

## ESTUDIO DE MATERIALES MAGNÉTICOS (FERRITAS) COMO SISTEMAS CAUSALES. CÁLCULO DE PÉRDIDAS MAGNÉTICAS.

Silvina Boggi<sup>a</sup>, Walter G. Fano<sup>b,c</sup> y Adrian Razzitte<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires,  
silvinaboggi@gmail.com

<sup>b</sup> Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA), gfano@itba.edu.ar

<sup>c</sup>Departamento de Electrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

<sup>d</sup>Departamento de Química, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires,  
adrianr2007@gmail.com

**Palabras clave:** Permeabilidad magnética, sistema causal, relaciones de Kramers-Kronig.

**Resumen.** La permeabilidad magnética y las pérdidas magnéticas de una ferrita son factores importantes para diseñar dispositivos como inductores, transformadores, y materiales absorbentes de microondas entre otros. Por esta razón es conveniente estudiar la permeabilidad magnética de una ferrita en función de la frecuencia. Las ferritas pueden considerarse materiales homogéneos, isotrópicos y lineales a los que se les aplica una excitación que corresponde a un campo magnético armónico  $\mathbf{H}$ , y dicho sistema responde con una densidad de flujo magnético armónico  $\mathbf{B}$ . La respuesta en frecuencia del sistema lineal sería la permeabilidad magnética:  $\mathbf{B}=\mu(\omega) \mathbf{H}$ .

Los materiales magnéticos en campos sinusoidales, tienen en la práctica, pérdidas magnéticas, esto se puede expresar considerando a  $\mu$  como una magnitud compleja :  $\mu(\omega)=\mu'(\omega)+j \mu''(\omega)$ , siendo  $\mu''$  el factor de pérdidas.

De acuerdo con el principio de causalidad, la parte real y la parte imaginaria de la permeabilidad magnética compleja deben estar relacionadas entre sí a través de las relaciones de Kramers - Kronig.

En este trabajo se ha analizado un modelo de permeabilidad magnética en el que se pone en evidencia la contribución a la permeabilidad de dos aspectos físicos: El movimiento de la pared de los dominios magnéticos y el spin del electrón. Este análisis permite ubicar los polos del modelo en el plano complejo, comprobando que los mismos se encuentran en el semiplano inferior (la no existencia de puntos singulares de la función  $\mu(\omega)$  en el semiplano superior complejo es consecuencia directa del principio de causalidad). Por último se ha obtenido numéricamente la parte imaginaria de la permeabilidad magnética de las ferritas de MnZn, NiZn, Ni<sub>2</sub>Y y NiZnCu, aplicando la transformada de Hilbert a la parte real de la mismas usando los resultados divulgados por distintos autores : T. Tsutaoka, Kawano y J.Y. Shin.  $\mu''(\omega) = H(\mu' - \mu'_{max})$  verificando de este modo las relaciones de Kramers- Kronig.

## 1. INTRODUCCIÓN

La teoría electromagnética puede ser utilizada para describir las propiedades macroscópicas de la materia. Los campos electromagnéticos se pueden caracterizar por cuatro vectores: campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}$ , densidad de flujo eléctrico  $\mathbf{D}$  y campo magnético  $\mathbf{H}$ , que en los puntos ordinarios satisfacen las ecuaciones del Maxwell (Stratton, 1941). Si el perfil de las propiedades físicas del material permite caracterizarlo como lineal, homogéneo, e isótropo, la relación entre los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  se puede expresar:

$$B = \mu(\omega)H, \quad (1)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del material.

