

OPTIMA RED GEODESICA A PARTIR DE UNA SOLUCION AL PROBLEMA DE SEGUNDO ORDEN Y UNA MATRIZ DE CRITERIO DADA

José L. Vacafior, José R. Golbach,
Sandra M. Corral y Nardo G. López Ferneti

*Cátedras de Geodesia Superior. Departamento de Geodesia y Topografía.
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Universidad Nacional de Tucumán.
Avenida Independencia 1800. (4000) San Miguel de Tucumán. Tucumán. Argentina.
vacaflor@arnet.com.ar ; Tel/Fax : 00 54 0381 4223215*

Palabras Claves: Problema Inverso. Matriz de criterio. Diseño de Segundo orden. Red Geodésica.

Resumen

A partir de una solución directa del llamado problema “inverso de segundo orden” en el campo del Análisis y Diseño de Redes Geodésicas, los pesos “P” de las observaciones son obtenidos teniendo en cuenta una matriz de criterio Q_x (matriz de coeficientes de peso de las coordenadas incógnitas) ideal que contiene indicadores de precisión previamente establecidos y una matriz de diseño A que expresa la configuración de la estructura bajo estudio, la cual es una red geodésica bidimensional (trilateración con 15 distancias horizontales) libre compuesta de seis puntos (12 coordenadas incógnitas planas “x” e “y”).

Con los pesos efectivamente resueltos se calculó una matriz Q_{xc} (matriz de coeficientes de peso de las coordenadas incógnitas calculadas) y a posterior se comparó dicha matriz con Q_x mediante: $d^t \cdot d$, con $d = \text{vec}(D)$ y $D = Q_x - Q_{xc}$.

La solución que se aprovecha en este trabajo es la solución general presentada por Schaffrin, B. (1983) y los conceptos y propiedades de Inversa Generalizada Izquierda como fue introducida por Koch, R. (1988).

Del análisis de la solución de la matriz de Peso se observa que, como lo indica la experiencia: las distancias mayores resultan tener menor peso en concordancia con su mayor error. Por otra parte, el número $d^t \cdot d$ es una medida global de la calidad de la aproximación respecto de la matriz de criterio. Finalmente, se adjunta una tabla en donde se muestran los resultados de P , $\text{diag}(Q_{xc})$ y $d^t \cdot d$ para otros diseños de red (diferentes matrices de diseño A).

1 INTRODUCCIÓN

El problema del óptimo diseño de una red geodésica comienza con F.R. Helmert en 1868 (Grafarend, 1974) quien propuso un esquema de clasificación para efectuar un “levantamiento racional”.

Helmert buscó encontrar reglas para la óptima localización de los puntos de una red, como una función del tipo de mediciones y el número de observaciones.

Sus postulados de máxima precisión en las coordenadas de los puntos de la red a partir de la compensación y del mínimo costo y tiempo para realizar las observaciones son actualmente aceptados mundialmente.

El esquema propuesto por Helmert para el problema de diseño óptimo comprende:

(i) Diseño óptimo de orden cero (ZOD): El problema geodésico del Datum ó diseño del sistema de referencia.

(ii) Diseño óptimo de primer orden (FOD): El problema de la configuración.

(iii) Diseño óptimo de segundo orden (SOD): El problema generalizado de los pesos.

(iv) Diseño óptimo de tercer orden (TOD): El enfoque Geodésico Bayesiano ó el diseño de observaciones adicionales para mejorar una red que ya existe.

En este trabajo se propone una metodología para el Diseño óptimo de segundo orden que aprovecha la solución general presentada por Schaffrin, B. (1983) y los conceptos y propiedades de Inversa Generalizada Izquierda como fue introducida por Koch, R. (1988) para realizar una optimización analítica de los pesos de las observaciones con respecto a objetivos de precisión prefijados mediante una matriz de criterio.

