

## **SOBRE A GERAÇÃO DE EXPRESSÕES FINITAS HERMITIANAS E SEU USO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS.**

**Antonio C. Rigitano, Heitor M. Bottura**

*Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia de Bauru, Departamento de Engenharia Civil, Av. Luiz Edmundo C. Coube 14-01, 17.033-360 - Bauru, SP, Brasil,  
rigitano@feb.unesp.br, heitor@feb.unesp.br, <http://www.feb.unesp.br>*

**Palavras Chave:** Expressões finitas hermitianas, Mathematica<sup>®</sup>, Resistência dos Materiais.

**Resumo.** A literatura técnica sobre o método das diferenças finitas e suas aplicações na resolução de equações diferenciais parciais regentes de problemas da mecânica das estruturas é bastante farta, sendo comum encontrar-se deduções de operadores com base na definição geométrica da derivada que, geralmente, não mencionam o erro de aproximação. O presente trabalho trata de obter operadores mais abrangentes através de método semi-automático, nomeados por expressões finitas hermitianas (EFHs), nas quais o resto é intrínseco. Para que isso seja providenciado, as expressões são geradas com o emprego de desenvolvimento de funções em séries de Taylor, porquanto através desse expediente o termo de truncamento fica explícito. Tendo em consideração a necessidade de manipulações algébricas para a obtenção das expressões, desenvolve-se um roteiro de trabalho no ambiente do aplicativo Mathematica<sup>®</sup>, apresentando-se um resumo dos principais comandos a utilizar com a finalidade de obtenção de coleções destinadas à experimentação. No final, mostra-se a possibilidade do uso de expressões especialmente geradas para a solução de dois clássicos problemas de Resistência dos Materiais, que são, respectivamente, o cálculo do deslocamento máximo no extremo de uma viga em balanço e a carga axial crítica concentrada de flambagem de uma viga bi-apoiada. Os resultados obtidos foram, no primeiro caso, a fórmula tradicional exata idêntica à solução pelo método da integração direta e no segundo, uma fórmula com boa aproximação quando comparada à carga de Euler.

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda uma variante numérica para a solução de equações diferenciais regentes de dois problemas clássicos da Resistência dos Materiais que são, a que descreve os deslocamentos verticais de uma viga em balanço sujeita a uma ação concentrada em seu extremo e a que descreve os deslocamentos transversais de uma viga bi-apoiada quando submetida a carga concentrada axial no apoio livre, com o objetivo de obter, respectivamente, a flecha na extremidade livre e a carga crítica de flambagem.

Trata-se de continuidade de tema cujo fundamento se encontra em Rigitano (2001), que consiste em aplicar Expressões Finitas Hermitianas, ou abreviadamente EFHs, um refinamento do método das diferenças finitas tradicional, facilitado pela inclusão no presente texto, de um roteiro de geração de tais expressões no ambiente do aplicativo Mathematica<sup>®</sup>.

Os dois estudos de caso aqui tratados pertencem a uma série de ensaios numéricos, nos quais foi detectada a possibilidade de solução das equações diferenciais através de EFHs apropriadas, de modo exprimir o problema por meio de um sistema de uma equação a uma incógnita.

Procura-se evidenciar a viabilidade do processo que, em tese, pode ser estendido a qualquer problema, considerando-se que, quando for conhecido um conjunto de informações pivotais, uma solução aproximada pode ser obtida com a explicitação de um erro.

Para demonstrar o procedimento, providencia-se inicialmente a dedução manual de uma EFH bastante simples, que fornece a conhecida fórmula de diferenças finitas centrais.

Em seguida, o mesmo problema é resolvido através de processo semi-automático, num roteiro que vem servindo de base para se obter uma coleção de operadores.

Para encerrar, os dois estudos de caso já descritos são solucionados com bom êxito através do emprego de expressões especialmente geradas.

A continuidade no tema proposto pode ser feita, principalmente no que diz respeito ao aperfeiçoamento da automação da geração das EFHs, que são básicas para realizar experimentações visando conseqüente aplicação a um número maior de casos.

