

## PERFORMANCE OF AN ADAPTIVE METHOD WITH ENRICHED BASIS FUNCTIONS

**Carlos Zuppa**

**Gloria N. Simonetti**

**Amal Azzam<sup>1</sup>**

*Departamento de Matemática, Universidad Nacional de San Luis, Chacabuco 918, 5700 San Luis, Argentina, [zuppa@unsl.edu.ar](mailto:zuppa@unsl.edu.ar), <http://www.deptomat.edu.ar/zuppa>*

**Abstract.** We study the numerical properties of a cloud based  $h$ - $p$  finite element method. Contrary to the originally proposed method of Duarte et al., enriched linearly dependent basis shape functions are used. We study the convergence of the adaptivity process. Numerical examples are analyzed to show the approximative power of the method.

**Keywords:** Adaptivity, convergence,  $h$ - $p$  finite element method,  $h$ - $p$  clouds method.

## 1 INTRODUCCION

Desarrollos recientes en el campo de los métodos sin mallas han demostrado la simplicidad de agregar funciones a particiones de la unidad que reproducen polinomios de bajo orden. En particular, en los métodos de  $hp$  – *nubes* y  $hp$  – *FEM* (Duarte, 1995; Duarte and Oden, 1995; T.P. and G., 2003), la idea básica es multiplicar funciones en una partición de la unidad  $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^N$ , que reproduce polinomios de grado  $m$ , por polinomios de Taylor en los nodos  $\{x_i\}_{i=1}^N$  y considerar funciones de aproximación de la forma

$$IS(x) := \sum_{i=1}^N T_i[x_i, x] \mathcal{W}_i(x),$$

donde  $T_i[x_i, x]$  son polinomios de Taylor en  $x_i$  de grado  $r$ . De hora en más, denotaremos con  $\mathcal{F}_W^{m,r}$  al espacio lineal de todas las funciones de esta forma.

Las funciones de forma resultantes tienen buenas propiedades de compacidad y se pueden reproducir polinomios de cualquier orden. Esta propiedad permite fácilmente la implementación de  $p$  y  $hp$  adaptividad. Esta metodología puede aplicarse también con éxito en particiones de la unidad derivadas de elementos finitos *HP-FEM* (Oden. J. T. and Zienkiewicz, 1998).

En (Duarte, 1995), se ha remarcado que agregar polinomios del mismo grado que aquellos que son reproducidos por la partición de la unidad produce en los métodos de Galerkin matrices singulares (de hecho, existe dependencia lineal en las funciones de forma), y se propone usar solamente polinomios que no son reproducidos en las combinaciones lineales de  $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^N$ . Sin embargo, existen buenas razones para usar todos los polinomios, aún aquellos que son reproducidos por la partición de la unidad.

En (Zuppa, 2007) hemos probado que las combinaciones  $IS$  reproducen polinomios de grado  $m + r$  y hemos obtenido desigualdades de tipo Jackson para el operador de cuasi-interpolación  $IS$ . Más aún, hemos mostrado en las aproximaciones numéricas de problemas de contorno que, aunque las matrices *stiffness* sean singulares, el uso del espacio  $\mathcal{F}_W^{m,r}$  produce resultados mejores que los de la metodología de Duarte-Oden y, al menos cuando el problema no es singular, mejores inclusive que FEM del mismo orden relativos al número de incógnitas (dof).

En este trabajo estudiaremos el comportamiento de  $\mathcal{F}_W^{m,r}$  para la  $h$ – adaptividad inclusive para problemas singulares. Nos restringiremos al caso *HP-FEM* donde  $\{\mathcal{W}_i\}$  son las funciones de forma de elementos finitos de grado 1 y los polinomios de Taylor agregados son también de grado 1. Esta restricción en los polinomios de Taylor se debe aquí a que usamos métodos bastante standard para resolver la ecuación lineal resultante. Un trabajo en preparación, con mayores precauciones en la resolución del sistema, se encuentra en preparación.