Por matriz de criterio denotamos a una matriz de segundos momentos que tiene una estructura ideal con respecto a las estimaciones de aquellos parámetros que buscamos, es decir: respecto a las coordenadas incógnitas de un cierto número de puntos de la red geodésica.

Esta matriz representa la estructura ideal para las matrices de varianza-covarianza de los parámetros a estimar y, en principio, ella es creada independientemente de cualquier modelo lineal conectando los parámetros buscados a ciertas observaciones.

Estudios sobre matrices de criterio que expresan propiedades específicas como: isotropía y homogeneidad y que conducen a estructuras del tipo “Taylor-Karman” pueden ser encontrados en los trabajos de Grafarend et.al. (1979) y Schaffrin et.al. (1982). Para otras investigaciones sobre matrices de criterio y su relación con los problemas de diseño óptimo ver, por ejemplo, los trabajos de: Crosilla (1982, 1985); Baarda (1981); Grafarend (1985) y Grafarend, et.al. (1985); Kaltenbach y Schmitt (1988); Schmitt (1980) y Wimmer (1981).

Por otro lado, se muestra también en este trabajo, como la metodología propuesta puede ser aplicada a otros diseños alternativos de red.

Las soluciones al problema de SOD tienen gran importancia práctica en numerosos trabajos de la Ingeniería tales como: el control de deformaciones en obras civiles; el estudio de los desplazamientos en puntos de redes geodésicas establecidas para monitorear las deformaciones que se producen en la corteza terrestre, en este sentido, véanse -por ejemplo- los trabajos de: Benzao, T. et. al. (1995) y Kuang, S.L et.al. (1991).

Es útil señalar que, en general, cuando los óptimos pesos de las observaciones obtenidos por las soluciones analíticas al problema de SOD son efectivamente realizables en la práctica, permiten reducir considerablemente los costos de medición en las campañas de observación (menor tiempo de ocupación en las estaciones y menor número de repeticiones entre otros aspectos) y alcanzar simultáneamente los objetivos de precisión deseados para las coordenadas de los puntos de la red.

Otros estudios sobre SOD realizados utilizando otras técnicas se encuentran en: Xu (1989,1990) y Chang et.al. (1996).

2 METODOLOGÍA :

2.1 Marco Teórico:

Sea el modelo singular de Gauss-Markov (SGMM):

$$E\{y\}_{n \times 1} = A_{n \times m} X_{m \times 1}, \quad y \approx (AX, \sum_y = \sigma_0^2 Q_y) \quad (1)$$

ó equivalentemente $y - e = AX$ (1'), con $rank(A) < m$

Con n = al número de observaciones; m = número de parámetros;

X = Vector de los parámetros.

Y = Vector de las observaciones

σ_0^2 = Factor de la varianza

$A_{n,m}$ = Matriz de diseño

\sum_y = matriz de varianza covarianza de las observaciones

$P_{n,n}$ = Matriz de pesos de las observaciones

$Q_{m,m}$ = Matriz de coeficientes de peso de las incógnitas = Matriz de criterio

\sum_x = Matriz de varianza covarianza de las incógnitas

(⁺) = Inversa generalizada de Moore-Penrose

La conexión entre las ecuaciones normales -que surgen de aplicar el método de mínimos cuadrados a (1)-, con la matriz de criterio como una matriz de varianza covarianza ideal (supondremos factor de la varianza $\sigma_0^2 = 1$), es según Schaffrin (1983), (ver Schmitt, G., 1985):

$$A^t P A = Q_x^+ \quad (2)$$

Multiplicando (2), en ambos miembro por la matriz de criterio Q_x

$$Q_x A^t P A Q_x = Q_x Q_x^+ Q_x = Q_x \quad (3)$$

Si definimos $k = Q_x A^t$ (4), entonces (3) queda:

$$k P k^t = Q_x \quad (5)$$

La ecuación (5), puede ser convertida a un conjunto de ecuaciones lineales (ver el Anexo para la definición del producto Khatri-Rao " \odot " y del operador "vec" :

$$(k \odot k) p = q \quad (6)$$

Con: $p = \text{vecd } P$ (6.1) y $q = \text{vec } Q_x$ (6.2)