## 2 EXPRESSÕES FINITAS HERMITIANAS – EFHs

É farta a literatura sobre o método das diferenças finitas, processo de resolução de equações diferenciais parciais (EDP) a duas ou mais dimensões, utilizado quando a solução analítica é mais complicada ou inexistente.

Uma aplicação desse método em problemas da Resistência dos Materiais pode ser encontrada em Laier e Barreiro (1983), trabalho no qual os autores apresentam exemplos de solução de problemas clássicos, com o emprego de operadores gerados tendo como base a definição geométrica da derivada e interpolação polinomial nos moldes de Salvadori (1956).

Na questão de geração de operadores, outra vertente de dedução pode ser encontrada em Collatz (1966) e que consiste na utilização do desenvolvimento das funções pertinentes em séries de Taylor, porquanto através desse expediente fica explicitado um erro de truncamento.

Para introdução ao tema, considere-se a expressão de operadores genéricos encontrada em Pilkey (1994), com a seguinte redação:

$$\sum (a_p y_p + b_q y_q' + c_r y_r'' + \dots) + R = 0, \quad (1)$$

A Equação (1) é um operador que contempla valores pivotais de uma função  $y$  e de suas derivadas ( $y'$ ,  $y''$ , ...), sendo os índices ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ...) números arbitrários, letras indexadas ( $a_p$ ,  $b_q$ ,  $c_r$ , ...) constantes a determinar e  $R$  denominado resto.

Operadores no formato da Equação (1), que se encontram nomeados neste trabalho por Expressões Finitas Hermitianas, ou abreviadamente EFHs, foram utilizadas em Rigitano (1999), onde consta uma coleção cuja dedução foi realizada à época através de extensas

manipulações algébricas manuais.

Considerando que o objetivo deste trabalho é de experimentações com variados tipos de EFHs e que o tempo despendido para isso é um fator limitante, expõe-se a seguir a variante para obtê-las que consta em Collatz (1966), através de um exemplo tratado em caráter manual e em seguida de modo semi-automático.

## 2.1 Exemplo de dedução de uma EFH através da variante de Collatz

Para sistematizar um procedimento de geração de EFHs, considere-se a dedução de uma delas no formato da Equação (1), com a finalidade de relacionar valores pivotais de uma função e de sua primeira derivada, redigida conforme segue:

$$a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + a_1y_1 + b_0y_0' + R = 0. \quad (2)$$

Para determinar os parâmetros  $a_{-1}$ ,  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b_0$  pertinentes à Equação (2) conforme Collatz (1966), providencia-se o desenvolvimento dos termos  $y_{-1}$  e  $y_1$  em séries de Taylor centradas em  $y_0$ , o que leva a:

$$\begin{aligned} y_{-1} &= [y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' - \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} \dots], \\ y_1 &= [y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} \dots]. \end{aligned} \quad (3)$$

Substituindo as Equações (3) na Equação (2), a menos de  $R$  que fica implícito por truncamento, tem-se que:

$$\begin{aligned} a_{-1}[y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' - \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} + \dots] + a_0[y_0] + \\ a_1[y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} + \dots] + b_0[y_0'] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Reunindo os termos comuns da Equação (4) obtém-se:

$$[a_{-1} + a_0 + a_1]y_0 + [-a_{-1} + a_1 + \frac{b_0}{h}]hy_0' + [a_{-1} + a_1]\frac{h^2}{2!}y_0'' + [-a_{-1} + a_1]\frac{h^3}{3!}y_0''' + \dots = 0. \quad (5)$$

Anulando na Equação (5) termos até a ordem  $h^2$ , resulta o sistema de equações dado por:

$$\begin{aligned} a_{-1} + a_0 + a_1 &= 0, \\ -a_{-1} + a_1 + \frac{b_0}{h} &= 0, \\ a_{-1} + a_1 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

sendo considerado como resto a última parcela, que é:

$$R = [-a_{-1} + a_1]\frac{h^3}{3!}y_0''' + \dots \quad (7)$$

Observe-se que nas Equações (6), o número de incógnitas é maior que o número de equações, problema que pode ser contornado arbitrando-se uma delas para obter as demais.