En este caso,  $\mathcal{F}_W^{1,1}$  reproduce polinomios de grado 2 y  $\mathcal{F}_W^{1,1} \subset \mathbb{V}_2$ , donde  $\mathbb{V}_2$  es el espacio usual en elementos finitos de grado 2. Sorprendentemente, mostraremos aquí que  $\mathcal{F}_W^{1,1}$  se comporta mejor aún que  $\mathbb{V}_2$  después de cierto umbral donde la malla comienza a captar las singularidades del problema. Cuando la malla no es lo suficientemente fina como para captar suficientemente las variaciones de la solución todos los métodos  $hp$  – *nubes* sufren una cierta oscilación propia de las funciones de forma utilizadas. La eficacia de  $\mathcal{F}_W^{1,1}$  no puede deberse simplemente a la metodología de Nitsche que usamos para imponer las condiciones esenciales como muestran las comparaciones con el uso de Nitsche en  $\mathbb{V}_2$  y, por otra parte, la resolución

de sistemas con cierto grado de singularidad no presenta actualmente grandes problemas. En consecuencia, el uso de funciones de forma  $\mathcal{F}_W^{m,r}$  produce una metodología eficiente en formulaciones de Galerkin que puede ser usada también en particiones de la unidad derivadas de otros métodos sin malla (T.P. and G., 2003; Idelsohn and Del Pin, 2003).

## 2 HP-FEM

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) un dominio poliedral acotado con una partición triangulada por una triangulación conforme  $\mathcal{T}_0$ . En lo sucesivo, cualquier triangulación conforme  $\mathcal{T}$  que consideremos es derivada de  $\mathcal{T}_0$  con refinamiento por bisección,  $\{x_{\mathcal{T},i}\}_{i=1}^N$  es el conjunto de nodos de la triangulación  $\mathcal{T}$ , y dado cualquier elemento  $T \in \mathcal{T}$ , denotamos con  $h_T$  la longitud  $|T|^{1/d}$ .

Dado  $n = 1, 2$  y la triangulación conforme  $\mathcal{T}$ , el espacio de elementos finitos asociado es

$$\mathbb{V}_n(\mathcal{T}) := \{V \in H^1(\Omega) \mid V|_T \in \mathbb{P}_n(T), T \in \mathcal{T}\},$$

donde  $\mathbb{P}_n$  es el espacio de polinomios de grado  $\leq n$ .

El espacio  $\mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  consiste de las combinaciones lineales

$$V = \sum_{i=1}^N T_i \mathcal{W}_{\mathcal{T},i},$$

donde  $\{\mathcal{W}_{\mathcal{T},i}\}_{i=1}^N$  es la base canónica de  $\mathbb{V}_1(\mathcal{T})$  y cada  $T_i$  es un polinomio de Taylor lineal centrado en el nodo  $x_{\mathcal{T},i}$ .

Por razones de estabilidad numéricas consideraremos estos polinomios en la forma

$$T_i(x) = \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha \left( \frac{x - x_{\mathcal{T},i}}{h_i} \right)^\alpha,$$

donde  $h_i :=$ diámetro del soporte de la función  $\mathcal{W}_{\mathcal{T},i}$ .

El resultado siguiente, fácil de probar, será necesario más adelante.

**Proposición 1** *Existe una constante  $C = C(\mathcal{T}_0)$ , tal que*

$$\|\partial V / \partial n\|_{L^2(T \cap \partial\Omega)} \leq C h_T^{-1/2} \|\nabla V\|_{L^2(T)},$$

para todo  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  y toda  $V \in \mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$ .

**Nota 2** *Como las triangulaciones  $\mathcal{T}$  que consideraremos se obtienen todas de la original  $\mathcal{T}_0$  por refinamientos por bisección, la constante  $C$  depende entonces únicamente de la calidad de la triangulación original  $\mathcal{T}_0$  (y del grado de los polinomios de Taylor utilizados).*

## 3 PROBLEMAS DE CONTORNO

Consideraremos el problema modelo:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= g && \text{en } \Gamma_D \subset \partial\Omega, \\ u_n &= q && \text{en } \Gamma_N \subset \partial\Omega, \end{aligned}$$

con solución exacta  $\bar{u}$ . Supondremos que las triangulaciones  $\mathcal{T}$  son consistentes con la separación de  $\partial\Omega$  en  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$ . Para considerar el método de Nitsche, necesitamos  $\bar{u} \in H^1(\Omega, \Delta)$ , esto es,  $\Delta\bar{u} \in L^2(\Omega)$ . En este caso vale  $\partial\bar{u}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$  con

$$\|\partial\bar{u}/\partial n\|_{-1/2,\Gamma} \leq C (\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}).$$