La solución general de (6) ó equivalente al problema de Diseño de segundo orden ó también llamado problema de los Pesos, es de acuerdo a Schaffrin (1983):

$$p = (k \odot k)^+ q \quad (7.1)$$

ó,

$$p = K^+ q \quad (7.2)$$

con, $K = (k \odot k)$.

Si, K es de rango completo de columnas :

Es decir: $rank(k) = m$

Entonces de acuerdo a Koch, R (1988) se puede utilizar en (7.1) o (7.2) la Inversa Generalizada Izquierda de $(k \odot k)$, la cual es:

$$IGI = (K^t K)^{-1} K^t \quad (8)$$

siendo: $IGI_{n,m,m} K_{m,m,n} = I_{n,n}$, con $I_{n,n}$ = matriz identidad de tamaño n .

Se demuestra en el teorema (ver Koch, 1988, p.63), que:

$$K_{n,m,m}^+ = (K^t K)^{-1} K^t = IGI_{n,m,m} \quad (9)$$

O sea, K^+ es también una inversa izquierda de K . Por lo tanto, reemplazando (8) y (9), en (7.1) ó (7.2) las soluciones quedan:

$$p_{n,1} = K^+ q = (k \odot k)^+ q \quad (10.1)$$

ó,

$$p_{n,1} = IGI q = \left[(K^t K)^{-1} K^t \right] q \quad (10.2)$$

Por otro lado, K^+ también puede ser obtenido según otro teorema (ver Koch, 1988, p.63):

$$K^+ = K^t (KK^t)^- K (K^t K)^- K^t \quad (11)$$

El superíndice “-”, en (11) indica la inversa generalizada.

Por lo que, la solución también se obtiene reemplazando (11) en (10.1):

$$p_{n,1} = K^t (KK^t)^- K (K^t K)^- K^t q \quad (12)$$

Los pesos “ P_c ” que surgen de utilizar las ecuaciones (10.1) ó (10.2) nos permiten arribar a matrices de coeficientes de peso calculadas : Q_{xc} . Una forma para comparar Q_x con Q_{xc} se obtiene vectorizando la diferencia:

$$D = Q_x - Q_{xc} \quad (13)$$

de acuerdo a:

$$d = vec(D) \quad (14)$$

y luego, calculando el escalar $d^t d$, el cual permite una rápida y global visualización de la calidad de la aproximación de Q_{xc} a Q_x .

2.2 Método Propuesto:

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, el método que aquí se propone para el diseño óptimo ($d^t d = \text{mínimo}$), de una red geodésica a partir de la solución al problema de segundo orden (matriz de peso “P”), y una matriz de criterio dada como indicador de la precisión de las incógnitas (Q_x), es:

- 1) Definir el modelo singular de Gauss-Markov (1), o equivalentemente establecer las relaciones de observación (1’) para la red bajo estudio. Esto significa calcular la

matriz de diseño A de la estructura teniendo en cuenta las “ n ” observaciones proyectadas y las “ m ” incógnitas establecidas.

- 2) Adoptar una matriz de criterio Q_x como objetivo de precisión a alcanzar.
- 3) Calcular una solución P_c utilizando la ecuación (10.1), que corresponde a la solución general de (6) y que involucra la obtención de k, K, IGI (de acuerdo a (8)), K^+ (que se puede calcular con (11)), y utilizando los operadores “Khatri-Rao” y “vec” como se indica en la mencionada ecuación.
- 4) Calcular $Q_{xc} = (A^T P_c A)^+$, siendo P_c una matriz diagonal de orden $o(P_c) = n \times n$ y que contiene a los pesos de las observaciones.
- 5) Calcular $D = Q_x - Q_{xc}$ y vectorizar según: $d = \text{vec}(D)$.
- 6) Finalmente, calcular $d^T d$, la que, como se indico anteriormente es una medida global de la calidad de la aproximación a la matriz de criterio dada.

