

CONTROL DE LA DENSIDAD DE MALLAS PARA ESTRUCTURAS CELULARES

Hernán Balocco^a, Matías Godoy^a y Nestor A. Calvo^b

^a*Ingeniería en Informática - Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas - UNL*

^b*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería - INTEC - CONICET*

Palabras clave: Generación de Mallas, Huesos, Densidad, Voronoï, Materiales Celulares.

Resumen. En este trabajo se presenta un método para la definición automática de la densidad de nodos en mallas de estructuras trabiculares óseas y materiales similares. Se parte de un conjunto de tomografías del material. Para las zonas de interfaz se utiliza como densidad un valor constante referido a la propia resolución tomográfica, mientras que se realiza una desdensificación rápida pero suave, tanto hacia el interior del sólido como hacia las zonas vacías. Con ello se puede limitar fuertemente la cantidad de nodos generados y obtener mallas de tamaño razonable. El proceso se basa en el tamaño de las esferas de Voronoï de los nodos impuestos, el radio de cada esfera define la densidad a utilizar en las inmediaciones del centro. Con este método se obtienen mallas de tamaño manejable y calidad aceptable.

1. INTRODUCCION

Los métodos numéricos de cálculo para ingeniería requieren una subdivisión del dominio en elementos geométricos simples. El dominio así subdividido recibe el nombre de malla. Por regla general, y para evitar determinados problemas numéricos, se suelen utilizar mallas conformes, donde dos elementos se enfrentan cara contra cara sin uniones en T ni fisuras. Los elementos son polígonos o poliedros simples, en general triángulos o tetraedros, pero también se utilizan mucho los cuadriláteros y cubos y, a veces, otros elementos de transición o expansión como prismas triangulares y pirámides cuadrangulares. La calidad de una malla se mide según dos aspectos, uno es la forma de los elementos y el otro el tamaño. Los elementos pueden estar ligeramente deformados, pero deben permitir un mapeo suave y continuo de las ecuaciones, sin provocar el mal condicionamiento de las matrices que se utilizan para hacerlo. Esto se traduce en que la forma de los elementos no debe distar demasiado de la forma canónica o regular, existiendo abundantes formas de medir la distorsión. Además, los elementos deben tener un tamaño acorde a la precisión requerida en cada región del dominio, la densidad de la malla es tanto mayor cuanto mayor sea la precisión necesaria en esa región, pero la densidad de nodos o elementos no puede ser demasiado grande, pues debe permitir el cálculo en tiempos razonables y con una cantidad razonable de recursos computacionales. En los primeros tiempos las mallas eran simples subdivisiones en rectángulos o triángulos de forma estructurada. En una malla estructurada cada nodo está rodeado por la misma secuencia de elementos (excepto, obviamente, en la frontera) de modo que se puede representar la malla con información numérica simple: para cada nodo hay un nodo posterior y uno anterior en cada dimensión (Filippone, 2003) (Thompson, 1996). Las mallas estructuradas cayeron en desuso. En primer lugar no son fácilmente aplicables a geometrías complejas, pero además la conformidad obliga a asignar a toda la malla una densidad más o menos uniforme, con lo que un problema como los que actualmente se atacan requeriría muchos más elementos que los manejables en una PC estándar o un modesto cluster de máquinas en paralelo.

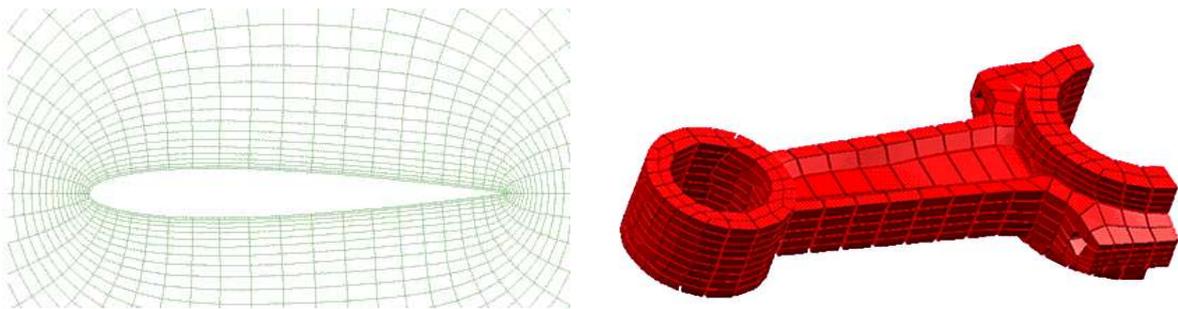


Figura 1: Izquierda: Malla estructurada. Derecha: Malla estructurada por bloques.

Actualmente se utilizan las mallas no-estructuradas, con densidad variable. Las estructuradas se reservan sólo para problemas con pocos elementos o para casos especiales como la capa límite de un fluido alrededor de un objeto y las mallas estructuradas por bloques aún se utilizan cuando se requieren exclusivamente hexaedros. En los problemas de visualización de datos científicos o médicos también se utilizan mallas, pero en general estructuradas. El ejemplo mas notable es la voxelización de los datos tomográficos, donde los elementos tridimensionales de información (vóxels) son pequeños cubos y en cada uno se considera que la variable espacial es constante.

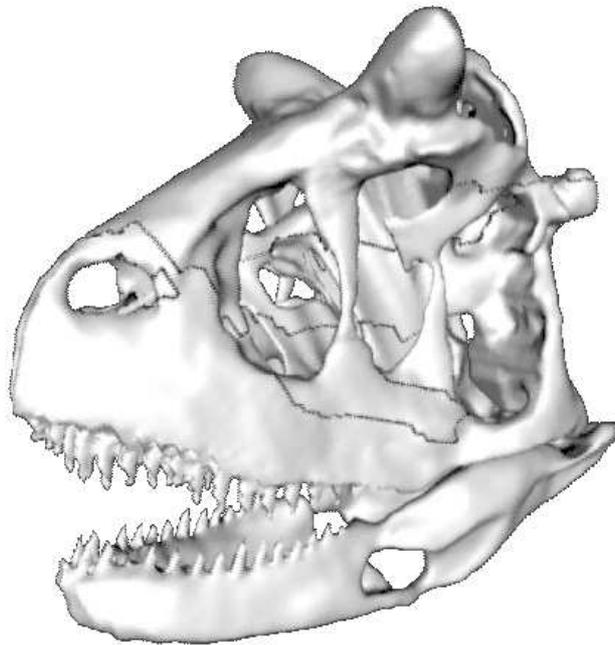


Figura 2: Cráneo del Carnotaurus Sastrei.

La imagen anterior corresponde al cráneo de un dinosaurio argentino (Cisilino et al., 2003), fue obtenida a partir de imágenes tomográficas tratadas, seguido por el mallado y reconocimiento automático de la intrincada frontera ósea y finalmente aplicando un suavizado de la superficie. La malla fue a su vez utilizada para el cálculo de la resistencia de ciertas subestructuras y la deducción de algunas características del comportamiento del animal.