Para simplificar, hemos denotado  $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$  y también definiremos

$$\mathcal{T}_D := \{T \in \mathcal{T} \mid T \cap \Gamma_D \neq \emptyset\}.$$

Dado  $\mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  y  $\beta > 0$ , la formulación estabilizada débil de Nitsche (Nitsche, 1970) para la solución aproximada del problema de contorno es:

Encontrar  $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  tal que

$$B_\beta(u_{\mathcal{T}}, v) = F_\beta(v), \quad \forall v \in \mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T}),$$

donde

$$B_\beta(u, v) := B(u, v) + \beta \sum_{T \in \mathcal{T}_D} h_T^{-1} \int_{T \cap \Gamma_D} uv,$$

$$B(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_D} [u_n v + uv_n],$$

y

$$F_\beta(v) := \int_{\Omega} fv - \int_{\Gamma_D} gv_n + \int_{\Gamma_N} qv + \beta \sum_{T \in \mathcal{T}_D} h_T^{-1} \int_{T \cap \Gamma_D} gv.$$

En cada  $T \in \mathcal{T}_D$  se tiene

$$2 \int_{T \cap \Gamma_D} u_n u \leq 2C(\mathcal{T}_0) h_T^{-1/2} \|\nabla u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)} \|u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} B_\beta(u, u)|T &= \|\nabla u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2 - 2 \int_{T \cap \Gamma_D} u_n u + \beta h_T^{-1} \|u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2 \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2 - 2C(\mathcal{T}_0) h_T^{-1/2} \|\nabla u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)} \|u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)} + \beta h_T^{-1} \|u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2 \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2 + (\beta - 2C(\mathcal{T}_0)^2) h_T^{-1} \|u\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, si elegimos  $\beta$  de manera que se verifique:

**Condición B:**

$$\beta \geq 1 + \max\{h_T \mid T \in \mathcal{T}_0\} + 2C(\mathcal{T}_0)^2,$$

se tiene finalmente

$$B_\beta(u, u) \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Hemos probado de esta forma el resultado siguiente.

**Teorema 3** *Existe una constante  $\beta = \beta(\mathcal{T}_0)$  tal que la forma bilineal continua  $B_\beta$  es coerciva en  $\mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  con constante de coercividad mayor que 1, cualquiera sea el refinamiento  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{T}_0$ . En este caso, existe una única solución  $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  de la formulación débil del problema de contorno.*

### 3.1 La resolución del sistema algebraico

Como hemos ya remarcado, las funciones de forma

$$\{\mathcal{W}_{\mathcal{T},i}(x - x_{\mathcal{T},i})^\alpha\}_{i=1,\dots,N; |\alpha| \leq 1},$$

es un sistema generador del espacio  $\mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  pero no forman una base porque hay dependencia lineal y esto produce la singularidad de la matriz *stiffness*. Pero esto no es un problema mayor hoy en día. En (Strouboulis and Copps, 2001) se prueba que el uso de *direct solvers* como las rutinas MA27 y MA47 de Harwell Subroutine Library son exitosas aún cuando la nulidad de la matriz es grande. Además, los errores de redondeo producen el mismo efecto que cuando se resuelven sistemas de elementos finitos. En la referencia citada se encuentra también un algoritmo iterativo. En nuestros experimentos numéricos hemos usado simplemente los resolvedores directos de LAPACK (Anderson, 1999).