2.3 Ejemplos

La red geodésica bidimensional (trilateración) que a continuación se analiza en un sistema de referencia euclidiano (X, Y) , consiste de seis puntos ($m=12$) interconectados mediante $n=15$ distancias horizontales como se muestra en la Figura más abajo.

El vector X contiene los 12 parámetros que son: los diferenciales dX_i y dY_i , que se relacionan con las coordenadas cartesianas de los puntos de la siguiente forma: $X_i = X_{0i} + dX_i$, $Y_i = Y_{0i} + dY_i$, con $i=1 \dots 6$, siendo X_{0i}, Y_{0i} las llamadas coordenadas aproximadas de los puntos de la red y que se muestran en la Tabla 1.

La matriz de diseño A del (SGMM) de (1) está formada por los coeficientes que surgen de linealizar la función distancia para las 15 mediciones alrededor de las coordenadas aproximadas (X_{0i}, Y_{0i}) . La matriz de criterio que se establece como objetivo de precisión es la matriz de identidad " $I_{12 \times 12}$ ", o sea: $Q_x = I_{12 \times 12}$.

Tabla 1. : Coordenadas aproximadas para el Diseño Nro. 1

Punto	Xo (m)	Yo (m)
1	510.14	54.27
2	700.20	350.75
3	450.75	680.73
4	100.23	330.31
5	480.10	300.28
6	580.70	370.50

Se procedió como se indica a continuación:

- 1) Para el Diseño de red Nro. 1 que se forma con las coordenadas aproximadas indicadas en la Tabla 1 y las 15 distancias indicadas en la Figura: Se utilizó la metodología anteriormente descrita y se calcularon los pesos óptimos para las distancias, la matriz Q_{xc} y su correspondiente medida global de la calidad de la aproximación a la matriz de criterio dada $Q_x = I$. Estos resultados son mostrados en la Tabla 2. Luego, a partir del Diseño Nro. 1 se generaron 3 diseños de red alternativos que a continuación se definen y que se procesaron de acuerdo a la metodología propuesta.
- 2) Se formó un Diseño de red Nro. 2, modificando las coordenadas aproximadas del punto 3, alejándola de su posición original, como se indica en la Tabla Nro. 3. Se utilizó la metodología anteriormente descrita y los resultados obtenidos son mostrados en la Tabla 4.

- 3) Se formó un Diseño de red Nro.3 mediante la eliminación de la distancia entre los puntos 5 y 6, pero manteniendo las coordenadas aproximadas para el Diseño Nro.1 de la Tabla 1. Los resultados se muestran en la Tabla 5.
- 4) Se formó un Diseño de red Nro.4 mediante la eliminación de la distancia entre los puntos 1 y 3, pero manteniendo las coordenadas aproximadas para el Diseño Nro.1 de la Tabla 1. Los resultados se muestran en la Tabla 6.
- 5) Se realizó un análisis de los resultados obtenidos.

Figura : Red geodésica bidimensional (trilateración)