Las nuevas aplicaciones de visualización y modelado están empezando a tratar problemas mucho más complejos y por lo tanto se requiere mudar a mallas no estructuradas por las razones antes expuestas. Los problemas que requieren precisión variable, ya sea para cálculo o para visualización, a veces sólo son tratables si se generan las mallas con un enorme gradiente de densidad, pasando enseguida de una discretización muy fina, en las zonas de interés, a una muy gruesa en las lejanías.

Un ejemplo de lo antedicho se muestra en la siguiente figura, que es una discretización parcial de la cuenca del río Salado para estudiar el escurrimiento de las aguas superficiales. Es una superficie de unos 33000 km² con una precisión del orden de los 100 m en los ríos. La geometría es lo suficientemente compleja como para impedir el uso de mallas estructuradas, pero aún con una malla no estructurada y una densidad constante de unos 5000 m² por cada triángulo se tendría una malla de unos 7 millones de triángulos.

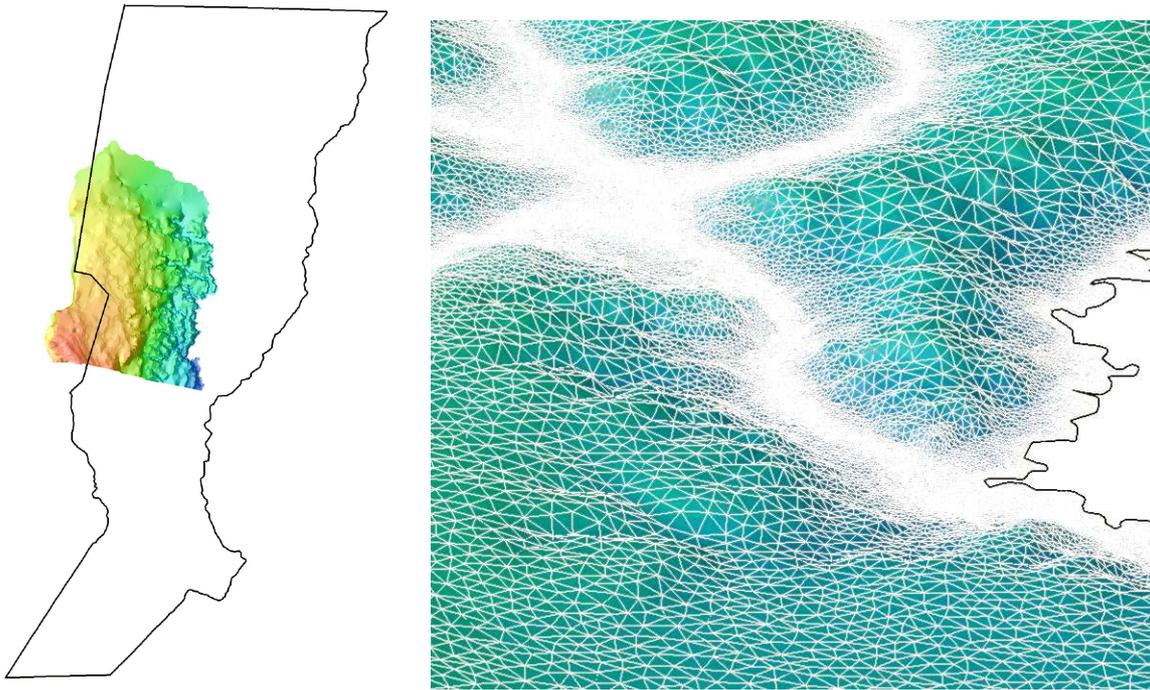


Figura 3: Malla parcial de la cuenca del río Salado.

El problema consiste definir en forma sencilla el tamaño de elementos que se requiere en cada zona del dominio. Los ríos se discretizan con la densidad requerida, al igual que las fronteras lejanas, donde se impone una densidad mucho menor. La densidad se define de acuerdo a una función $h(x)$ que mide la distancia esperada entre nodos vecinos en cada punto del dominio.

En general, se impone la densidad en las fronteras y datos y el generador de mallas interpola en el interior. Para evitar la linealidad en la interpolación se pueden utilizar algunas técnicas estándar. Un método consiste en utilizar una malla gruesa de referencia, cuyos nodos tienen h definido, la densidad de la malla en construcción se interpola linealmente en el interior de la malla de referencia. La malla de referencia puede ser una malla *ad-hoc*, que envuelva a la malla deseada o bien puede ser la malla obtenida de una simple triangulación de los datos y algunos nodos impuestos en el interior, que solo sirven para definir $h(x)$ en dichos puntos.

En el ejemplo de la cuenca del Salado se utilizó esta última técnica, “desrefinando” desde los ríos, con un nodo cada 100 m, hacia unas líneas impuestas que los rodean, con una densidad aproximada de un nodo cada 1300 m. Con esa técnica se logró llegar a límites razonables (1.7 millones de elementos) que pudieron ser adecuadamente procesados.

Hay otras técnicas de control de la densidad interior de la malla durante el proceso de generación, pero todas requieren de la intervención del usuario para un ajuste fino del tamaño de los elementos deseado en cada zona. En 3D, este proceso es mucho más complicado y no hay herramientas capaces de hacer eso salvo para situaciones muy sencillas.

A continuación se muestra un par de ejemplos donde se utilizó esa misma técnica en 3D.



Figura 4: Mallas intermedia y final de una cámara de combustión.

El primero es la cámara de combustión de un motor, donde se quería estudiar el flujo de gases alrededor de las válvulas. Para controlar la densidad se utilizó un cilindro con tapas en el interior de la cámara y líneas poligonales también “desrefinadas”, en el interior de los tubos de admisión y escape. Las líneas sobrepuestas en la figura izquierda resaltan algunos límites visibles de estas estructuras de control, mostrando su efecto sobre la malla primaria: la triangulación de los nodos de la frontera y los puntos de control de h . A la derecha se puede ver la malla final con el resultante gradiente de densidad.

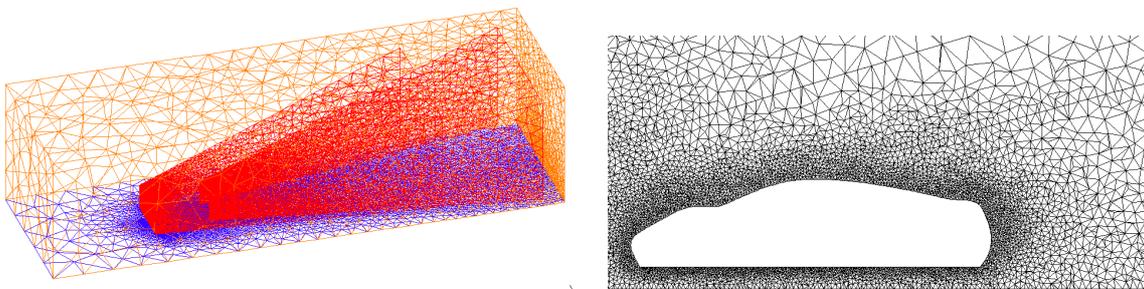


Figura 5: Mallas de control y corte central de la malla 3D para el flujo de aire alrededor de un vehículo.

