

OPTIMIZACION DE CALIDAD PARA LA GENERACIÓN DE MALLAS DE SUPERFICIE

Ing. Gustavo A. Correa Reina, Dr. Marcelo Javier Vénere, Dr. Pablo Lotito

PLADEMA - Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Mail to: venerem@exa.unicen.edu.ar

Keywords: Generación de mallas, backtracking.

RESUMEN

En este trabajo se propone un método basado en técnicas de optimización de la calidad de elementos, que permite obtener mallas aptas para su uso en Elementos Finitos a partir de triangulaciones arbitrarias de superficies, como las generadas con sistemas de CAD u otros métodos automáticos. El mismo es una generalización de las técnicas de optimización de calidad de mallas mediante cambios de topología e incorpora la proyección de los nuevos nodos a la superficie original para conservar la geometría.

En primer lugar se describe un criterio de calidad que tiene en cuenta no sólo la forma del triángulo sino también su tamaño comparado con el deseado para ese lugar. A continuación se generaliza la técnica de cambios topológicos de forma de analizar todas las combinaciones posibles de cambiar la malla en un subconjunto pequeño de elementos y no solo el conjunto restringido de cambios como se propone hasta ahora en la literatura. Se debe además verificar que los cambios de topología realizados no modifiquen la geometría o si lo hacen que no se cometan errores mayores a una dada cota. Finalmente se utiliza una metodología para proyectar los nuevos nodos generados a la superficie original.

Se presentan también las heurísticas utilizadas para lograr las mejoras a la malla original como así también las estructuras utilizadas para lograr una eficiente implementación de la restructuración hasta llegar a una malla lo más cercana a la deseada.

Se muestra un ejemplo simple representativo de superficies generadas con CAD y otro para el caso de superficies definidas a partir de imágenes digitales tridimensionales.

INTRODUCCIÓN

Tanto en dos como en tres dimensiones, utilizar algoritmos de optimización de la calidad de elementos, es una práctica casi obligada del proceso de generación de mallas de elementos finitos. En general en dos dimensiones basta con utilizar métodos simples que desplazan los nodos de la malla de forma de optimizar la calidad de todos los elementos que convergen al mismo, pero en tres dimensiones esta práctica no da buenos resultados (ver [1]).

Para mallas de tetraedros, uno de los algoritmos más exitosos es el propuesto en 1994 por Coupez [2], el cual se basa en una serie de cambios restringidos de la topología de la malla. Incluso Coupez utiliza este algoritmo como método de generación de mallas de volumen, aunque su costo computacional es algo elevado comparado con métodos más difundidos, como Delaunay o Frontal.

En este trabajo proponemos por un lado, utilizar esta idea para la re-generación de mallas de superficies y, por el otro, generalizar la propuesta de Coupez de analizar todas las combinaciones posibles de cambio en la topología sobre un subconjunto pequeño de elementos y no sólo sobre un conjunto restringido de cambios como el que él propone. La propuesta es una mejora al método propuesto en [3] donde se presenta un generador de mallas de superficies basado en una serie de operaciones simples sobre una triangulación existente.

El algoritmo funciona en forma iterativa partiendo de una triangulación inicial que describe la geometría de la superficie. El criterio de calidad utilizado tiene en cuenta no solo la forma del triángulo sino también su tamaño comparado con el deseado para ese lugar. Se debe además verificar que los cambios de topología realizados no modifiquen la geometría o si lo hacen que no se cometan errores mayores a una dada cota de error.

Para analizar todas las formas posibles de cambiar la topología de un dado subconjunto de elementos se utiliza la técnica de backtracking que permite recorrer el árbol de posibilidades, con estrategias de podado adecuadas para no analizar ramas que en algún momento resulta evidente no conducirán a la solución óptima.

Se muestran algunos ejemplos donde la aplicación de este algoritmo permitió generar mallas de superficie de excelente calidad. La triangulación inicial utilizada en estos ejemplos se generó con AutoCAD por un lado y por segmentación de tomografías por el otro.

1 INDICADOR DE CALIDAD

La idea es obtener triángulos lo más equiláteros posibles, para lo cual se puede recurrir a diferentes indicadores. Uno de los más aceptados en la literatura esta basado en la relación entre el área y el perímetro, que por supuesto es máximo para el triángulo equilátero (ver [4]). En realidad a efectos de que el indicador sea adimensional, se utiliza la relación entre el área y el perímetro al cuadrado.