También un parámetro importante en materiales magnéticos es la susceptibilidad magnética  $\chi$  que relaciona el vector  $\mathbf{M}$  de la magnetización con el vector  $\mathbf{H}$  del campo magnético:

$$M = \chi \cdot H, \quad (2)$$

La permeabilidad magnética  $\mu$  y la susceptibilidad magnética  $\chi$  también se relacionan entre sí (Stratton, 1941):

$$\mu = 1 + \chi, \quad (3)$$

Los materiales magnéticos en campos sinusoidales tienen, en la práctica, pérdidas magnéticas y esto se puede expresar tomando  $\mu$  y  $\chi$  como parámetros complejos (Von Hippel, 1954):

$$\mu = \mu' + j\mu'' \quad (4)$$

$$\chi = \chi' + j\chi'' \quad (5)$$

La permeabilidad magnética  $\mu'$  y el factor de pérdidas  $\mu''$  de los materiales magnéticos son factores muy importantes para diseñar dispositivos como los inductores, los transformadores, y los amortiguadores de onda para las microondas entre otras. Por lo tanto es recomendable investigar el comportamiento de los materiales magnéticos en función de la frecuencia (Sohoo, 1960), (Trainotti and Fano, 2004). El espectro de la permeabilidad compleja de las ferritas se puede caracterizar por dos mecanismos diferentes de magnetización: el movimiento de la pared de los dominios y el momento angular intrínseco del electrón o spin.

La susceptibilidad magnética  $\chi$  se puede entonces expresar como la contribución de dos términos: factor giromagnético de spin ( $\chi_s$ ), y pared del dominio ( $\chi_d$ ) (Tsutaoka, 2003):

$$\chi = \chi_s + \chi_d \quad (6)$$

$$\mu_r = 1 + \chi_s + \chi_d \quad (7)$$

El proceso del movimiento de la pared de los dominios se puede estudiar con una ecuación de movimiento en la cual la presión, proporcional al campo magnético ( $kH$ ) se iguala a la suma de los tres términos:

$$m_e \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \delta z = kH, \quad (8)$$

donde  $m_e$  es la masa efectiva;  $\beta$  el factor de damping,  $\delta$  el factor de la elasticidad, y  $k$  es un factor de proporcionalidad.

La relación entre  $z$ , la coordenada espacial, y el momento dipolar magnético es  $m = pz$ , donde  $p$  es la intensidad del polo magnético, y  $M = Nm$ , donde  $N$  es la cantidad de las partículas (Wohlfarth, 1980).

Asumiendo que el campo magnético tiene una excitación armónica, la solución de la ecuación de movimiento anterior expresa el comportamiento característico de la susceptibilidad (Greiner, 1998):

$$\chi_d = \frac{\omega_d^2 \cdot \chi_{d0}}{\omega_d^2 - \omega^2 - j\omega\beta}, \quad (9)$$

donde  $\omega_d$  es la frecuencia de resonancia de la pared de los dominios ( $\omega_d^2 = \frac{\delta}{\omega}$ ) y  $\chi_{d0}$  es la susceptibilidad magnética estática ( $\chi_{d0} = k \cdot \frac{p}{\delta}$ ).

La contribución a la permeabilidad magnética del factor giromagnético de spin se estudia con una ecuación magnetodinámica (Sohoo, 1960):

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma_e (M \times H) + \frac{\alpha}{M} M \times \frac{\partial M}{\partial t}, \quad (10)$$

Donde  $\gamma_e$  es el factor giromagnético, y  $\alpha$  es el factor de damping. Siendo el campo magnético y la magnetización funciones armónicas:

$$H = H_i + h e^{j\omega t}, \quad (11)$$

$$M = M_0 + m e^{j\omega t}, \quad (12)$$

Donde  $H_i$  es el campo magnético interno y el  $M_0$  es la magnetización de saturación de la ferrita.

Luego, la susceptibilidad magnética  $\chi_s$  puede expresarse como:

$$\chi_s = \frac{(\omega_s + j\omega\alpha) \omega_s \chi_{s0}}{(\omega_s + j\omega\alpha)^2 - \omega^2}, \quad (13)$$

donde:  $\omega_s = -\gamma H$  (es la frecuencia de resonancia de la componente del spin y  $\chi_{s0}$  es la susceptibilidad magnética estática)

Por lo tanto la permeabilidad magnética total resulta (Tsutaoka, 2003):

$$\mu = 1 + \frac{\omega^2 \chi_{d0}}{\omega_d^2 - \omega^2 - j\omega\beta} + \frac{(\omega_s + j\omega\alpha) \omega_s \chi_{s0}}{(\omega_s + j\omega\alpha)^2 - \omega^2}, \quad (14)$$