En éste segundo ejemplo, las mallas interiores de control (las mallas piramidales) se impusieron alrededor del vehículo para refinar en la zona de la estela vorticiosa que se pretendía “capturar” en el cálculo del flujo de aire. Aún en dos dimensiones, deben encontrarse soluciones alternativas, puesto que hay muchos casos en los que no pueden definirse mallas internas de control. Existen, de todos modos, algunos casos en los que se cuenta con información utilizable para definir automáticamente la densidad.

El siguiente ejemplo fue tomado de un problema dependiente del tiempo, en el que se realiza una malla nueva en cada paso de tiempo. Corresponde al cálculo de la interacción entre dos cuerpos que caen y el líquido contenido en un recipiente, con superficie libre que también debe

detectarse. La densidad de nodos se define a través de algunos resultados del cálculo, en este caso gradientes de las variables y distancia a los cuerpos.

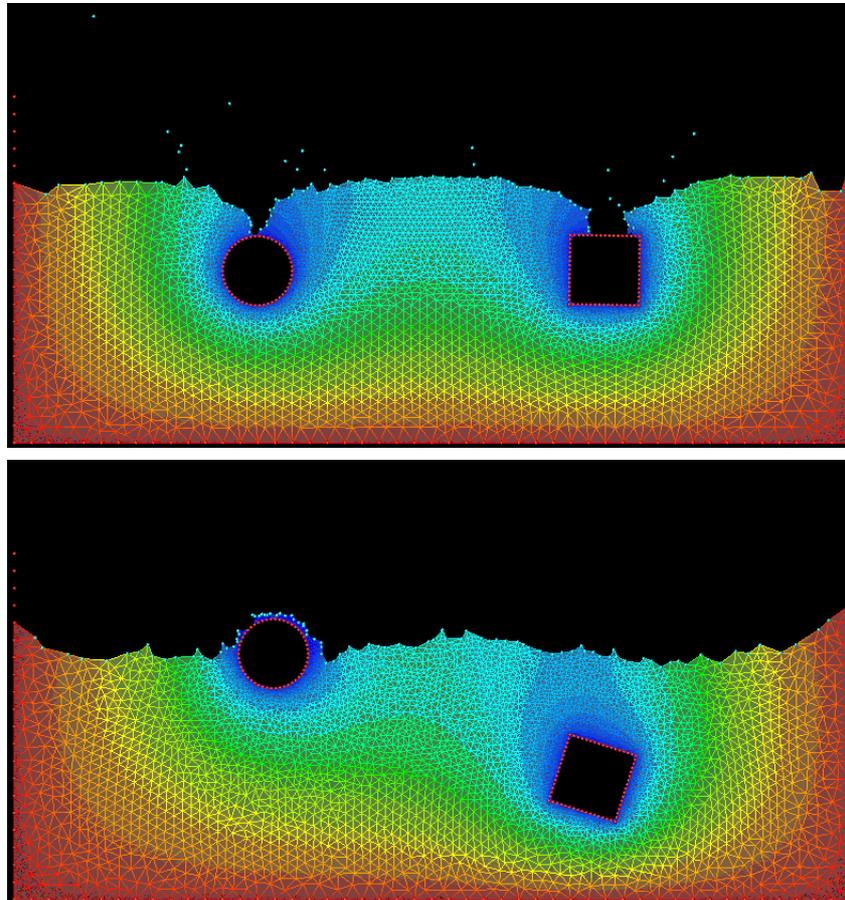


Figura 6: Mallas en dos pasos de tiempo de un problema de interacción entre sólidos boyantes y líquidos

El problema del control de la densidad de las mallas, durante el proceso de generación, cuenta con numerosas herramientas de ayuda, pero aún no es un problema de solución cerrada. A continuación se plantea un problema en el cual ninguna de las técnicas antes mencionadas resulta aplicable.

1.1. Planteo del problema actual

El presente trabajo se encaró para solucionar el problema del mallado de una estructura porosa que simula la fina estructura trabicular del tejido óseo.

El biomaterial, que simula y sirve de reemplazo para el tejido óseo fue desarrollado por la Universidad Politécnica de Cataluña, en la División de Biomateriales, Biomecánica e Ingeniería de Tejidos del Centro de Investigación en Ingeniería Biomédica.

Se pretende estudiar el flujo de fluidos en el medio poroso y calcular el arrastre y las tensiones internas generadas en la estructura sólida. Para ello se requiere de una malla tridimensional, del sólido y de los huecos, con la menor cantidad de elementos posible, pero que respete la geometría en forma razonable y cuyos elementos no estén muy distorsionados, degradando la calidad de la solución.

Se cuenta con una larga serie de micro tomografías como la que se muestra a continuación, obtenidas mediante contraste de fase con rayos X, en el *European Synchrotron Radiation Facility* de Grenoble. La imagen muestra en color claro la estructura sólida, mientras que el gris de fondo corresponde al aire. Cada píxel de la imagen representa 0.7 micrones y hay 250 imágenes de unos 1700x1700 píxeles cada una, representando cortes de 0.7 micrones de distancia entre sí.

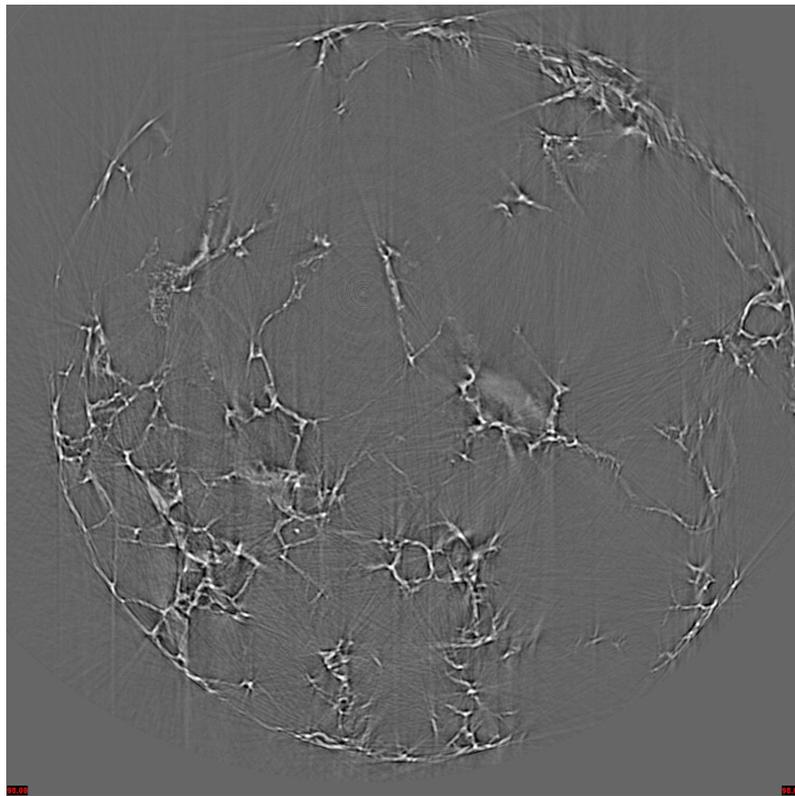


Figura 7: Micro tomografía de un biomaterial símil-hueso.