En nuestro caso utilizamos un indicador similar que utiliza la suma del cuadrado de los lados en lugar del perímetro al cuadrado, el cual también resulta máximo para el triángulo equilátero como se muestra en la ecuación 1:

$$Q_1 = \frac{A}{\sum L_i^2} \quad \begin{array}{l} Q \text{ Calidad} \\ A \text{ Área del Triángulo} \end{array} \quad (1)$$

Por razones de eficiencia computacional (evita evaluar las raíces cuadradas), utilizamos el siguiente indicador equivalente, como se muestra en la ecuación 2:

$$Q_2 = \frac{A^2}{\sum L_i^4} \quad \begin{array}{l} Q \text{ Calidad} \\ A \text{ Área del Triángulo} \end{array} \quad (2)$$

En la figura 1 se muestra como varían estos indicadores al mover uno de los vértices del triángulo en forma perpendicular al otro lado.

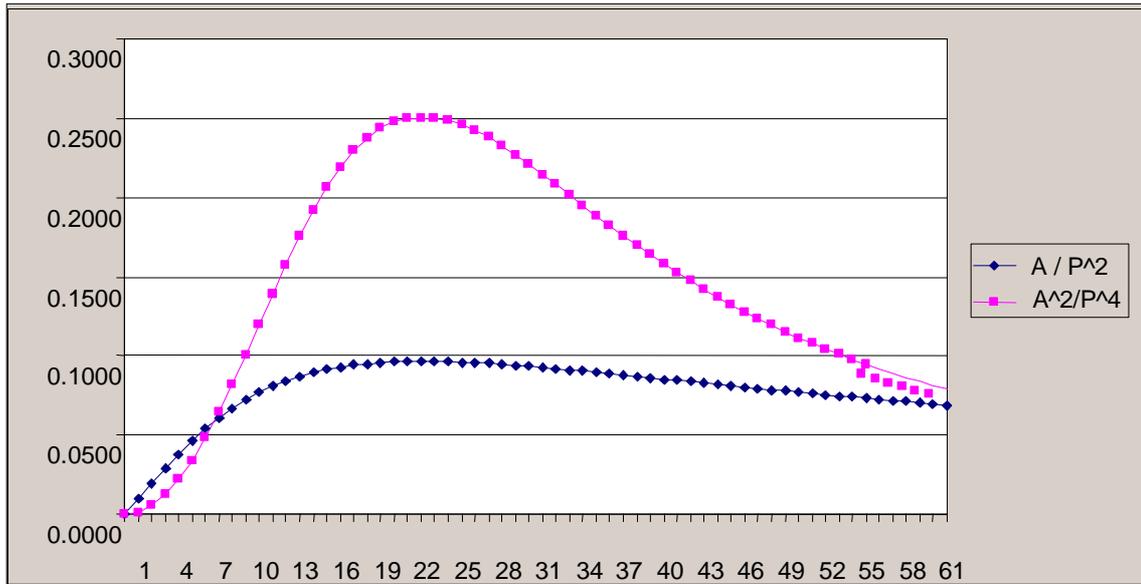


figura 1

Este indicador solo tiene en cuenta la forma del elemento y no su tamaño. Si la malla se utilizará para cálculo por elementos finitos, el control del tamaño del elemento es imprescindible. Este tamaño requerido no tiene por que ser uniforme y en general se lo debe considerar una función del espacio $H_{ref}(X, Y, Z)$. En [3] se propone una forma de incorporar esta restricción a través de un indicador de calidad modificado.

Se calcula para ello un indicador de tamaño del tipo, como se muestra en la ecuación 3:

$$\begin{aligned} H &= \text{Perímetro}/3 \\ Q_h &= H/H_{ref} \\ Q_h &= \min(Q_h, 1/Q_h) \end{aligned} \quad (3)$$

Es decir, Q_h tendrá un valor en el rango [0.0, 1.0], siendo 1.0 para el caso en que el tamaño promedio de los lados es exactamente el tamaño deseado para el elemento.

Es posible utilizar variantes de esta idea, como por ejemplo usar el tamaño mínimo o máximo de lado en lugar del promedio, o elevar a alguna potencia mayor que uno a este indicador para aumentar el impacto de tamaños demasiado chicos o grandes.