Separando parte real y parte imaginaria de (14) se obtiene:

$$\mu'(\omega) = 1 + \frac{\omega_d^2 \chi_{d0} (\omega_d^2 - \omega^2)}{(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \beta^2} + \frac{\omega_s^2 \chi_{s0} (\omega_s^2 - \omega^2) + \omega^2 \alpha^2}{(\omega_s^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))^2 + 4\omega^2 \omega_s^2 \alpha^2}, \quad (15)$$

$$\mu''(\omega) = 1 + \frac{\omega_d^2 \chi_{d0} \omega \beta}{(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \beta^2} + \frac{\omega_s \chi_{s0} \omega \alpha (\omega_s^2 + \omega^2 (1 + \alpha^2))}{(\omega_s^2 - \omega^2 (1 + \alpha^2))^2 + 4\omega^2 \omega_s^2 \alpha^2}, \quad (16)$$

Según el principio físico de causalidad ( el valor de B en un instante dado depende de los valores de campo magnético (H) de instantes anteriores), existe una relación directa entre el valor de  $\mu'$  y  $\mu''$ ; esta relación es gobernada por las relaciones de Kramers - Kronig ([Greiner, 1998](#)) ([Landau and Lifchitz, 1981](#)):

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{1}{\pi} \cdot P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu''(\omega) \cdot d\chi}{\chi - \omega} \quad (17)$$

$$\mu''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \cdot P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mu'(\omega) - \mu_1) \cdot d\chi}{\chi - \omega}, \quad (18)$$

donde  $\mu_1$  es la parte real de la permeabilidad magnética para máxima frecuencia.

Las pérdidas magnéticas, expresadas por la parte imaginaria de la permeabilidad magnética, pueden ser muy pequeñas; sin embargo están siempre presentes a menos que estemos considerando el vacío ([Landau and Lifchitz, 1981](#)).

Desde el punto de vista físico, la relación que existe entre  $\mu'$  y  $\mu''$  expresa que los mecanismos de almacenamiento y disipación de la energía son dos aspectos del mismo fenómeno. La fórmula 18 es particularmente importante, nos ofrece la posibilidad de calcular la función  $\mu''(\omega)$  si se conoce, aunque solo sea aproximadamente (por ejemplo por vía experimental) la función  $\mu'(\omega)$  para el material dado.

La fórmula 18 también se puede expresar como:

$$\mu'' = H_T(\mu' - \mu_1), \quad (19)$$

donde  $H_T$  es la transformada de Hilbert.

La única propiedad esencial de la función  $\mu(\omega)$  utilizada en la deducción de las fórmulas de Kramers - Kronig es la ausencia de puntos singulares en el semiplano superior complejo.

Cabe decir que las fórmulas de Kramers - Kronig (como también la propiedad indicada de  $\mu(\omega)$ ) son consecuencia directa del principio de causalidad.

## 2. PARTE EXPERIMENTAL

La parte imaginaria de la permeabilidad magnética de las ferritas de Mn-Zn, Ni-Zn, Ni<sub>2</sub>Y, y NiZnCu se han computado numéricamente aplicando la transformada de Hilbert a la parte real de las mismas usando los resultados divulgados por T. Tsutaoka ([Tsutaoka, 2003](#)), Kawano et.al. ([Kawano et al., 2006](#)) and J.Y.Shin et. al. ([Shin and Oh, 1993](#)).

Para las ferritas Mn-Zn, Ni-Zn y NiZnCu se realizaron gráficos de permeabilidad magnética (parte real y parte imaginaria) en función de la frecuencia aplicando modelos de permeabilidad (similares a los desarrollados en este trabajo) divulgados por T. Tsutaoka ([Tsutaoka, 2003](#)), Kawano et.al. ([Kawano et al., 2006](#)) y luego se compara la parte imaginaria de los mismos con los resultados numéricos obtenidos en este trabajo; la información de las respectivas muestras se encuentran en las tablas 1 y 2 .

Para la ferrita de Ni<sub>2</sub>Y se tomaron directamente valores experimentales de  $\mu'$  divulgados por J.Y. Shin, con los cuales se obtiene numéricamente la parte imaginaria y se la compara con lo publicado , en la tabla 3 se da la información de esta muestra.