La voxelización habitual en estos casos no ha dado una malla adecuada para el cálculo, pues la cantidad de vóxeles obtenidos (orden mil millones) es mucho mayor que la capacidad de cálculo disponible. Los programas comerciales de generación de mallas que han podido probarse, tampoco han dado resultados satisfactorios (ni siquiera en 2D) por distintas razones, o no funcionan, debido a la excesiva irregularidad de las fronteras internas del sólido, o hacen mallas con una excesiva cantidad de elementos.

La solución estándar en casos similares consiste en imponer una densidad en “el infinito” y una velocidad de variación en función de la (menor) distancia del punto a la superficie geométrica dada. Esa técnica es practicable cuando es más o menos sencillo calcular la distancia a unas pocas paredes, pero en geometrías tan intrincadas como ésta, esa técnica sería extremadamente costosa en tiempo de cómputo.

Nuestro objetivo consiste en desarrollar una técnica automática para la definición de la densidad, apropiada en 2D y 3D para cualquier material compuesto o medio poroso y aún para otros casos complejos como la cuenca del Salado. La consigna es realizar el desrefinamiento violento desde la superficie del sólido hacia los huecos y hacia el interior del sólido; pero con un gradiente suave de la densidad. Para ello nos basamos en la técnica de generación que utiliza

nuestro programa y cuyos lineamientos se describen a continuación.

1.2. Generación de mallas guiada por la optimización

El generador de mallas utilizado fue realizado en el CIMEC como parte de la tesis doctoral de uno de los autores (Calvo, 2005). El programa realiza primero una triangulación (tetraedrización) del conjunto de nodos impuestos en la superficie (con densidad variable) y un conjunto de puntos interiores, agregados con la ayuda de algún programa de CAD, para el control de la densidad. En la figura se muestra el esquema en dos dimensiones.

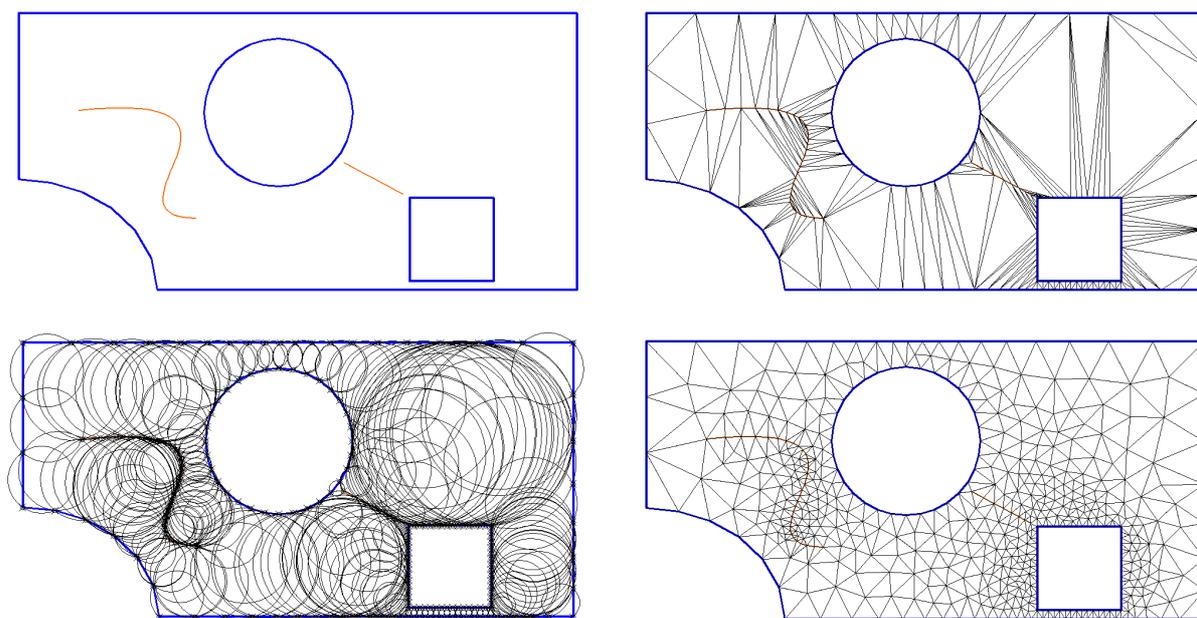


Figura 8: Esquema bidimensional del proceso de generación. Arriba: Izq: Frontera y líneas de control. Der: Triangulación primaria. Abajo: Izq: circunsferas. Der: Malla terminada.

La primera figura muestra el dominio, con dos huecos, y dos líneas interiores que proveen nodos para el control de la densidad. La densidad varía suavemente entre los valores impuestos. La segunda figura es la triangulación primaria, la tercera muestra los circuncírculos de los triángulos y por último se muestra la malla resultante del proceso que se explica a continuación.

La triangulación de Delaunay se caracteriza en que las circunsferas de los elementos no contienen nodos en el interior. La primera etapa consiste en una triangulación Delaunay de los nodos dados y la discriminación interior/externo del dominio.

Cuando una esfera es grande en comparación con la densidad de nodos requerida, se agrega un nodo nuevo en el centro de la esfera. La malla se reconstruye localmente para acomodar el nuevo nodo en la triangulación, que se mantiene Delaunay. El proceso se repite mientras haya esferas a) “grandes”, b) con su centro en el interior del dominio y c) suficientemente ($h/2$) lejos de la frontera.

Las circunsferas grandes se presentan si los nodos son muy distantes o tienen ángulos obtusos entre aristas, por lo tanto al agregar un nodo en el centro se normaliza la irregularidad. Además, por ser una triangulación Delaunay, la esfera grande no tiene nodos en el interior, hay un hueco grande en la malla, que mejora agregando un nuevo nodo en el interior. El proceso va

aumentando paso a paso la calidad de la malla y de ahí recibe su nombre: “generación de mallas guiada por la optimización” (Chew, 1997). Por un lado disminuye la distorsión de los elementos y por el otro rellena los grandes huecos hasta tener una malla con una calidad aceptable que no requiere del habitual suavizado posterior.

Para decir que una esfera es grande se utiliza una constante β que multiplica al h requerido en esa zona, si $r > \beta h_{min}$ deberá insertarse el centro como nuevo nodo. Dicha constante se elige de modo de limitar la distorsión posible de los elementos (está relacionada en forma indirecta con el máximo ángulo entre aristas del elemento) y no debe ser muy pequeña para no generar demasiados nodos. El valor de comparación h_{min} es el mínimo h de entre los nodos del elemento.