El indicador de calidad final utilizado será la multiplicación del de forma y el de tamaño mostrado en la ecuación 4:

$$Q = Q_2 * Q_h \quad (4)$$

2 ESPECIFICACION GENERAL DEL ALGORITMO

Cabe aclarar el uso de algunas estructuras de datos y procedimientos específicos para entender cómo funciona el algoritmo propuesto.

La primera es que la superficie original a reestructurar se encuentra en un Octree, esto es porque luego se buscarán los vértices más cercanos a uno dado y esta estructura es muy eficiente para tal operación.

La segunda es que se ha creado una jerarquía orientada a objetos, en la cual los vértices conocen a los triángulos de los cuales son parte y viceversa, entre otras cosas.

El algoritmo es iterativo, se va reestructurando la superficie por clústeres, pero la superficie original (de ahora en más **SupO**) nunca se modifica, se tiene otra paralela que originalmente es una copia de la primera (de ahora en más **SupR**) y ésta es la que se va modificando, se usa la original para ir comparando la optimizada con la original.

Y por último, al principio del algoritmo cuando se tienen ambas superficies, se colocan los triángulos de la **SupR** en un AVL (árbol binario auto-balanceado), el cual está ordenado por nuestro indicador de calidad.

El algoritmo se puede resumir en el siguiente pseudocódigo.

- Hasta que no hayan triángulos en el AVL
 - Tomar el peor triángulo del AVL.
 - Formar un clúster por alguno de los criterios elegidos para esta iteración, al cual llamaremos **CluO**.
 - Reestructurar los posibles **CluO** por los dos métodos propuestos en este trabajo, cambio de topología (backtraking) e inserción de un punto medio.
 - § De los clústeres reestructurados se toma el de mayor calidad, al cual llamaremos **CluR**.
 - § Si la calidad de **CluR** es mayor que **CluO**
 - Se reemplaza el **CluO** por **CluR** en **SupR**.
 - Se eliminan los triángulos de **CluO** del AVL.
 - Se agregan los triángulos de **CluR** en el AVL.
 - § En caso contrario (la calidad de CluR no es mayor que la calidad de CluO)
 - Se elimina al triángulo que dio origen al clúster del AVL, ya que de ese triángulo no se puede mejorar nada.

A continuación se discuten las distintas formas de confeccionar los clúster.

3. 1 FORMACION DE CLUSTERS

Como se mencionó previamente, utilizamos tres formas distintas para armar un clúster. La diferenciación en su construcción básicamente se define por los elementos que desencadenan el análisis de la malla, es decir, por triángulos, por lados o por los vértices de la misma.

- *Por Triángulo:* Hay dos modalidades. Una de ellas consiste en tomar un sólo triángulo, mientras que la otra modalidad, toma un triángulo y todos sus vecinos por lado (ver figura 2).

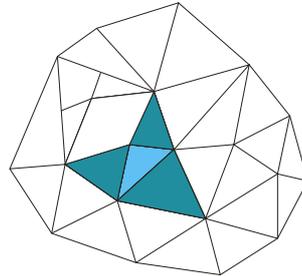


figura 2

- *Por Lado:* Se toma un par de vértices de un triángulo y el clúster resultante son los triángulos que contengan ese par de vértices (ver figura 3).

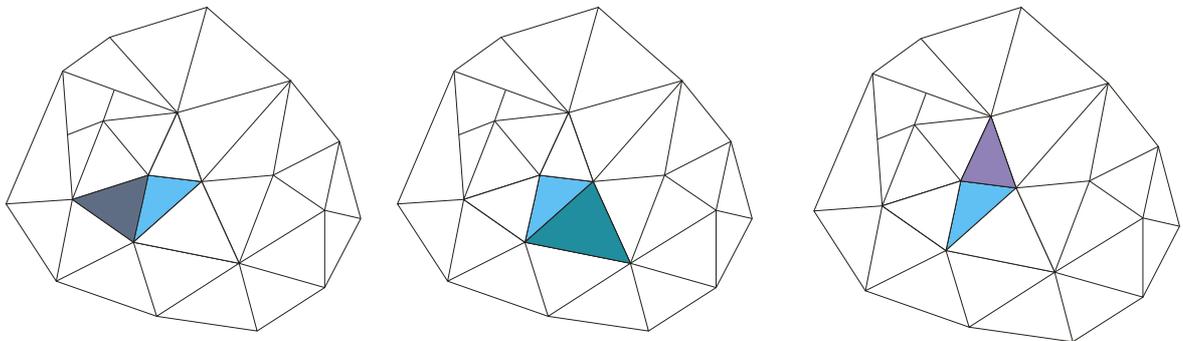


figura 3

- *Por Vértice:* Se toma un vértice y se tira de él arrastrando todos los triángulos que contengan ese vértice. (ver figura 4)