	Densidad ( $g/cm^3$ )	$\chi_{d0}$	$\omega_d$ (Mhz)	$\beta$	$\chi_{s0}$	$\omega_s$ (Mhz)	$\alpha$
MnZn ferrite	4.9	3282	2.5	$9.3 \cdot 10^6$	1438	6.3	1.28
NiZn ferrita	5.2	485	2.8	$3.5 \cdot 10^6$	1130	1100	161

Tabla 1: Información de las muestras de las ferritas Mn-Zn y Ni-Zn divulgadas por T.Tsutaoka (Tsutaoka, 2003).

Muestra	Relación en peso de la ferrita (%)	tiempo de sintetizado (h)	Densidad ( $g/cm^3$ )
Muestra A	100	6	5.16
Muestra B	70	6	5.04

Tabla 2: Información de las muestras de las ferritas de NiZnCu (muestra A) y de NiZnCu composite (muestra B) divulgadas por Kawano (Kawano et al., 2006).

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

De acuerdo al principio de causalidad explicado anteriormente la función de permeabilidad compleja debe ser analítica en el plano superior complejo. En el modelo propuesto en este trabajo (ver ecuación 14) los polos (puntos singulares) se encuentran efectivamente en el semiplano inferior complejo. Las expresiones de tales puntos son:

$$\omega_{1-2} = \frac{-j \beta \pm \sqrt{-\beta^2 + 4 \omega_d^2}}{2}, \quad (20)$$

$$\omega_{3-4} = j \frac{|\omega_s| \alpha}{1 + \alpha^2} \pm \frac{|\omega_s|}{1 + \alpha^2}, \quad (21)$$

siendo  $\omega_{1-2}$  los polos de la ecuación 9 correspondientes a la contribución a la permeabilidad magnética del movimiento de la pared de los dominios y  $\omega_{3-4}$  los polos de la ecuación 13, correspondiente a la contribución a la permeabilidad magnética del movimiento de spin.

La posición de tales polos está ilustrada en la figura 1

Para calcular  $\mu''$  aplicando la transformada de Hilbert a  $\mu'$ , se utilizaron datos experimentales del espectro de permeabilidad magnética publicados en las referencias citadas mas arriba, comprobando de esta manera que:

$$\mu'' = H_T (\mu' - \mu_1), \quad (22)$$

Las figuras 2- 6 muestran los gráficos del espectro de permeabilidad magnética para diversas ferritas obtenidos en los reportes y el espectro de  $\mu''$  obtenido numéricamente por medio de la transformada de Hilbert en el presente trabajo.

La figura 2 muestra el espectro de permeabilidad compleja de la ferrita de NiZn (Tsutaoka, 2003) donde se observa que la curva calculada:  $\mu'' = H_T (\mu' - \mu_1)$  ajusta aproximadamente en la zona central del espectro mientras que difiere para frecuencias menores que 1 MHz y mayores que 10MHz. El pico de pérdidas de la ferrita se encuentra en los 2.5MHz y aparece una deformación para una frecuencia mayor a 5Mhz donde también la curva calculada ajusta a la curva experimental.

Muestra	Relación en peso de la ferrita (W %)	tiempo de sintetizado (h)
$Ni_2Y$	100	3

Tabla 3: Información de la ferrita de  $Ni_2Y$  divulgada por J.Y.Shin (Shin and Oh, 1993).