A menos que la función $h(x)$ sea impuesta (y prácticamente nunca es así) los únicos nodos con un valor conocido de h son los nodos impuestos en los datos. Los nuevos nodos deben tener un valor de h asignado para poder comparar (medir) el tamaño de las esferas. La densidad asociada a la posición del nuevo nodo se obtiene interpolando las de los nodos conocidos que definen el tetraedro que contiene al punto. El resultado se puede ver ejemplificado en la última de las figuras anteriores, donde se puede apreciar la calidad de los elementos y el efecto de los nodos de control sobre la densidad de nodos en el interior de la malla.

1.3. Control automático de la densidad

Para esta aplicación no habrá, ni puede hacerse, control de densidad mediante el agregado manual (en CAD) de nodos o mallas interiores. La estructura es excesivamente complicada como para permitir cualquier intervención manual.

Los nodos de la intrincada interfaz sólido/aire, que sirven de dato al mallador, tienen todos asignada una densidad, dada por la definición de las imágenes tomográficas. No puede permitirse la interpolación libre, pues la malla se rellenaría con nodos según esa densidad.

Hay que reducir la densidad a medida que nos alejamos de la interfaz, pero el problema es medir, de alguna manera, la distancia a la interfaz más cercana. Puede verse en la figura anterior, que el radio de las esferas mide aproximadamente esa distancia buscada.

A partir de esta observación fundamental, el camino está allanado para el desrefinamiento automático; solo resta explorar algunos de los muchos caminos posibles. Hay que definir el mecanismo de asignación de h a los nuevos nodos que se van agregando en el proceso recursivo, formando esferas totalmente interiores cuyo radio ya no es siempre la distancia a la frontera.

Se sabe que el conjunto de centros de la triangulación de los datos es una buena aproximación de la línea media (*medial-axis*) o esqueleto del dominio referencia. La línea media podría servir como línea de h impuesto, pero su densidad de nodos es mucho mayor que la requerida. Un camino más sencillo consiste en utilizar una constante de proporcionalidad: $h = \gamma r$. Solo hay que cuidar que la malla se desrefine en lugar de refinarse *ad-infinitum*, para ello hay que garantizar que $r < (\beta h \cong \beta \gamma r)$ o, equivalentemente, $\beta \gamma > 1$ para garantizar que no toda esfera será considerada grande. Se puede hacer h proporcional a r sólo cuando algún nodo del tetraedro es interfaz o frontera e interpolar en el resto.

2. PASOS DEL PROCEDIMIENTO

A continuación se describen los procedimientos individuales requeridos: el tratamiento de las imágenes/dato, los detalles relevantes del proceso de generación y el postprocesamiento de la malla para definir el material de cada elemento.

2.1. Tratamiento de imágenes y detección de la interfase

El primer paso consiste en realizar la discriminación del material: sólido/aire. La interfase proveerá un conjunto de nodos que ingresará como dato al generador de mallas.

La discriminación se realiza en las imágenes mediante un valor de gris de corte, generando imágenes binarizadas, donde el blanco representa el sólido y el negro es aire.

El valor de corte no es de elección obvia, depende del material, del equipo con que fueron tomadas las imágenes y de la resolución con que fueron almacenadas. Es una decisión técnica que debe tomarse en cada caso. Para este trabajo en particular, la decisión nos fue impuesta por los proveedores del material y las imágenes.

El segundo paso consiste en reconocer la interfase. La primera definición que surge es la topológica: un punto es frontera cuando cualquier entorno contiene puntos del sólido y del aire; adaptada a este caso, podría definirse un píxel frontera como aquel píxel sólido con algún vecino (lateral) aire.

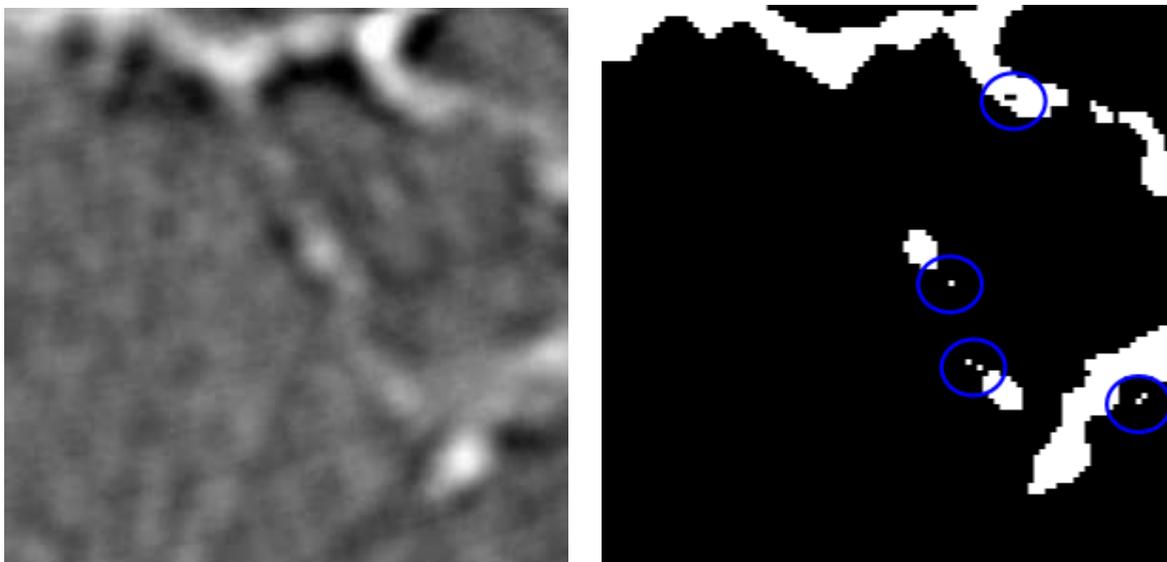


Figura 9: Porción representativa de una imagen. Izquierda: Original y Derecha: Binarizada mostrando puntos aislados.

Además de reducir el volumen sólido, esta definición deja muchos puntos aislados, tanto de sólido en el aire como a la inversa, y esto último se debe a las imperfecciones de la imagen.

En la figura puede verse una porción de imagen binarizada mostrando el problema que provocan los puntos aislados.

Los puntos aislados no son necesariamente puntos, cualquier conjunto de medida transversal unitaria (un píxel de ancho) se puede considerar aislado: un punto, una línea o una superficie.