No caso apresentado, resolve-se o sistema linear constituído pelas Equações (6) tomando-se como incógnitas  $a_{-1}$ ,  $a_0$  e  $a_1$ , cujas respostas são:

$$a_{-1} = \frac{b_0}{2h}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{b_0}{2h}, \quad (8)$$

que substituídas na Equação (7), levam ao resto dado por:

$$R = -\frac{b_0 h^2 y_0'''}{3!} + \dots \quad (9)$$

Finalmente, tomando-se por simplicidade  $b_0 = 1$  nas Equações (8) e (9) e substituindo  $a_{-1}$ ,  $a_0$  e  $a_1$  na Equação (2), tem-se a EFH completa que assim se expressa:

$$-y_{-1} + y_1 - 2hy_0' - \frac{h^3 y_0'''}{3} + \dots = 0. \quad (10)$$

Ressalte-se que na Equação (10) estão presentes três valores pivotais e um resto de terceira ordem  $O(h^3)$  e que será possível obter um deles em função dos outros dois, desde que o resto seja tratado apenas como uma informação de precisão.

Por exemplo, caso se queira obter uma fórmula para a derivada de uma função no ponto 0 através da Equação (10) sendo dados  $y_{-1}$  e  $y_1$ , basta explicitá-la conforme segue:

$$y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} - \frac{h^2 y_0'''}{6} + \dots \quad (11)$$

Note-se que a primeira parcela da Equação (11) é o clássico operador de diferenças finitas centrais e a segunda o seu erro de aproximação, que é de segunda ordem, ou seja  $O(h^2)$ , normalmente não mencionado na literatura mais comum.

Seguindo-se o método em consideração, é possível obter as mais diversas EFHs, o que pode ser bastante facilitado com o uso do Mathematica<sup>®</sup>, conforme objeto do próximo item.

Cumprе observar que o raciocínio que se depreende do exposto será utilizado em dois estudos de caso, considerando-se que, em tese, uma expressão gerada com  $n$  termos dos quais  $(n-1)$  sejam conhecidos, permite estabelecer um sistema de uma equação a uma incógnita com um erro de aproximação  $R$  explícito.

### 3 PROCESSO SEMI-AUTOMÁTICO DE GERAÇÃO DE EFHs

Procurando minimizar a parte algébrica da geração da EFH mostrada no item anterior, propõe-se neste tópico sua solução através de tratamento semi-automático no ambiente do Mathematica<sup>®</sup>.

Para isso, descreve-se a seguir um número mínimo de comandos necessários para uso do aplicativo, sendo que maiores detalhes poderão ser encontrados em Wolfram (2003).

#### 3.1 Desenvolvimento de funções em séries de Taylor no Mathematica<sup>®</sup>

No aplicativo Mathematica<sup>®</sup>, o desenvolvimento de séries de Taylor é obtido através do comando `Series[expr, {x, x0, n}]`, que constrói a referida série para uma função “*expr*” em torno do ponto  $x = x_0$  com até  $(x - x_0)^n$  termos.

Caso seja introduzida no comando uma função genérica  $f[x]$ , o aplicativo construirá a série em caracteres simbólicos conforme mostra a Tabela 1, sendo importante observar o erro de quarta ordem presente no último termo.

In[1]:= Series	3
Out[1]=	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + O(x^4)$

Tabela 1: Comando e resultado de série de Taylor de função  $f[x]$ .

Importante observar que a saída que consta na Tabela 1 não pode ser manipulada algebricamente, o que é realizado com o comando `Normal[series]`, que faz a conversão e a torna operável com o desprezo do erro de truncamento.