### 3.2 Estimadores de error y adaptividad

Siguiendo fundamentalmente a (Juntunen and Stenberg, 2005) y los trabajos allí citados, para el análisis del método se define la norma que depende de la triangulación:

$$\|v\|_{\mathcal{T}}^2 := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{-1} \|v\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2.$$

Si vale la **Condición B**, se pueden probar las estimaciones de error *a priori* habituales y, bajo cierta condición de saturación, que se verifica

$$\|\bar{u} - u_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(T, u_{\mathcal{T}}) \right)^{1/2}, \quad (1)$$

donde  $\eta_{\mathcal{T}}^2(T, u_{\mathcal{T}})$  está definido por la expresión

$$h_T^2 \|\Delta u_{\mathcal{T}} + f\|_{L^2(T)}^2 + h_T \|[u_{\mathcal{T},n}]\|_{L^2(T \cap \Omega)}^2 + h_T \|(u_{\mathcal{T},n} - q)\|_{L^2(T \cap \Gamma_N)}^2 + h_T^{-1} \|(u_{\mathcal{T}} - g)\|_{L^2(T \cap \Gamma_D)}^2,$$

y  $[u_{\mathcal{T},n}]$  es, como habitualmente, el salto de  $u_{\mathcal{T},n}$  en las caras internas del triángulo  $T$ .

En FEM está bien establecido que adaptividad es un recurso de importancia cada vez más preponderante en análisis numérico. Las versiones adaptivas de FEM consisten en el ciclo

**RESOLVER** → **ESTIMAR** → **MARCAR** → **REFINAR**.

**ESTIMAR:** el estimador de error *a posteriori* para el método de Nitsche es, de acuerdo con (1)

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{\mathcal{T}}^2(T, u_{\mathcal{T}}).$$

**MARCAR:** el marcado de los triángulos que se han de refinar se efectúa de acuerdo al ya clásico procedimiento de W. Dörfler que fue el primero en demostrar convergencia del ciclo de adaptividad en el caso multidimensional: se elige un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{T}$  tal que

$$\sum_{T \in \mathcal{S}} \eta_{\mathcal{T}}^2(T, u_{\mathcal{T}}) \geq (0.5)^2 \eta_{\mathcal{T}}^2(u_{\mathcal{T}}).$$

Una cuestión importante todavía no completamente resuelta en el caso del método de Nitsche y que no tocamos en este trabajo, es la convergencia del ciclo de adaptividad, esto es

$$\|u_{\mathcal{T}_k} - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad , \quad \eta_{\mathcal{T}_k}(u_{\mathcal{T}_k}) \rightarrow 0.$$

## 4 EXPERIMENTOS NUMERICOS

Discutiremos aquí la evolución del ciclo de adaptividad usando  $\mathcal{F}^{1,1}$  para resolver numéricamente diversos modelos bidimensionales. Los resultados se compararán con los obtenidos usando  $\mathbb{V}_2$  (fe2) de la manera clásica y  $\mathbb{V}_2$  bajo la formulación débil de Nitsche (fn2), se incluyen también algunos resultados obtenidos con elementos finitos lineales (fe1).

Describiremos primero los modelos de complejidad creciente que utilizaremos.

### 4.1 Modelo 1

En nuestro primer ejemplo consideramos el problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $f$  es elegida de manera que la solución exacta es

$$\bar{u}(x, y) = \arctan \left( 100 \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) (x-x^2)(y-y^2) \right).$$

### 4.2 Modelo 2

En este ejemplo se imponen condiciones mixtas en la frontera.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 8\pi^2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) & \text{en } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ u_n &= 0 & \text{en } \Gamma_N &= \{0, 1\} \times (0, 1), \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma_D &= [0, 1] \times \{0, 1\}. \end{aligned}$$

La solución exacta es

$$\bar{u}(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

### 4.3 Modelo 3

Este ejemplo presenta una fuente con un pico muy pronunciado en el interior. El problema es

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma_D &= [0, 1] \times \{0\}, \\ u_n &= 0 & \text{en } \Gamma_D &= \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{aligned}$$

donde  $f$  es elegida de manera que la solución exacta es

$$\bar{u}(x, y) = 5x^2(1-x)^2(e^{10x^2} - 1)y^2(1-y)^2(e^{10y^2} - 1).$$

La solución es suave pero presente gradientes muy altos en la proximidad de la frontera.

### 4.4 Modelo 4

Consideramos el problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ u|_{\partial\Omega} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

donde  $f$  es elegida de manera que la solución exacta es

$$\bar{u}(x, y) = \arctan(50y(x - 0.5)).$$

Este ejemplo presenta condiciones de Dirichlet con valores altos de la derivada tangencial y suele presentar problemas oscilatorios para imposición de condiciones Dirichlet con métodos de penalización.