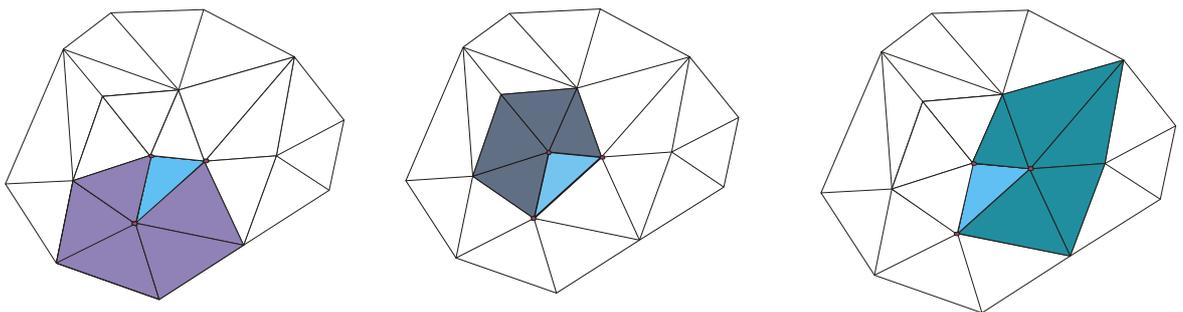


figura 4

En el ejemplo presentado en la figura 4, se muestran las tres posibilidades de formación de clústeres tomando cada uno de los vértices el triángulo elegido, a fin de clarificar el concepto planteado y tener una mayor legibilidad.

4. ALGORITMOS DE RESTRUCTURACION

Se proponen dos formas de reestructurar un clúster: mediante un cambio de topología o por medio de la incorporación de un punto central al clúster.

4. 1 CAMBIO DE TOPOLOGÍA

El concepto aplicado para cambiar la topología se basa en el análisis de todas las posibilidades de formación de triángulos a partir de los vértices del contorno del clúster. Para ello, se utiliza un algoritmo tipo backtraking, el cual permite recorrer eficientemente el árbol de posibilidades que se generó.

El backtraking toma un conjunto ordenado de vértices y procede al análisis de sus elementos en un sentido anti-horario (ver figura 4), trabajando de la siguiente manera:

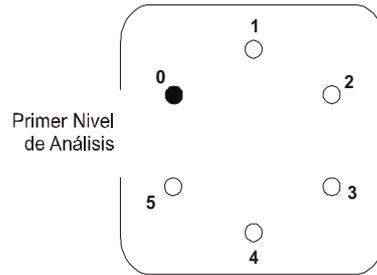


figura 5

En el primer paso, se reciben un conjunto de puntos y se elije uno como punto de partida para hacer un triángulo. Se hará un triángulo entre el punto 0, 1 y 5, eliminándose el punto 0 y entrando de nuevo al backtraking con todos los puntos menos el 0.

Se muestra a continuación, en la figura 6, como sigue operando el backtraking para formar todos los triángulos.

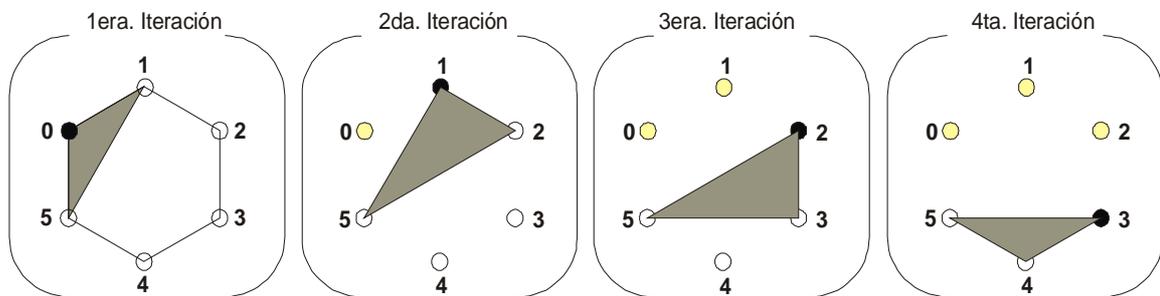


figura 6

En la primera rama del backtraking habremos formado todos los siguientes triángulos, los cuales se pueden apreciar en la figura 7.