Para evitar reescrever expressões algébricas e torna-las passíveis de manipulação, basta utilizar o comando `Normal [%]`, que recupera a última saída, conforme mostra a Tabela 2.

In[2]:= Normal	
Out[2]=	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + O(x^4)$

Tabela 2: Comando recuperador.

No tratamento dos sistemas lineares que fazem parte da geração das EFHs, o comando `Solve[eqns, vars]` resolve uma ou conjunto de equações “*eqns*” para as variáveis “*vars*”.

### 3.2 Roteiro para geração de EFH no Mathematica®

O processo de geração de uma coleção de operadores similares à Equação (1) descrito no item 2 foi utilizado em Rigitano (1999), cujas manipulações algébricas foram realizadas à época em caráter manual demandando tempo razoável.

Como isso é um obstáculo para experimentações mais diversificadas, passa-se ao aprimoramento do processo com o uso do aplicativo Mathematica®, o que remove a dificuldade apontada, com substancial simplificação e redução do tempo dedicado às manipulações algébricas.

Assim sendo, apresenta-se a resolução do problema do item 2.1 através dos passos descritos nas Tabelas 3 e 4, que são auto-explicativos.

Expressão Finita Hermitiana que se quer gerar - vide Equação (2):
$a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + a_1y_1 + b_0y_0'$
Por facilidade, escreva a EFH na sintaxe do Mathematica®:
$a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + a_1y_1 + b_0y_0'$
Desenvolva os pontos pivotais em série de Taylor, multiplicando os índices por h. Fixe n = (nº de termos-1) e simplifique a expressão. Para este exemplo → n = 3.

Tabela 3: Roteiro para gerar EFHs no Mathematica® - Continua na próxima página..

A redação dos desenvolvimentos e sua simplificação tomam o aspecto:
<pre> a[-1]y[-1] + a[0]y[0] + a[1]y[1] + b[0]y[0]' FullSimplify[Normal[Series[...]]] </pre>
Tecla Enter e será apresentado o resultado:

a	
b	
	Separe as n partes que contém termos comuns e o erro R:
a	
	$\frac{1}{2} h^2$
	$-\frac{1}{6} h^3$
	Anule as potências mais altas possíveis em h e resolva o sistema:
So	
h	
	$\frac{1}{2} h^2$
	O resultado apresentado será:
	Substitua os parâmetros obtidos em R e simplifique:
a	
	O resto R apresentado será:
	$-\frac{1}{6} h^2 b$

Tabela 4: Continuação do roteiro para gerar EFHs no Mathematica®.

## 4 ESTUDOS DE CASO

Neste tópico são apresentadas as soluções numéricas obtidas através de EFHs de dois problemas classicamente tratados na forma analítica nos textos de Resistência dos Materiais.

Para os estudos de caso, foram geradas duas expressões apropriadas de modo a contemplar seis termos, sendo conhecidas cinco informações pivotais, o que levou a sistemas de uma equação a uma incógnita, conforme proposta do trabalho.

No primeiro exemplo obteve-se solução exata e no segundo um resultado com boa aproximação.

### 4.1 Primeiro estudo de caso

Seja o problema da determinação da elástica na extremidade de uma viga em balanço mostrada na Figura 1, quando submetida a uma ação concentrada  $P$ , sendo conhecidos o módulo de elasticidade  $E$ , o momento de inércia  $I$  e o comprimento  $L$ .

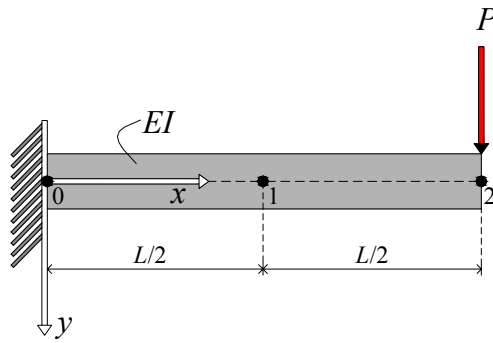


Figura 1: Viga em balanço

A equação diferencial regente do problema segundo Hibbeler (2006), apenas para citar publicação mais recente, é dada por:

$$y'' = \frac{M}{EI}, \quad (12)$$

na qual na qual  $y''$  é a segunda derivada da linha elástica  $y$ .