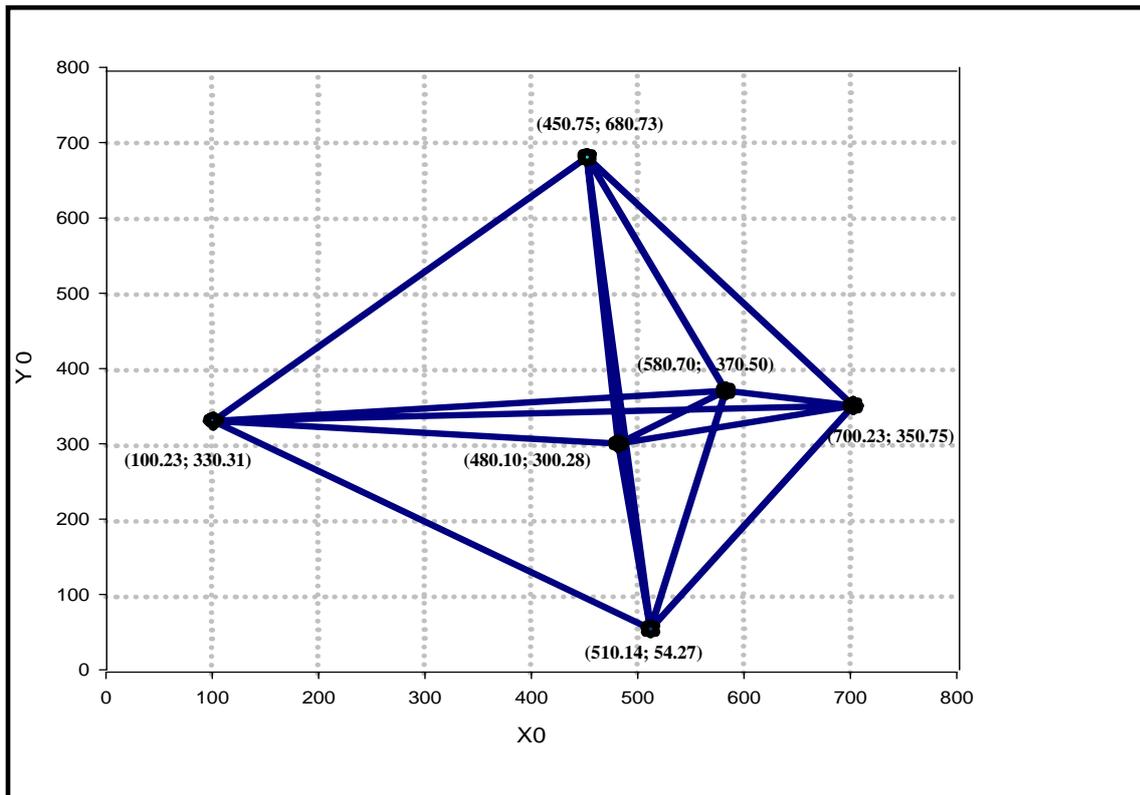


Tabla 2. Resultados correspondientes al Diseño Nro.1

Nota : Pc muestra los pesos correspondientes a las distancias.

Dist	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	2-5	2-6	3-4	3-5	3-6	4-5	4-6	5-6
Pc	0.33	0.07	0.37	0.26	0.25	0.31	0.11	0.25	0.27	0.39	0.24	0.27	0.22	0.18	0.28
Diag Qxc				1.27	0.85	1.00	1.25	1.03	0.86	0.82	0.85	1.30	1.42	1.27	1.30
$d^t d$	9.5588														

Tabla 3. : Coordenadas aproximadas para el Diseño Nro. 2

Punto	Xo (m)	Yo (m)
1	510.14	54.27
2	700.20	350.75
3	460.00	1240.25
4	100.23	330.31
5	480.10	300.28
6	580.70	370.50

Tabla 4. Resultados correspondientes al Diseño Nro.2

Nota :Pc muestra los pesos correspondientes a las distancias.

Dist	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	2-5	2-6	3-4	3-5	3-6	4-5	4-6	5-6
Pc	0.31	0.04	0.35	0.28	0.26	0.28	0.16	0.25	0.30	0.33	0.20	0.23	0.24	0.21	0.26
Diag Qxc				1.88	0.89	1.11	1.52	0.78	0.74	0.84	1.53	1.26	1.49	1.41	1.40
$d^t d$	16.6865														

Tabla 5. Resultados correspondientes al Diseño Nro.3

Nota :Pc muestra los pesos correspondientes a las distancias.