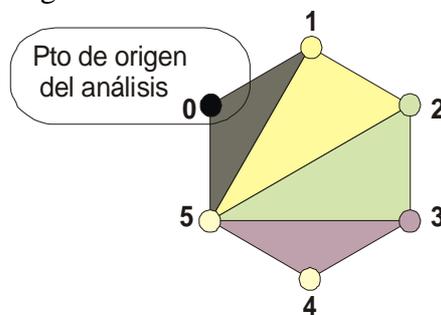


figura 7

Luego de haberse completado el análisis con el punto 0, el backtraking volverá hacia atrás y seguirá probando con otros puntos (ver figura 8).

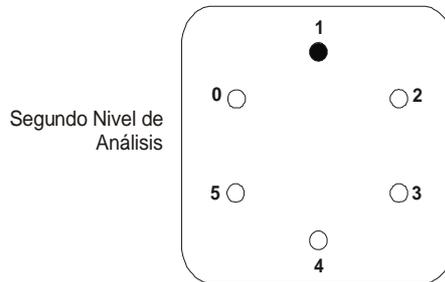


figura 8

En este segundo nivel (ver figura 8), se tomará el punto 1 como origen y se empezará todo

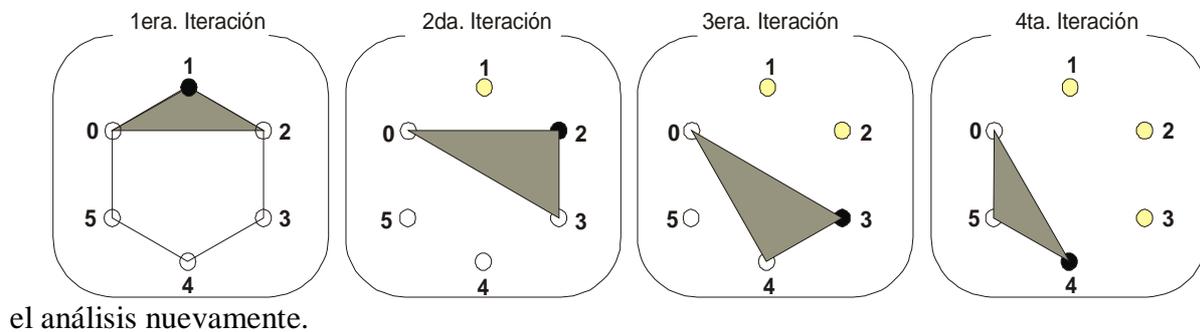


figura 9

Al finalizar el análisis presentado en la figura 9, se habrán formado los triángulos tales como se pueden apreciar en la figura 10.

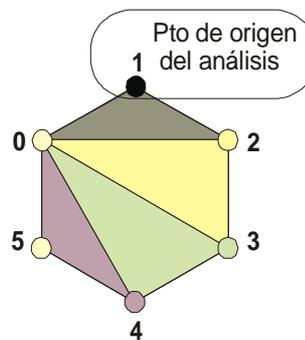


figura 10

A simple vista, parecería que éste método forma todos los triángulos con un punto a la vez, sin embargo, hay que tener en cuenta que cuando se termina con el análisis de un punto en particular, se devolverá dicho punto al conjunto y se procederá con el siguiente reanudando el respectivo análisis. De ésta forma, se asegura de que se analicen todas las posibles combinaciones de triángulos entre los puntos dados.

Para ejemplificar lo anteriormente dicho, suponemos que se está en el segundo análisis con el punto 1. Una vez que se han creado todos los triángulos, el backtraking intentará probar otras combinaciones.

Por ejemplo, otra combinación de triángulos posible sería la presentada en la figura 11.