#### 4.5 Modelo 5

Este es el típico problema en un dominio  $L$ . Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

en el dominio  $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$  con solución exacta

$$\bar{u}(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right).$$

#### 4.6 Modelo 6. Problema de fractura

Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

en el dominio  $\Omega = \{|x| + |y| < 1\} \setminus \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ . La solución exacta, escrita en coordenadas polares es

$$\bar{u}(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}r^2.$$

**Nota 4** Como es típico, debemos resolver la singularidad del borde  $(0, 1] \times \{0\}$  mediante la duplicación de nodos en  $\mathcal{T}_0$  e impidiendo la conexión de elementos en ese segmento.

**Nota 5** En estos dos últimos ejemplos, la solución  $\bar{u}$  no pertenece a  $H^2(\Omega)$

#### 4.7 Las mallas $\mathcal{T}_0$ de inicio del ciclo de adaptividad

En todos los casos las mallas de partida son realmente minimales. Por ejemplo, la figura 1 muestra las mallas  $\mathcal{T}_0$  para los modelos 1,2,3,4 y 5. De igual modo, para el modelo 6 usamos una malla de partida minimal cuyos nodos son exactamente los puntos que definen el dominio.

#### 4.8 Resultados

Mostraremos solamente la convergencia del error en la energía

$$\|\nabla e\| := \|\nabla(\bar{u} - u_{\mathcal{T}_k})\|_{L^2(\Omega)}.$$

versus Dof.

Las Figuras 2, 3 y 4 muestran la convergencia para los modelos 1 y 2, los modelos 3 y 4 y para los modelos 5 y 6 respectivamente.

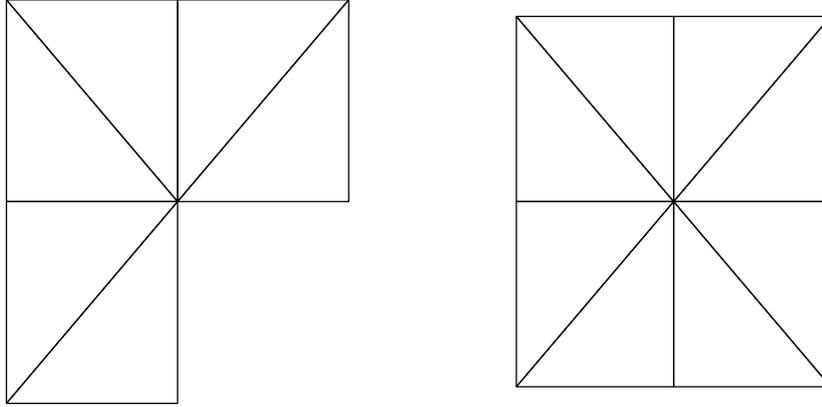


Figure 1: Mallas iniciales para los Modelos 1,2,3,4 y 5

En todos los casos se observa que el método  $\mathcal{F}^{1,1}(\mathcal{T})$  necesita un cierto umbral de resolución, mayor en los casos singulares, para captar la estructura fina de la solución y donde se comporta mal, a partir del cuál la convergencia es realmente muy eficiente. Esto se observa más claramente usando mallas de partida  $\mathcal{T}_0$  más finas como se muestra en las figuras 5 y 6

También se observa que el método de Nitsche para el tratamiento de condiciones de frontera Dirichlet es muy eficiente, aún en el caso de utilizar elementos finitos tradicionales. Ya que usamos el método de Galerkin y  $\mathcal{F}^{1,1} \subset \mathbb{V}_2$  debería esperarse un resultado netamente superior para  $FEM2N$ . Naturalmente, la ventaja de  $\mathcal{F}^{1,1}$  vs.  $FEM2N$  cuando se grafica  $\|\nabla e\|$  vs.  $Dof$  también radica en que  $Dof$  crece más rápidamente en  $\mathbb{V}_2$  que en  $\mathcal{F}^{1,1}$ . Efectivamente, los resultados con  $FEM2N$  son levemente superiores si graficamos  $\|\nabla e\|$  vs. (número de elementos).