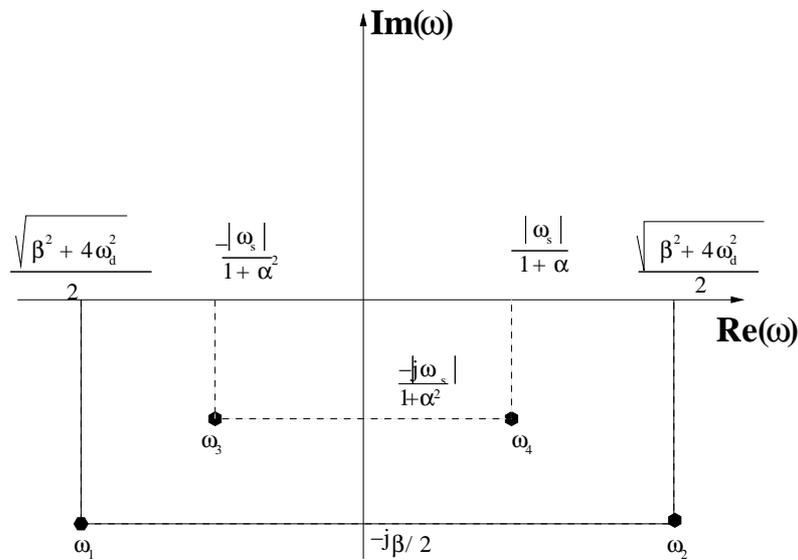


Figura 1: Posición de los polos

El espectro de permeabilidad compleja de la ferrita de MnZn (Tsutaoka, 2003) se muestra en la figura 3. El pico de pérdidas se halla en la frecuencia 0.6 MHz, los datos calculados ajustan aproximadamente bien, aunque difieren en la zona de baja y de alta frecuencia.

En la figura 4 se muestra el espectro de la permeabilidad compleja de la ferrita de NiZnCu (muestra A). El pico de pérdidas se halla en la frecuencia de 3MHz y los resultados calculados ajustan adecuadamente a los resultados experimentales.

En la figura 5 se observa el espectro de permeabilidad compleja de La ferrita de NiZnCu composite. El pico de pérdidas se encuentra en los 50 MHz , se observa concordancia con los valores calculados en forma similar a las ferritas descritas anteriormente.

En la figura ?? se graficaron los valores experimentales y los resultados numéricos de la ferrita de  $Ni_2Y$ . El espectro de permeabilidad se halla entre 0.1 GHz y 10 GHz . Se pueden observar dos picos en 0.9GHz y 6.5GHz , la curva calculada ajusta a los datos medidos en casi toda la banda. Se considera que al ser mayor el rango de frecuencias medidas los resultados calculados ajustan mejor con la curva experimental.

Se observa que en los extremos del rango de frecuencias, la diferencia entre los valores medidos y los calculados se incrementa. Esto es debido, en parte, a que el ancho de banda teórico para aplicar la transformada de Hilbert sería de  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , como ha sido expresado en la ecuación 18, obviamente no se puede reproducir así en la práctica, se emplea para los cálculos de  $\mu''$  el rango finito de banda en el cual el modelo de permeabilidad propuesto responde; los errores en las predicciones numéricas de  $\mu''$  disminuirían con el aumento del ancho de banda.

