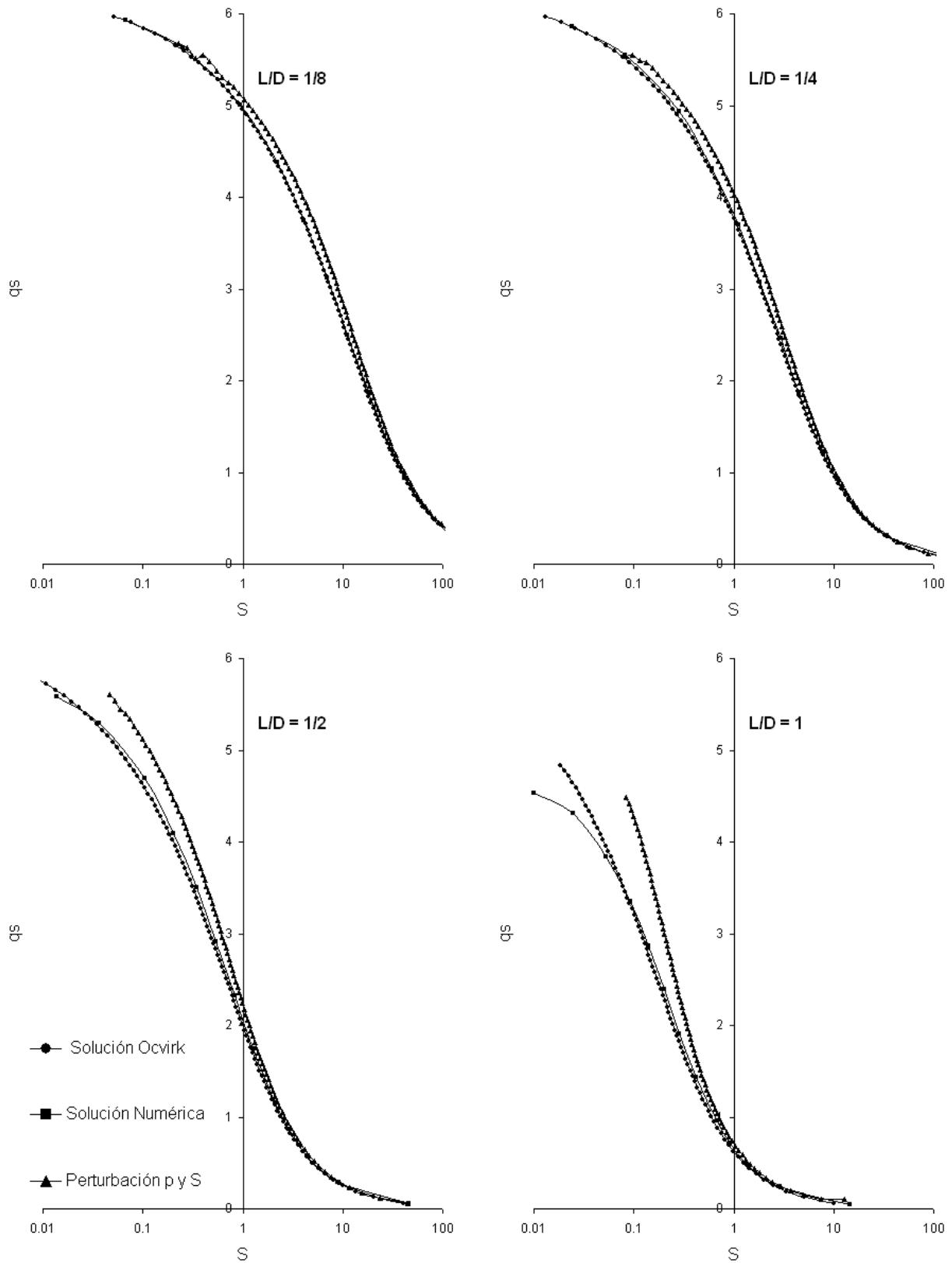


Figura 7: Caudal de suministro adimensional ( $q_s$ ) en función del número de Sommerfeld predicho por los diferentes métodos de cálculo, para valores de  $L/D$  de  $1/8$  a  $1$ .