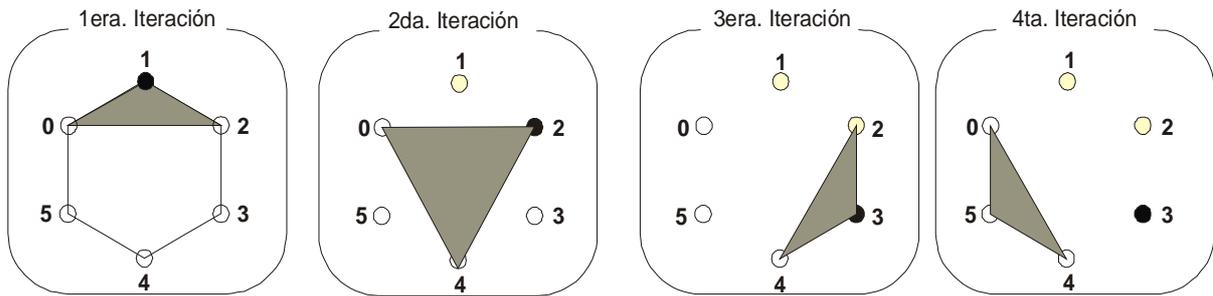


figura 11

El nuevo clúster que quedaría en definitiva sería el presentado en la figura 12.

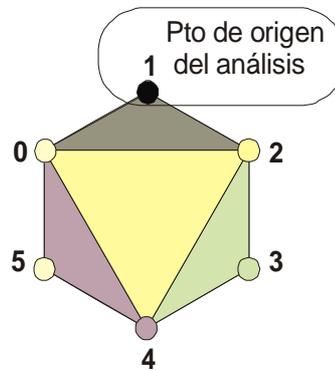


figura 12

4. 2 INSERCIÓN DE UN PUNTO

Una vez obtenido el clúster original, si seguimos refiriéndonos sobre el ejemplo planteado, se procederá a su proyección sobre cada uno de los planos cartesianos, tal como muestra la figura 13.

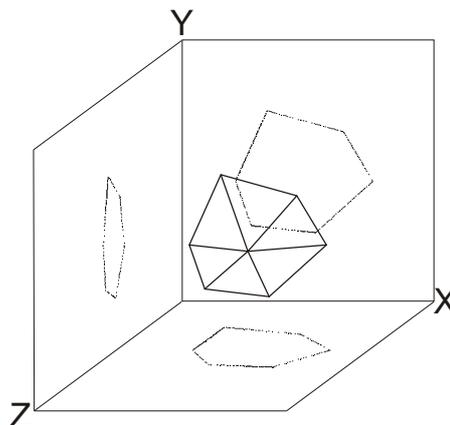


figura 13

Cada proyección nos dará como resultado un plano. A dicho plano se le realizará una evaluación de su superficie, y aquella que resulte ser la mayor, será la utilizada para llevar a cabo el cálculo del punto medio y su posterior proyección sobre la superficie original.

Cabe aclarar que, la superficie sobre la cual se proyecta, es la original; la que se había guardado en el octree.

La figura 14, muestra como corregiría el punto central del clúster este algoritmo.

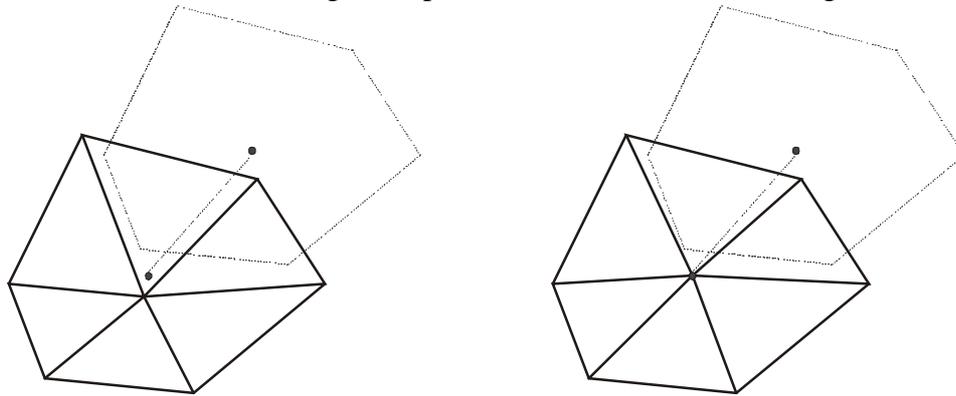


figura 14

El procedimiento a seguir para llevar a cabo la proyección sobre la superficie original es la siguiente:

- Dado el plano y el punto central a éste, se procede a localizar el vértice más cercano a éste en el octree,
- Una vez que localizado al vértice más cercano, obtenemos todos los triángulos de los cuales forma parte dicho vértice y,
- A partir de la normal al plano del punto central, se procederá a proyectar sobre cada uno de los triángulos obtenidos anteriormente, teniendo como origen el punto central y como dirección la normal a dicho plano. En el caso de que no llegara a existir intersección, se procede a utilizar los triángulos vecinos al primer conjunto de triángulos obtenidos.
- Esto prosigue de la misma forma hasta terminar con la superficie.