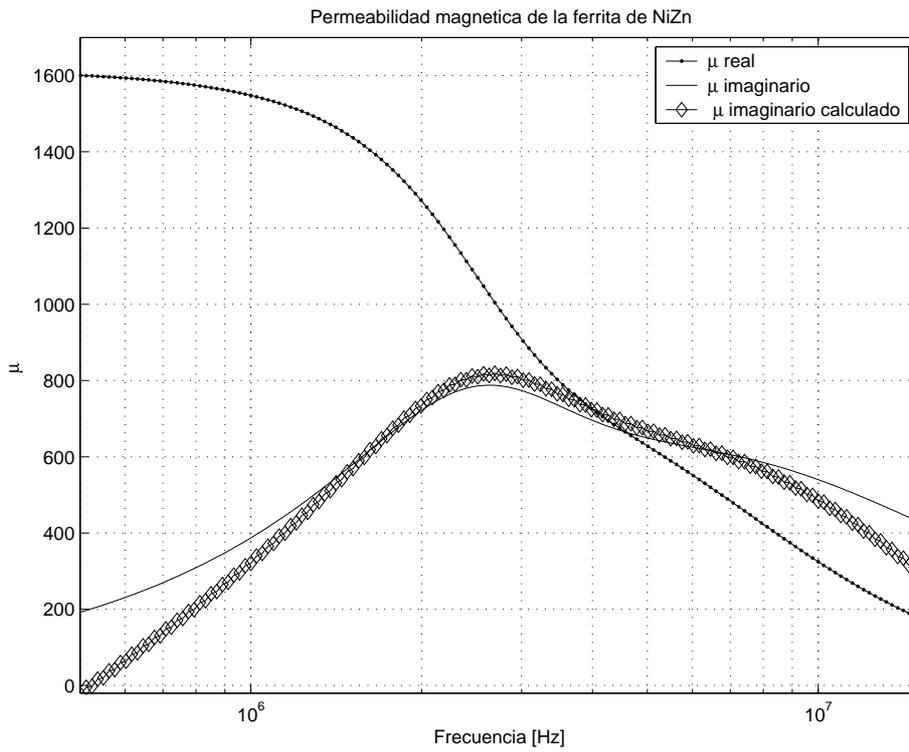


Figura 2: Espectro de Permeabilidad de la ferrita de NiZn

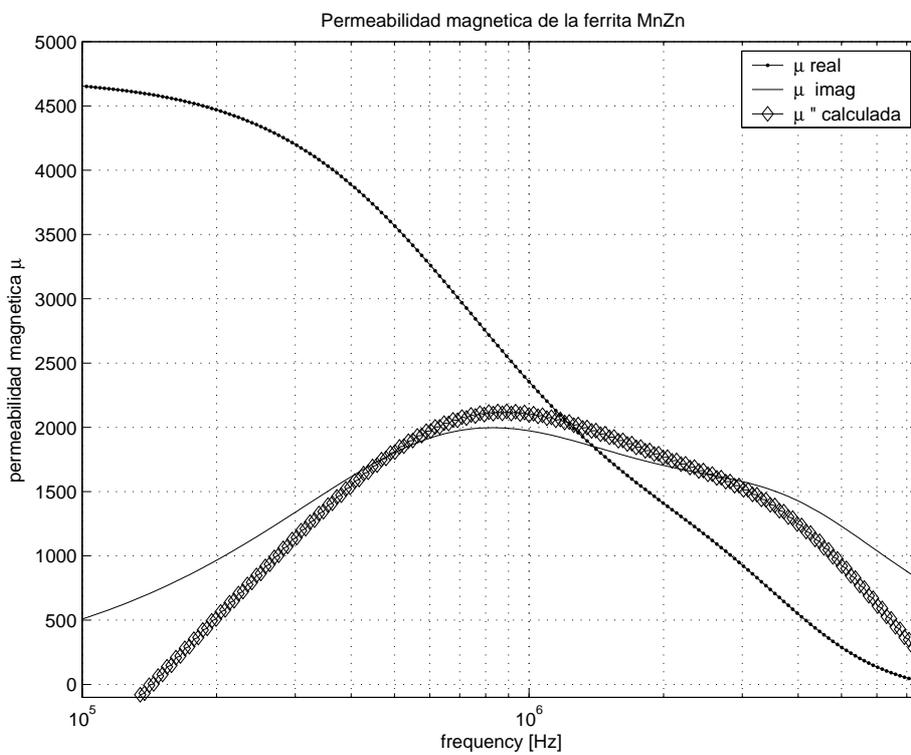


Figura 3: Espectro de Permeabilidad compleja de la ferrita de MnZn