## CONCLUSIONES:

El mecanismo de cálculo propuesto en este trabajo se basa en la utilización del método de perturbación regular para aproximar la solución de la ecuación de Reynolds para cojinetes relativamente cortos, tomando como parámetro de perturbación a la relación  $(L/D)^2$ . La expansión en serie se hace sobre la variable de la ecuación,  $p$ , y sobre uno de los parámetros de la misma, el número de Sommerfeld ( $S$ ).

La tendencia actual en el diseño de cojinetes es hacia cojinetes más bien cortos, y por ende, más cargados (entiéndase, con mayor excentricidad o menor número de Sommerfeld). En este sentido, la solución de Ocvirk de la ecuación de Reynolds está limitada para el cálculo de cojinetes poco cargados.

En este trabajo se han analizado las principales variables del sistema: presión, velocidad y tensiones de corte, así como los parámetros de funcionamiento que surgen de la integración de las mismas: capacidad portante, fricción y caudal de suministro. Comparando los resultados obtenidos mediante el método propuesto y la solución de Ocvirk respecto de la integración numérica de la ecuación diferencial gobernante, puede inferirse que:

- no existen mejoras sensibles en el cálculo de los perfiles de presión, tensión de corte y velocidades,
- el método propuesto mejora la predicción de los parámetros de funcionamiento que dependen de la variación de la presión con la coordenada  $\Theta$ , tales como la capacidad portante y el coeficiente de fricción (es más, las predicciones de estos parámetros son muy buenas aún para relaciones  $L/D$  cercanas a la unidad y excentricidades relativas de  $1/2$ ), y
- la solución de Ocvirk arroja mejores resultados para el parámetro calculado que depende de la variación de la presión con la coordenada  $z$ , que es el caudal de suministro, sobre todo considerando la notable sencillez con que puede calcularse el mismo.

El método de resolución propuesto es, entonces, combinable con la solución de Ocvirk en lo que respecta al cálculo de los parámetros de funcionamiento de cojinetes cortos cargados. De esta manera, usando las mejores predicciones de cada uno, se logra una aproximación analítica al cálculo de cojinetes hidrodinámicos que puede ser empleada para el diseño de máquinas en condiciones isotérmicas.

## REFERENCIAS:

- C.M. Bender y S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw Hill, 1978.
- R.H. Buckholz y B.Hwang. The Accuracy of Short Bearing Theory for Newtonian Lubricants. *Journal of Tribology*, 108:73-79, 1986.
- G. Capriz y G. Cimatti. On Some Singular Perturbation Problems in the Theory of Lubrication. *Applied Mathematics and Optimization*, 4:285-297, 1978.
- W.M. Deen. *Analysis of Transport Phenomena*. Oxford University Press, 1998.
- J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe y M. Godet. *Hydrodynamic Lubrication* (Tribology and Interface Engineering Series). Elsevier Science, 1997.
- B.J. Hamrock, S.R. Schmid y B.O. Jacobson. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, Second Edition. Marcel Dekker, Inc., 2004.
- H. Mori, H. Yabe y Y. Fujita. On the Separation Boundary Condition for Fluid Lubrication Theories of Journal Bearings. *ASLE Transactions*, 11:196-203, 1968.
- A. Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, 1973.
- R.L. Norton. *Diseño de Máquinas*. Pearson, 1999.
- C. Pandazaras y G. Petropoulos. Tribological Design of Hydrodynamic Sliding Journal Bearings – Formulating New Functional Charts. *Industrial Lubrication and Tribology*, 57:4-11, 2005.
- O. Pinkus. *Theory of Hydrodynamic Lubrication*. McGraw Hill, 1961.
- J.E. Shigley y Ch.R. Mischke. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. McGraw Hill, 1999.