Para binarizar las imágenes eliminando puntos aislados, se hizo un pre-tratamiento de las imágenes, pero en 3D. Consideremos el problema en dos dimensiones, como lo muestra la siguiente figura:

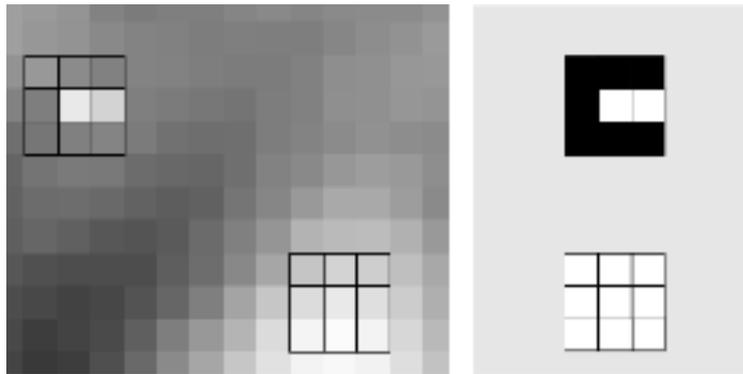


Figura 10: Arriba: punto aislado. Abajo: punto interior.

En la parte superior se muestra un píxel en el centro del kernel utilizado (3x3 en 2D, 3x3x3 en 3D) que supera el valor de corte. Si se analizan los píxeles vecinos, solo uno cumple esta condición, por lo tanto se considera como píxel aislado. En la parte inferior de la imagen se observa otro kernel, donde el valor del píxel central también supera el valor de corte; sin embargo, la mayoría de los vecinos (más que un cierto porcentaje) también se encuentra por encima del valor de corte, y por lo tanto se considera que el píxel analizado forma parte de un sólido y no es aislado.

Consideremos el pseudo-código del algoritmo utilizado para la binarización. Sea vc el valor de corte de intensidad de gris; vpc valor de intensidad de gris del píxel central; nk la cantidad de píxeles del kernel; $cont$ la cantidad de píxeles del kernel que superan vc (en ambos casos es el kernel menos el píxel central) y q una constante.

```

Inicializar la imagen binarizada en negro.
Para cada píxel
  Contar la cantidad de píxeles que superan  $vc$  en el kernel
  Poner píxel central en blanco si:
     $vpc$  es mayor que  $vc$  y  $cont$  es mayor que  $q$ 
    o
     $vpc$  es menor que  $vc$  y  $(nk-cont)$  es menor que  $q$ 

```

Con estas condiciones se evita la creación de puntos aislados.



Figura 11: Limpieza de puntos aislados con el algoritmo propuesto.

Para un kernel en 2D $nk = 8$, mientras que para uno en 3D $nk = 26$. La constante q juega un rol importante, el valor de elección parece ser $nk/2$, por justicia simétrica: para perturbar en igual medida, tanto las ondulaciones del sólido como las del aire. Pero en este trabajo, dado que los sólidos son mayormente islas en el aire (convexos) un valor en el rango $[7,11]$ (3D) da mejores resultados.

Para alimentar al generador, se considera cada píxel como un cubo de coordenadas enteras, y se transmiten los vértices de las caras de interfase. El generador requiere que los conjuntos encerrados por las interfases tengan medida finita; aún cuando sobrevivan algunos vóxeles aislados, esta definición garantiza volúmenes no nulos porque la menor cantidad de sólido o aire es un cubo.

2.2. Triangulación inicial

La triangulación Delaunay de los nodos dados se realiza insertando en secuencia aleatoria los nodos a la triangulación preexistente. Para comenzar con una, se hace un gran tetraedro que contiene al dominio. Durante la triangulación se mantiene la información de centro, radio y nodos que definen cada tetraedro/esfera.

Para cada nodo insertado se busca el conjunto de esferas que lo contienen, esferas que “fallan el test Delaunay” (Bowyer, 1981) (Watson, 1981) y por lo tanto deberán reemplazarse. La unión de esos tetraedros tiene una frontera poliédrica de caras triangulares, que contiene al nodo insertado en su interior. El nodo insertado define un nuevo tetraedro (esfera) con cada cara del poliedro antes mencionado (Shewchuk, 1999).

2.3. Generación de la malla y des-densificación

Contando con la triangulación del conjunto de nodos dados se procede a la inserción de nuevos nodos, este es el proceso de generación de la malla propiamente dicho.

Cada esfera se procesa comparando su radio contra el menor h de sus nodos. Si la esfera

es grande ($r > \beta h_{min}$) y el centro está dentro del dominio y suficientemente lejos ($h/2$) de la frontera entonces se inserta el centro como nodo nuevo de la malla. El valor de β se fija en $1.1\sqrt{d}/2$, donde d (2 o 3) es la dimensión del problema. Con esto, cuando puede considerarse h aproximadamente constante, se admiten como válidos los triángulos y tetraedros rectángulos y se restringen los ángulos muy obtusos, pero sin generar demasiados elementos.

El valor de comparación debe ser h_{min} , pues se espera que el nodo con ese valor de h tenga algún nodo, aproximadamente a esa distancia, en el interior de cualquier esfera grande que lo tenga en su superficie.

Toda esfera procesada se saca de la lista de esferas a procesar, independientemente del resultado. Cuando se agrega un nodo, las nuevas esferas se adosan a la lista de esferas por procesar y así el proceso continúa, mientras queden esferas en esa lista.

Para saber si el centro está en el dominio se busca el tetraedro que contiene al centro de la esfera, se realiza una búsqueda lineal, guiada por las funciones de forma y comenzando por la esfera grande. Se recorren las esferas por vecindades, yendo cada vez al vecino que indique la función de forma más negativa.

Si algún nodo del tetraedro es de interfase, al nodo nuevo agregado se le asigna un $h = \gamma r$, donde $\gamma = 1.1/\beta$ para garantizar el desrefinamiento. Si el tetraedro no tiene nodos en la interfase, el nodo nuevo recibe un h interpolado, como en el caso estándar. Puede pensarse que el h asignado es excesivamente grande, pues indica que el nodo puesto a distancia r de la frontera tiene un $h > r$, es decir que no se espera otro nodo entre éste y la frontera. Esto no es así puesto que el h de comparación, para saber si una esfera es grande, es el menor de entre los nodos del tetraedro. Por otro lado no podría "sincerarse" el h de los nodos interiores pues con ese valor de $\beta < 1$ no puede usarse $\gamma < 1$ sin correr el riesgo de que se produzca un refinamiento *ad-infinitum* porque toda esfera resultaría grande. Por el contrario un $\beta > 1$ estaría admitiendo tetraedros muy distorsionados. Además, los nodos agregados deben estar alejados de la interfase a una distancia mayor que el h (asumido unitario) de la misma, esto es para evitar que haya aristas de tetraedros atravesando la interfaz, lo cual está garantizado por ser una triangulación Delaunay.

2.4. Slivers

Siendo que se trabajará con una distribución cúbica de nodos dato, la triangulación Delaunay en 3D genera una inmensa cantidad de "slivers". Se denomina sliver a un tipo de tetraedro deformado de cierta manera especial: cuando dos aristas opuestas (sin nodo común) están demasiado próximas entre sí (Edelsbrunner, 2001) (Li., 2003) (Cheng et al., 1999). En cualquier triangulación Delaunay aparecen slivers cuando hay más de cuatro nodos prácticamente coesféricos y cuatro de ellos son aproximadamente cocirculares (Calvo, 2005). En el caso general aparecen casi siempre.