Considerando como incógnita o deslocamento vertical do ponto 2, sabendo-se que no engaste o deslocamento e a tangente à elástica são nulos, obtendo-se ainda as segundas derivadas nos pontos 0, 1 e 2 com o emprego da Equação (12), tem-se os valores pivotais que se encontram reunidos na Tabela (5).

$y_0 = 0$	$y_0' = 0$	$y_0'' = \frac{PL}{EI}$
		$y_1'' = \frac{PL}{2EI}$
$y_2 = ?$		$y_2'' = 0$

Tabela 5: Valores pivotais de interesse para a viga em balanço.

Observando os valores pivotais da Tabela 5 e tendo em conta a argumentação de exprimir o problema por meio de uma equação a uma incógnita, é fácil presumir que a expressão genérica para contemplar a inserção de cinco valores pivotais para obter a incógnita  $y_2$ , ou seja, a EFH apropriada no formato da Equação (1), é dada por:

$$a_0 y_0 + a_2 y_2 + b_0 y_0' + c_0 y_0'' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' = 0. \quad (13)$$

Aplicando-se o roteiro descrito nas Tabelas 3 e 4, obtém-se:

$$y_0 - y_2 + 2h y_0' + h^2 \left( \frac{2}{3} y_0'' + \frac{4}{3} y_1'' \right) - \frac{2}{45} h^2 y_0''' + \dots = 0, \quad (14)$$

na qual se observa a nulidade do parâmetro  $c_2$ .

Substituindo na Equação (14) os valores pivotais da Tabela 5, com  $h = L/2$ , tem-se finalmente:

$$y_2 = \frac{PL^3}{3EI}, \quad (15)$$

sendo que, para o caso, a parcela do resto desaparece uma vez que  $y_0''' = 0$ , cumprindo-se

observar que essa resposta coincide com a solução exata da Equação (12) obtida por integração direta.

## 4.2 Segundo estudo de caso

Seja o problema mostrado na Figura 2, uma viga bi-apoiada para a qual se quer determinar a carga crítica de flambagem  $P_{cr}$ .

São fornecidos o módulo de elasticidade  $E$ , momento de inércia  $I$  e o comprimento  $L$ .

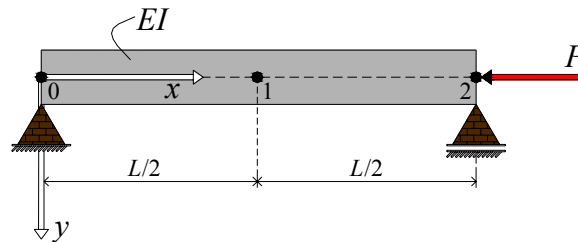


Figura 2: Viga bi-apoiada

A equação diferencial regente que governa o comportamento da estrutura, conforme Hibbeler (2006) e inúmeros outros autores, é dada por:

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0, \quad (16)$$

na qual  $y$  é a linha elástica e  $y''$  sua segunda derivada, equação que pode ser expressa mais convenientemente para o propósito do trabalho como:

$$y'' = -\frac{P}{EI} y. \quad (17)$$

Sabendo-se que os deslocamentos verticais dos pontos 0 e 2 são nulos e que as segundas derivadas nos pontos 0, 1 e 2 são expressas pela Equação (17), têm-se os valores pivotais que estão reunidos na Tabela 6.

$y_0 = 0$	$y_0'' = 0$
$y_1 = ?$	$y_1'' = -\frac{P}{EI} y_1$
$y_2 = 0$	$y_2'' = 0$

Tabela 6: Valores pivotais de interesse para a viga bi-apoiada.