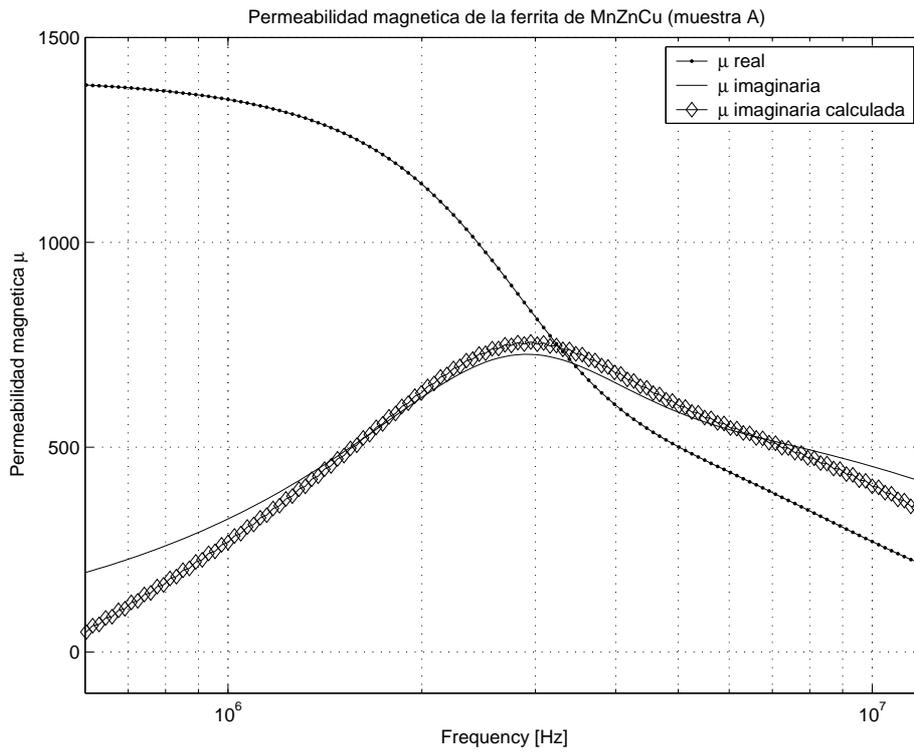


Figura 4: Espectro de Permeabilidad compleja de la ferrita de NiZnCu (muestra A)

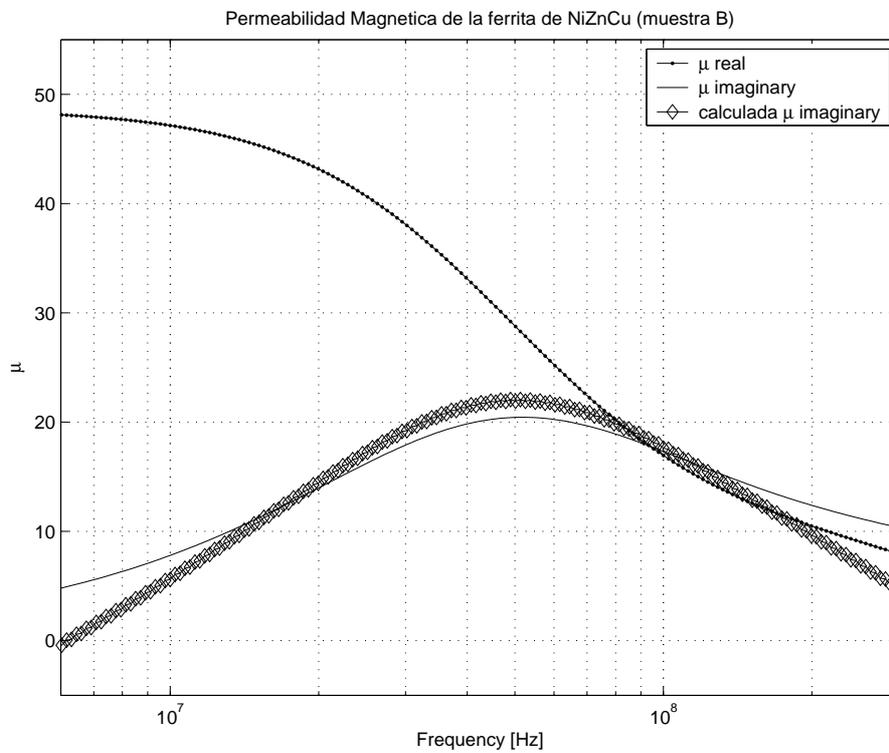


Figura 5: Espectro de Permeabilidad de la ferrita de NiZnCu(muestra B)