Mostramos en las figuras 7 y 8, a título de ejemplo, la convergencia de la adaptividad en los Modelos 1 y 5 usando polinomios de Taylor de grado 2, esto es, usando el espacio  $\mathcal{F}^{1,2}(\mathcal{T})$

Es muy útil la comparación de estos resultados con otros métodos PUM. Ver por ejemplo (Griebel and Schweitzer, 2002), donde se analizan los mismos ejemplos en un proceso de adaptividad y cuyo resultado final necesita más de 1000000 incógnitas para alcanzar el mismo orden de error.

**Nota 6** Para tener reproducción de orden 2 en el método HP-FEM original (Oden. J. T. and Zienkiewicz, 1998) se deben usar las funciones de forma básicas

$$\{\mathcal{W}_{\mathcal{T},i}(x - x_{\mathcal{T},i})^\alpha\}_{i=1,\dots,N; |\alpha|=2}.$$

De esta manera, la matriz stiffness del problema resulta no singular. Sin embargo, los resultados numéricos son sensiblemente inferiores a los obtenidos con  $\mathcal{F}^{1,1}$  y  $FEM2$  como ya hemos

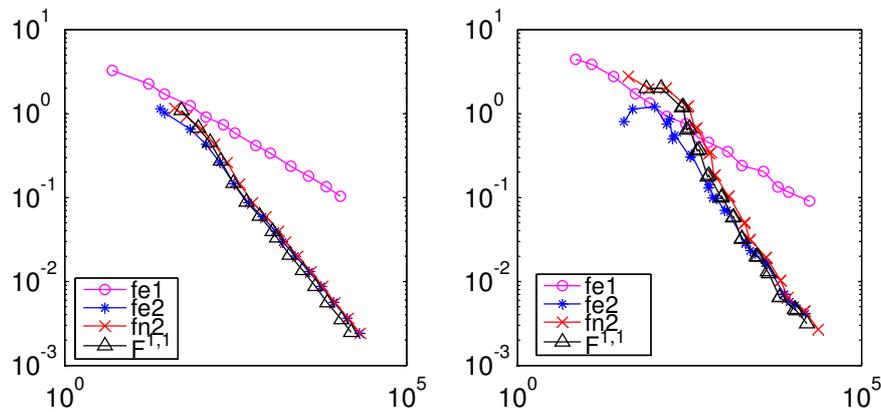


Figure 2: Convergencia en los Modelos 1 y 2

mostrado en (Zuppa, 2007). Por este motivo no hemos consignado aquí resultados con esta metodología.

## 5 CONCLUSIONES

Hemos mostrado aquí que el uso de los espacios  $\mathcal{F}_W^{m,r}$  en formulaciones de Galerkin para la resolución numérica de problemas de contorno conduce a un método robusto y eficaz, especialmente en procesos adaptivos. La singularidad de la matriz asociada no es un problema mayor. Además, el tratamiento de las condiciones de Dirichlet con el método de Nitsche es muy eficaz, aún en los elementos finitos clásicos.

Debemos remarcar aquí que esta metodología es aplicable a particiones de la unidad derivadas de otros métodos, especialmente los llamados métodos sin malla. Esperamos mostrar en un trabajo que se encuentra en preparación que con particiones de la unidad obtenidas por el método de mínimos cuadrados móviles, las oscilaciones que se observan en los experimentos numéricos presentados cuando la malla no es lo suficientemente fina disminuyen considerablemente, ya que las funciones de forma son más suaves.

## REFERENCES

- E. Anderson. *LAPACK User's Guide*. SIAM, 1999.
- C. A. Duarte. *H-p Clouds. An h-p Meshless Method*. PhD thesis, TICAM, The University of Texas at Austin, 1995.
- C. A. Duarte and J. T. Oden. H-p clouds. an h-p meshless method to solve boundary value problems. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin, 1995.
- M. Griebel and M.A. Schweitzer. *A particle partition of unity method. Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Hildebrand and Karcher ed., Springer, 2002.