Examinando os dados da Tabela 6, depreende-se que a expressão genérica que contempla esses seis valores pivotais no formato da Equação (1) é dada por:

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + c_0 y_0'' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots = 0. \quad (18)$$

Aplicando-se novamente o roteiro descrito na Tabela 3, obtém-se a EFH:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 - \frac{h^2}{12} (y_0'' + 10y_1'' + y_2'') - \frac{h^6 y_0^{VI}}{240} + \dots = 0, \quad (19)$$

que possui erro de aproximação  $O(h^6)$  na sexta derivada.



Substituindo os valores pivotais da Tabela 6 na Equação (19), ou seja na EFH apropriada e sendo  $h = L/2$ , sem considerar o resto tem-se que:

$$y_1 \left( -2 + \frac{10PL^2}{48EI} \right) = 0, \quad (20)$$

cujas soluções não triviais implicam em:

$$P_{cr} = \frac{9,6EI}{L^2}, \quad (21)$$

cumprindo-se observar um erro relativo de 2,8 % quanto ao valor exato, que é a carga de Euler dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (22)$$

## 5 CONCLUSÕES

O processo proposto neste trabalho constitui-se numa sistematização para exprimir, em tese, a solução de qualquer problema para o qual se disponha de uma tabela de informações pivotais (por exemplo, valores da função envolvida e de suas derivadas de ordem superior), por meio da redação de uma equação a uma incógnita, que fornece ainda um erro de aproximação  $R$  explícito.

São tratados dois casos clássicos de Resistência dos Materiais retirados de Laier e Barreiro (1983), para os quais constata-se forte redução da ordem do sistema de equações lineares, intrínseco à solução através do processo tradicional de diferenças finitas, pautadas por subdivisões de malha para refinar os resultados.

Para efeito comparativo, no primeiro estudo de caso, obteve-se por meio da EFH a resposta exata para deslocamento na extremidade da viga, sendo que, no citado trabalho, ela foi obtida com erro de relativo de 5%, porém resolvendo-se um sistema de cinco equações a cinco incógnitas.

Já no segundo caso, a carga crítica obtida via EFH apresenta erro relativo de 2,8 % quando comparado ao valor de Euler, sendo que no trabalho de Laier e Barreiro (1983) encontra-se uma resposta com erro relativo de 9 % à custa da solução de um determinante de ordem seis.

Considera-se um passo importante para continuidade da pesquisa o aperfeiçoamento do processo de geração das EFHs através de programação mais sofisticada no ambiente do Mathematica<sup>®</sup>, a exemplo do já realizado para diferenças finitas tradicionais que consta em Mikhailov (1994), o que certamente facilitará e permitirá maior de experimentações.

## REFERÊNCIAS

- A.C. Rigitano. Contribuição para a determinação de matrizes de rigidez e vetores de ações nodais equivalentes com o emprego da formulação hermitiana livre. *Tese - Escola de Engenharia de São Carlos, USP*, 1999.
- A.C. Rigitano e H.M. Bottura. Uma alternativa para refinamento da solução numérica em problema de mecânica das estruturas com o emprego de operadores de diferenças finitas apropriados. *Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering* 22, 2001.
- J.E. Laier e J.C. Barreiro. *Complementos de resistência dos Materiais*. Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1983.
- L. Collatz. *The numerical treatment of differential equations*, 2. ed. Berlin: Springer Verlag,

- 1966.
- M.D. Mikhailov. Finite difference method by using Mathematica. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, Suppl. 1. pp. 375-379, 1994.
- M.G. Salvadori e M.L. Baron. *Métodos numéricos aplicados à engenharia*. Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais, 1956.
- R.C. Hibbeler. *Resistência dos materiais*, 5<sup>a</sup> Ed. Pearson Prentice Hall, 2006.
- S. Wolfram. *The Mathematica Book*, 5<sup>th</sup> ed. Wolfram Media, 2003.
- W.D. Pilkey and W. Wunderlich. *Mechanics of structures – variational and computational methods*. CRC Press Inc., 1994.