El punto de intersección se acepta como nuevo si no está a más de una cierta distancia y por supuesto si el clúster nuevo tiene mayor calidad que el original, la distancia en la cual se acepta el punto es un parámetro de la aplicación.

4.3 RESULTADOS

Se incluye la aplicación del algoritmo al caso de una esfera generada por revolución de un arco en AutoCAD. Tal como se muestra en la figura 15, el algoritmo remueve satisfactoriamente los triángulos agudos que se generan en el polo.

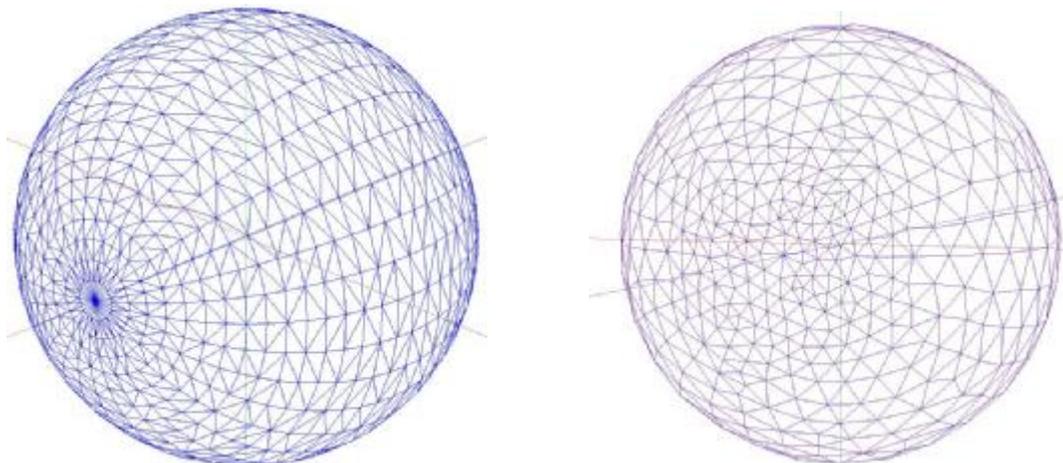


figura 15

El otro caso ejemplo corresponde a la superficie de una vejiga natatoria de un pez, generada por segmentación de imágenes digitales tridimensionales (tomografía en este caso). Como puede observarse, también en este caso aparecen triángulos que no serían aceptables en una malla a utilizarse en Elementos Finitos y que el método propuesto logra remover satisfactoriamente.