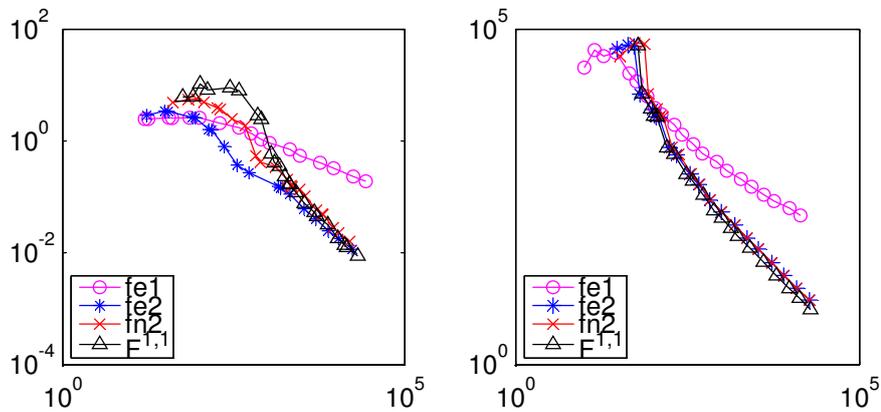


Figure 3: Convergencia en los Modelos 3 y 4

- Oñate E. Calvo N. Idelsohn, S. R. and F. Del Pin. The meshless finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 58, 2003.
- M. Juntunen and R. Stenberg. A finite element method for general boundary condition. *Rakenteiden Mekaniikka*, 38, 2005.
- W.. Nitsche. Über ein variationaprinzip zur lösing dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Univ. Hamburg*, 36: 9–15, 1970.
- C. A. Oden. J. T., Duarte and Zienkiewicz. A new cloud-based  $hp$  finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 153:117–126, 1998.
- Babuška I. Strouboulis, T. and K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 181:43–69, 2001.
- Fries T.P. and Matthies H. G. Classification and overview of meshfree methods. Technical report, Tech. Rep. No. 2003-3 of Technical University Braunschweig, Brunswick, 2003.
- C. Zuppa. Modified taylor reproducing formulas and  $h$ - $p$  clouds. *to appear in Mathematics of Computation*, 2007.