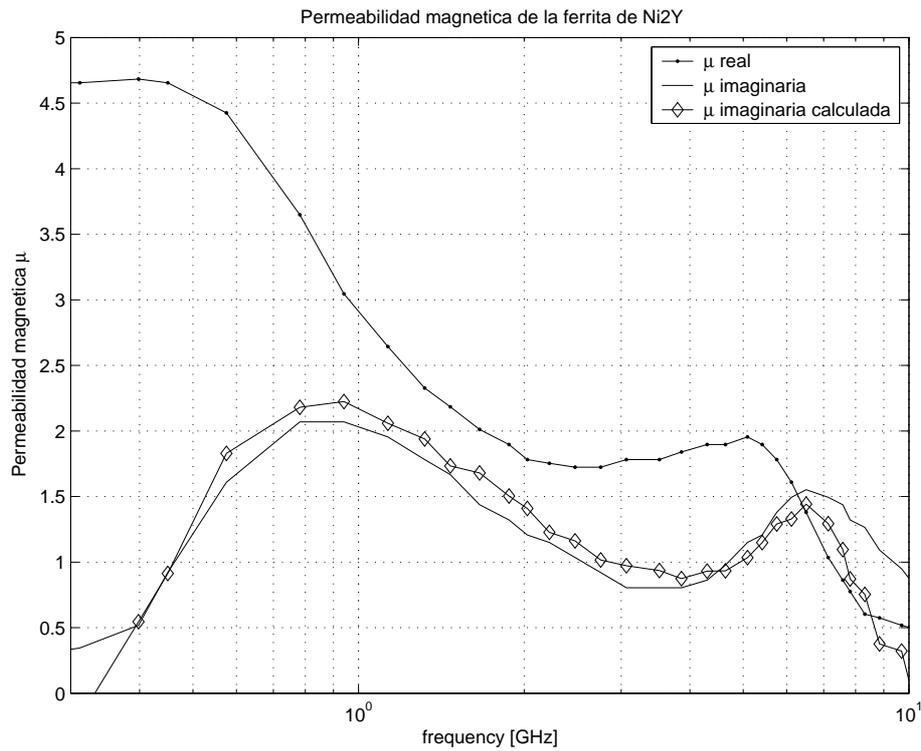


Figura 6: Espectro de Permeabilidad de la ferrita de Ni2Y

#### 4. CONCLUSIONES

El modelo de la permeabilidad magnética en función de la frecuencia desarrollado en este trabajo satisface una característica esencial de los espectros de permeabilidad complejos de las ferritas: Ausencia de puntos singulares en el semiplano superior del plano complejo, consecuencia directa del principio físico de la causalidad.

Fueron predichas satisfactoriamente por medio de la aplicación de la transformada de Hilbert a la parte real, la parte imaginaria de la permeabilidad magnética (relacionada a las pérdidas magnéticas) de las ferritas de NiZn, MnZn, Ni2Y y NiZnCu y sus composites. Se observa diferencia principalmente entre los valores medidos y los calculados en los extremos del rango de frecuencia, esta diferencia se debe, en parte, a la aplicación numérica de la transformada de Hilbert.

Del análisis antedicho, se puede concluir que esta técnica numérica se puede utilizar para aproximar la respuesta de  $\mu''$  conociendo  $\mu'$ . Esta conclusión es valiosa para las investigaciones experimentales de los espectros complejos de la permeabilidad en ferritas

## REFERENCIAS

- Greiner. *Classical electrodynamics*. Springer, 1998.
- Kawano K., Sakurai N., Kusumi S., and Kishi. Magnetic permeability and microstructure of the bi, si, oxides-doped nznco ferrite composite materials. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 297:26–32, 2006.
- Landau and Lifchitz. *Electrodinamica de los medios continuos*. Reverté, 1981.
- Shin J. and Oh J. The microwave absorbing phenomena of ferrite microwave absorbers. *Transaction on Magnetics*, 29:3437–3439, 1993.
- Sohoo R. *Theory and Application of ferrites*. Prentice Hall, 1960.
- Stratton J. *Electromagnetic Theory*. McGraw Hill, 1941.
- Trainotti V. and Fano W. *Ingeniería Electromagnética*. Nueva Librería, 2004.
- Tsutaoka T. Frequency dispersion of complex permeability in mn-zn and ni-zn spinel ferrites and their composite materials. *Journal of Applied Physics*, 93:2789–2796, 2003.
- Von Hippel A. *Dielectrics and Waves*. J. Wiley Sons, 1954.
- Wohlfarth E. *Ferromagnetics Materials*, volume 2. North Holland, 1980.