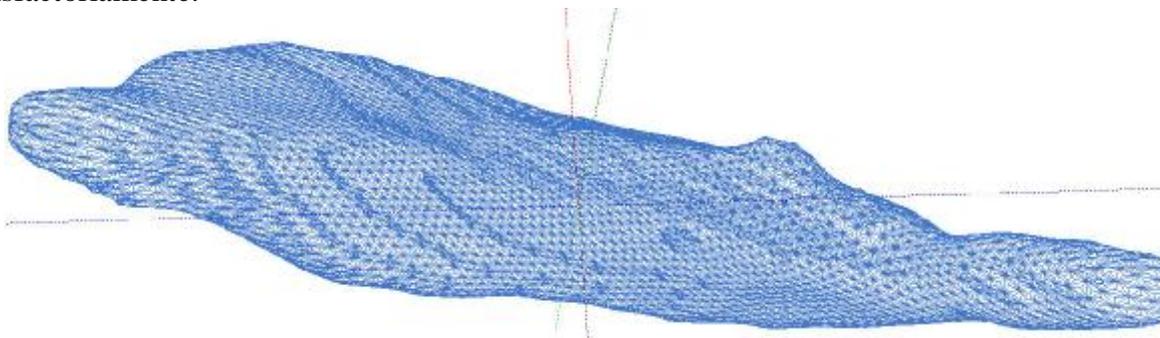


figura 16a: Superficie original de una vejiga natatoria de anchoa

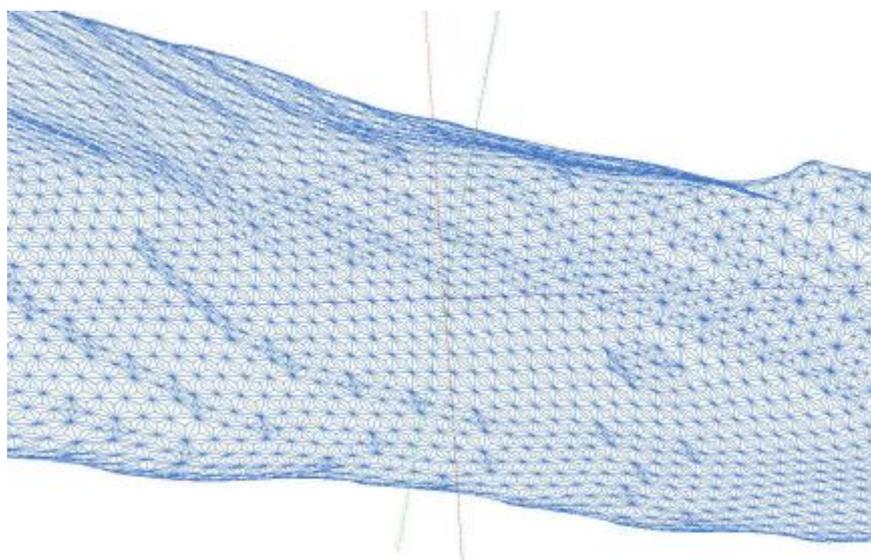


figura 16b: Detalle de la triangulación de la superficie original

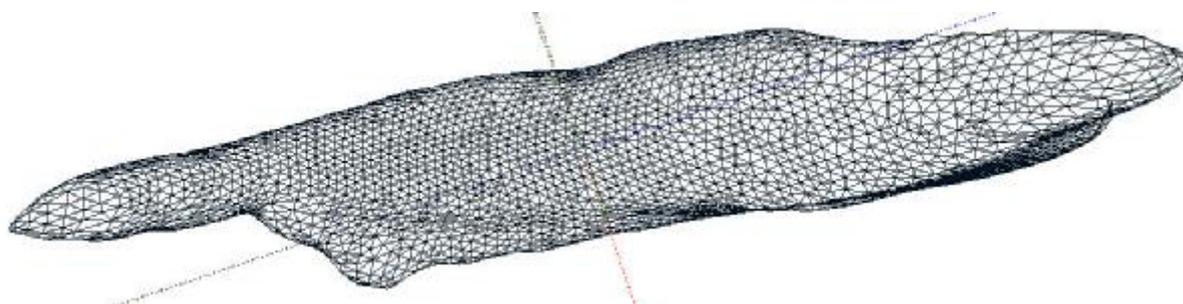


figura 16c: Malla final generada

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han propuesto algunas mejoras al concepto de generar mallas de superficies mediante cambios localizados de topología.

Por un lado, se procedió a una generalización de los cambios topológicos a analizar, realizando ahora una exploración de todas las combinaciones posibles, lo cual le da al algoritmo mucha mayor flexibilidad, permitiendo resolver situaciones que antes no eran posibles.

Y por otro lado, se incorporó la funcionalidad de proyectar los nuevos nodos que se generan sobre la superficie original, reduciendo así notablemente los apartamientos de la geometría deseada.

En la implementación computacional, fue necesario recurrir a técnicas de clasificación geométrica y ordenamiento de la calidad en un AVL a efectos de mantener el costo computacional en valores razonables. El mismo si bien es alto (y muy superior a los algoritmos de modificaciones locales propuestos hasta ahora), no resulta un impedimento práctico serio, ya que en general, las mallas se pueden generar en unos pocos minutos sobre equipos PC modernos.

6. REFERENCIAS

1. **E. Dari and G. Buscaglia**, "Mesh Optimization: How to obtain good unstructured 3D finite element meshes with not so good mesh generators", *Structural Optimization*, **8** pp.181-188.
2. **Coupez T.**, *A mesh improvement method for 3D automatic remeshing*. 4th International conference on numerical grid generation in computational fluid dynamics and related fields, págs. 615-626, 1994.
3. **M. J. Vénere, D. Arnica**, *Surface Finite Element Mesh Generation*. Presented at 4th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics. England, 1994.
4. **Gustavo C. Buscaglia and Enzo A. Dari**, *Anisotropic Mesh Optimization and its Application in Adaptivity*. Published in: *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **40** pp. 4119-4136 (1997).