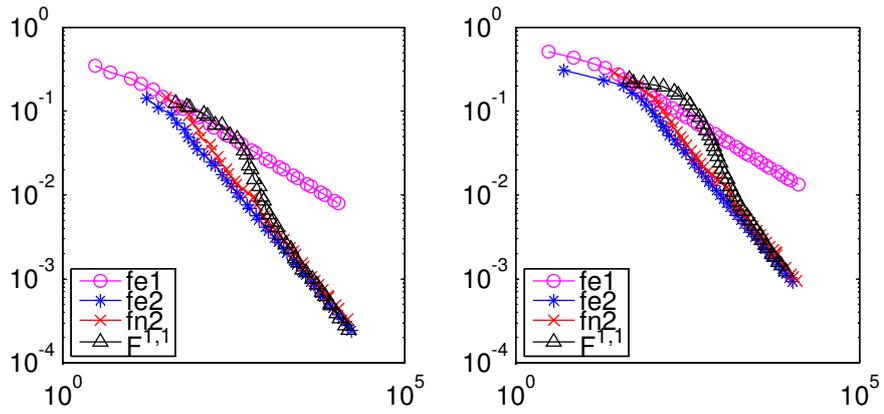


Figure 4: Convergencia en los Modelos 5 y 6

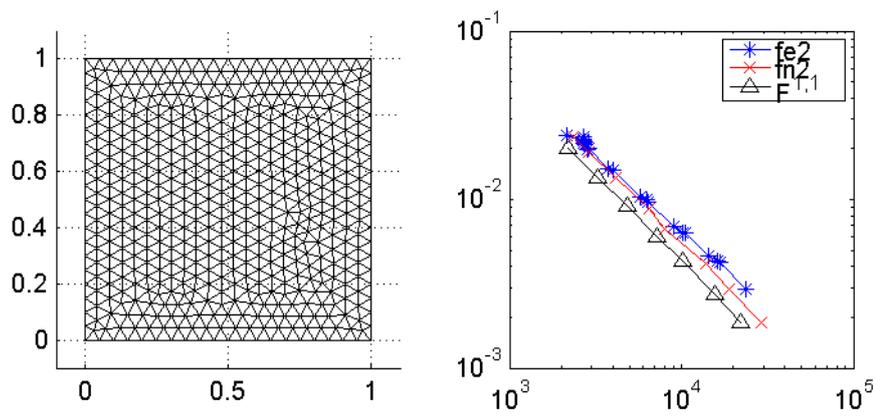


Figure 5: Malla inicial y convergencia en el Modelo 1

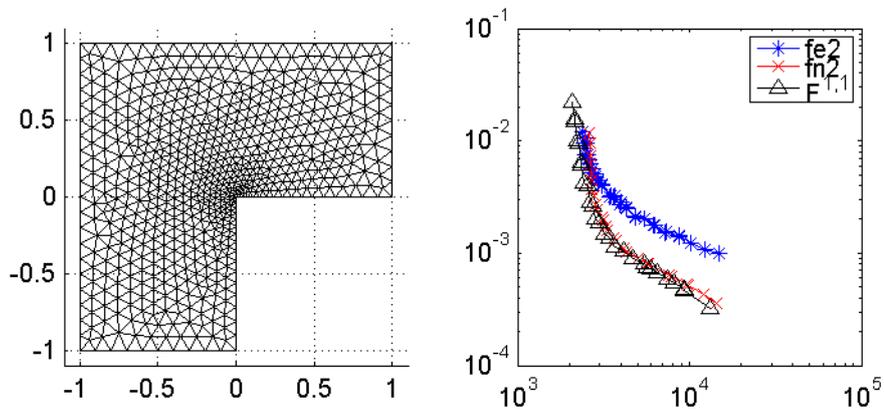


Figure 6: Malla inicial y convergencia en el Modelo 5

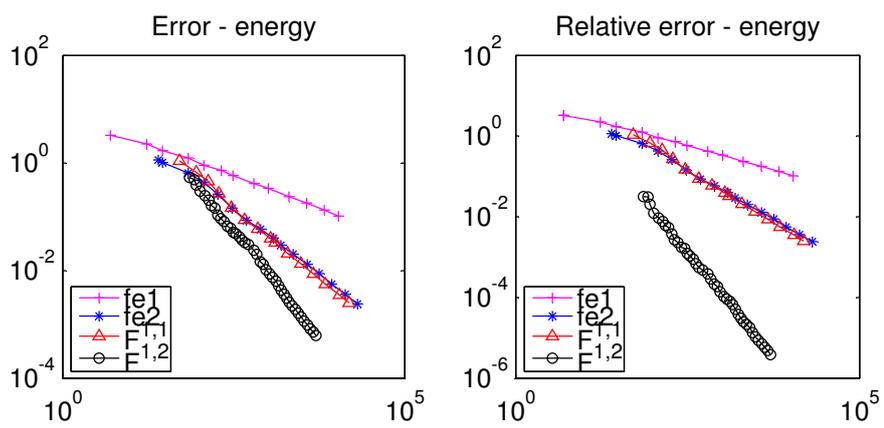


Figure 7: Error y error relativo. Modelo 1

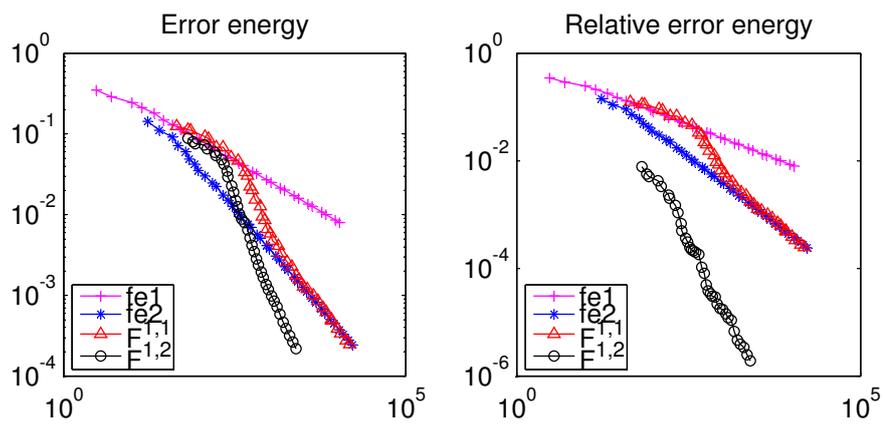


Figure 8: Error y error relativo. Modelo 5