También podrían aparecer caps, que son tetraedros con un nodo cerca de la cara opuesta. Los caps tienen esferas grandes, que solo pueden ser Delaunay si se abren hacia el exterior del dominio, es decir que son provocados por la existencia de un nodo interior muy cercano a una cara de la frontera. Pero eso aquí se evita pues, como ya se explicó, no se ponen nodos interiores a menos de $h/2$ de la frontera.

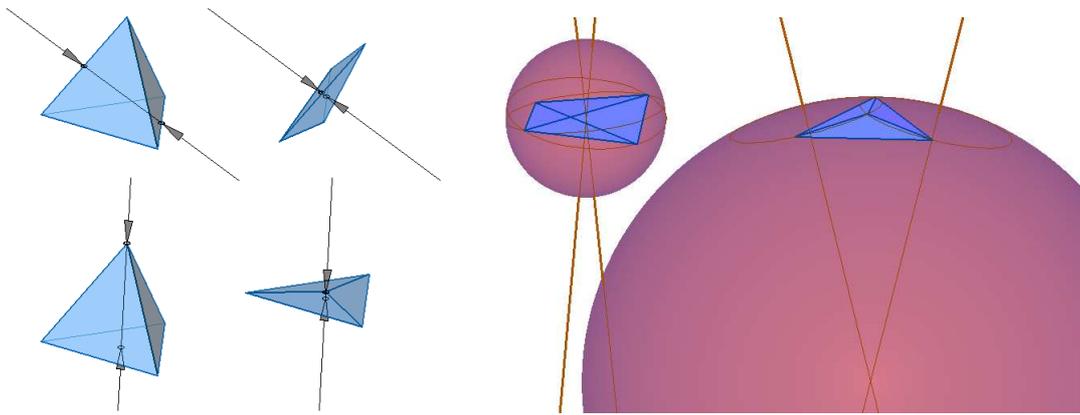


Figura 12: Deformación y Circunferas de Slivers y Caps.

En la distribución cúbica el problema de los slivers está exacerbado. Considérese una pequeña perturbación aleatoria en la posición de cada nodo de un cubo, los slivers serán tetraedros formados por cuatro nodos de cualquier par de diagonales o aristas paralelas.

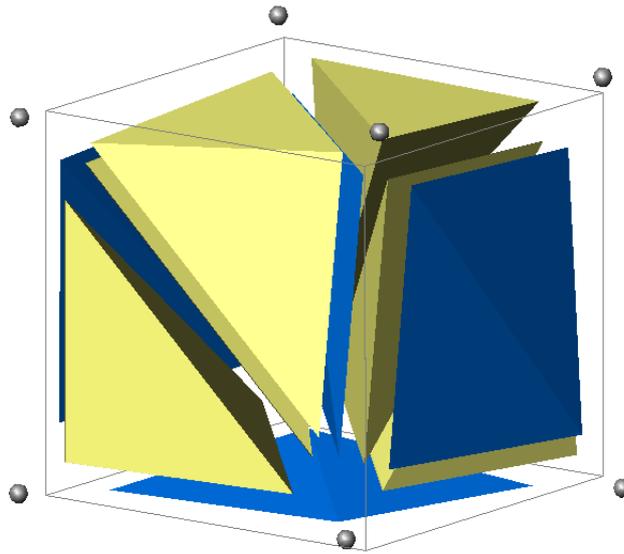


Figura 13: Slivers en array cúbico de nodos.

La técnica que adoptamos para eliminar slivers consiste en realizar modificaciones interiores en clusters de elementos. Supóngase un conjunto contiguo de unos pocos tetraedros, formando un poliedro de caras triangulares y sin nodos interiores. Ese poliedro puede subdividirse en tetraedros de varias maneras; todas válidas, en tanto no se altere la triangulación de la superficie, para que quede bien conectado al resto.

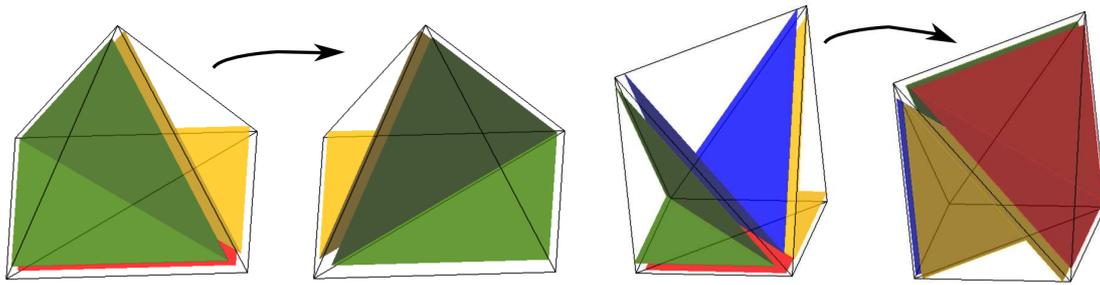


Figura 14: Eliminación de slivers por intercambio de diagonales.

En nuestra implementación la retriangulación no pierde su condición de Delaunay pues el cluster de tetraedros tiene todos sus nodos en la misma esfera. Si bien es muy probable, no siempre es posible realizar una tetraedrización del poliedro sin slivers, en el caso general suele bastar, pero en los arrays cúbicos suele fracasar. Ante el fracaso de la retriangulación, no hay otra opción que agregar un nuevo nodo que formará tetraedros (no Delaunay) con los triángulos de frontera del cluster. El nuevo nodo se agrega en el centro del poliedro, que debe ser convexo e incluir a todos los nodos de la misma esfera, en este caso todo el cubo.

2.5. Postratamiento

El resultado del generador es una malla conectando nodos de sólido o aire, entre si o con la interfase, pero no hay conexiones entre nodos de sólido y nodos de aire. Ahora resta determinar el material de cada nodo y elemento y aquí el problema principal es la velocidad del algoritmo, pues hay que buscar puntos en la pila de imágenes. Este problema se soluciona guardando la pila completa de imágenes binarias en memoria, codificando los bits en enteros (orden 100Mb). De todos modos, para reducir el acceso aleatorio a la memoria, se utilizan las estructuras de datos provistas por el generador para hacer unas pocas búsquedas (centroides de tetraedros con nodos en la interfase) en el buffer de imágenes y el resto determinarlo por conexión y vecindad.

3. RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados obtenidos para la des-densificación automática en mallas de estructuras trabiculares óseas.

La siguiente figura corresponde solo a una porción del dominio a fin de observar con mayor claridad las propiedades de la malla resultante. La figura inferior izquierda muestra la densidad de los nodos, mientras que la inferior derecha la malla resultante luego del post-procesamiento.

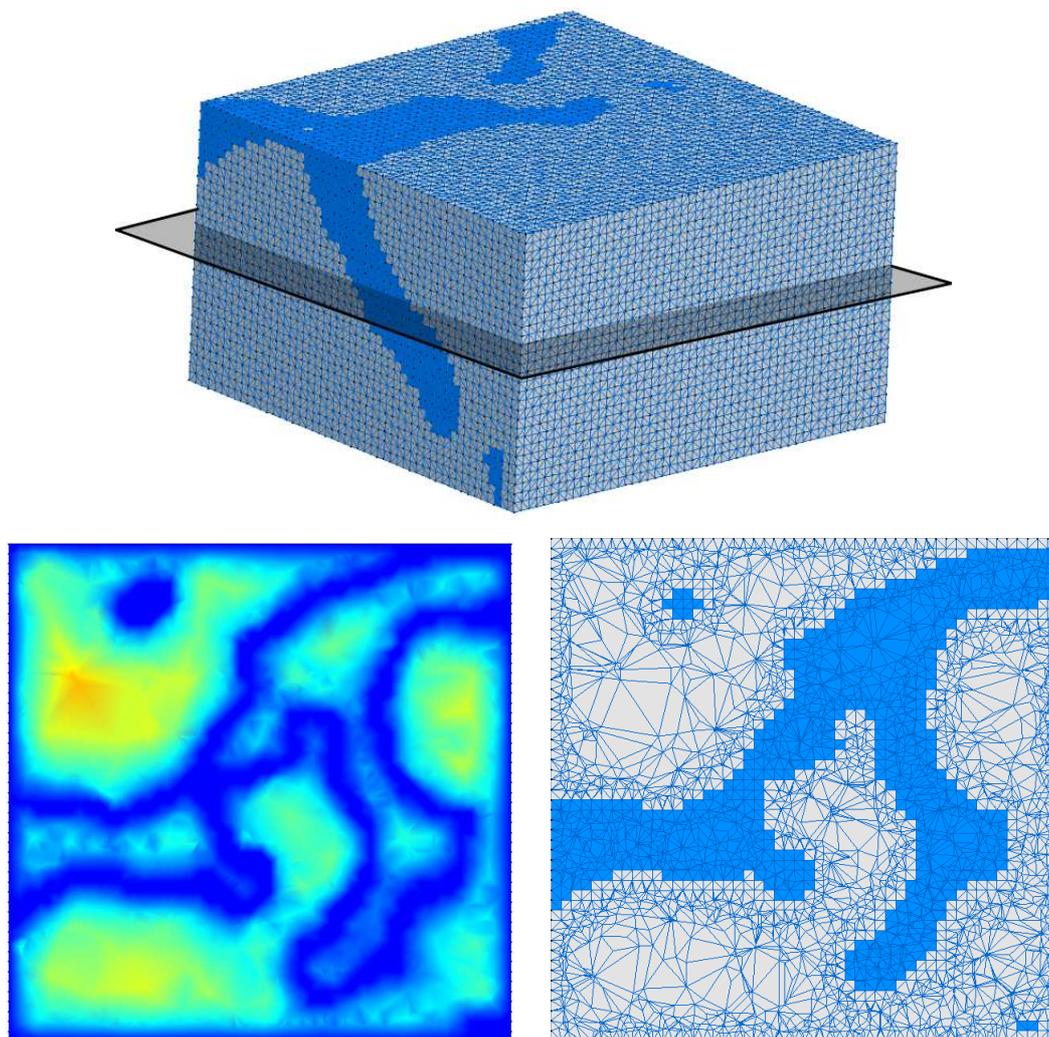


Figura 15: Arriba: Porción del dominio. Abajo: Izq.: Densidad de nodos. Der.: Discriminación hueso-aire

Cabe aclarar que la figura de la derecha no es una malla bidimensional sino el corte de la malla de tetraedros, los nodos aparentes son cortes de aristas y no muestran claramente la densidad resultante que puede verse bien a la izquierda.

Las pruebas se realizaron en una PC portátil con tan solo 512 MB de memoria RAM. En pruebas con pequeñas imágenes se obtienen mallas de tamaño manejable.

	50x50	100x100	200x200
Cantidad de Nodos	41685	110075	377442
Cantidad de Elementos	227807	590246	2070684
Tiempos Generador	0min 4s	0min 16s	1min 35s

Tabla 1: Resultados para un stack de 30 imágenes

4. CONCLUSIONES

En geometrías complicadas como las que aquí se trata, la definición de la densidad de nodos también se complica. En el presente trabajo se ha logrado desdensificar la cantidad de nodos

hacia el interior del hueso, y hacia las fronteras, de manera de obtener mallas de tamaños razonables. Esta desdensificación es manejable a través de: 1) los parámetros variables y 2) la densidad impuesta en la frontera, que puede reducirse aunque ese camino aun no ha sido explorado.

Cabria invertir tiempo en el problema bidimensional para desdensificar primero las paredes arbitrarias de la porción de hueso, pues hasta ahora la hemos tratado como frontera fija, con h de un píxel, pero puede ser reducido en forma sencilla: resolviendo el mismo problema pero 2D en cada cara del dominio. Por el momento quisimos probar la eficacia del método en 3D y lo conseguimos.

Este método de control automático de la densidad se puede utilizar con cualquier otra técnica de segmentación de imágenes, o bien, con los datos proveniente de cualquier otra fuente como en los ejemplos antecedentes mostrados en la introducción.

REFERENCIAS

- Bowyer A. Computing dirichlet tessellations. *Computer Journal*, 24:162–166, 1981.
- Calvo N.A. *Generación de Mallas tridimensionales por métodos duales*. Ph.D. thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2005. Available: <http://www.intec.unl.edu.ar/~ncalvo/tesis.zip>.
- Cheng S.W., Dey T.K., Edelsbrunner H., Facello M.A., and Teng. S. h. silver exudation. *15th ACM Symposium on Computational Geometry*, 1999.
- Chew L.P. Guaranteed-quality delaunay meshing in 3d (short version). *13th ACM Sym. on Comp. Geometry*, 1997.
- Cisilino A., Mazzetta V., and Calvo N.A. La mordida del carnotaurus. *Revista "Nexos". Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNMdP*, 16:2223–2241, 2003.
- Edelsbrunner H. *Geometry and Topology for Mesh Generation*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2001.
- Filippone A. *Grid Generation on Computational Aerodynamics*, 2003. Available: <http://www.aerodyn.org/CFD/Grid/grid.html>.
- Li. X.Y. Generating well-shaped d-dimensional delaunay meshes. *Theoretical Computer Science*, 296:145–165, 2003.
- Shewchuk J.R. *Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation*. Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley, 1999. Available: <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/mesh/>.
- Thompson J.F. A reflection on grid generation in the 90s: Trends needs and influences, 5th international conference on numerical grid generation in computational field simulations. pages 1029–1110. 1996. Mississippi State University.
- Watson D.F. Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *Computer Journal*, 24:167–172, 1981.