Dist	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	2-5	2-6	3-4	3-5	3-6	4-5	4-6
Pc	0.32	0.06	0.36	0.27	0.30	0.31	0.08	0.31	0.29	0.38	0.26	0.27	0.24	0.23
Diag Qxc			1.27	0.84	0.99	1.27	1.03	0.86	0.79	0.86	1.52	1.51	1.48	1.46
$d^t d$	10.1384													

Tabla 6. Resultados correspondientes al Diseño Nro.4

Nota : Pc muestra los pesos correspondientes a las distancias.

Dist	1-2	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	2-5	2-6	3-4	3-5	3-6	4-5	4-6	5-6
Pc	0.34	0.37	0.27	0.26	0.32	0.11	0.25	0.27	0.40	0.25	0.28	0.21	0.18	0.28
Diag Qxc			1.26	0.95	1.02	1.22	1.01	0.96	0.83	0.84	1.30	1.37	1.28	1.26
$d^t d$	9.7905													

3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Del análisis de la solución de la matriz de peso del diseño Nro. 1 se observa que (ver Tabla Nro.2), como lo indica la experiencia: las distancias mayores resultan tener menor peso, en concordancia con su mayor error.

Recapitulando: los diseños alternativos al diseño número 1 son:

Diseño número 2: se modifican las coordenadas aproximadas del punto 3 del diseño número 1 (ver tabla número 2).

Diseño número 3: se elimina la distancia entre los punto 5 y 6. las coordenadas de los puntos de la red se indican en la tabla número 1.

Diseño número 4: se elimina la distancia entre los puntos 1 y 3. Las coordenadas de los puntos de la red se indican en la tabla número 1.

Del análisis de estos diseños alternativos para la red se observa claramente que el diseño Nro. 4 (ver Tabla 6) es más favorable que los diseños Nro. 2 (ver Tabla 4) y Nro. 3 (ver Tabla 5), pues $d^t \cdot d = 9,7905$ es menor que 16,6865 y 10,1384 respectivamente. Es decir, el diseño Nro.4 conduce a una mejor medida global de la calidad de la aproximación respecto de la matriz de criterio que los diseños Nro.2 y Nro.3.

4 CONCLUSIONES

Se mostró que los resultados de aplicar la metodología propuesta para la solución óptima del SOD que aprovecha la solución general presentada por Schaffrin, B. (1983), los conceptos y propiedades de Inversa Generalizada Izquierda como fue introducida por Koch, R. (1988) y una matriz de criterio dada en una red típica -como lo es una Trilateración bidimensional- son coherentes respecto a lo observado experimentalmente.

Se mostro además, como el método descrito es aplicable a otros diseños alternativos de red, permitiendo de este modo ampliar y enriquecer el análisis del problema del SOD para una particular red que se encuentre en su etapa de ejecución o de diseño.

5 ANEXO

Sean las matrices (Grafarend, E., 1993):

$$A := [a_{ij}] = [a_1, \dots, a_m], \quad o(A) = n \times m \quad a_{ij} \in \mathfrak{R} \quad [a_{ij}] \in \mathfrak{R}^{n \times m}$$

$$B := [b_{ij}] = [b_1, \dots, b_m], \quad o(B) = k \times m \quad b_{ij} \in \mathfrak{R} \quad [b_{ij}] \in \mathfrak{R}^{k \times m}$$

$$D := [d_{ij}] = [d_1, \dots, d_l], \quad o(D) = k \times l \quad d_{ij} \in \mathfrak{R} \quad [d_{ij}] \in \mathfrak{R}^{k \times l}$$

El producto Kronecker-Zehfuß se define como:

$$E := D \otimes A = [e_{ij}] \quad D \otimes A := [d_{ij} \cdot A], \quad o(E) = o(D \otimes A) = kn \times lm$$

El producto Khatri-Rao, se define como:

$$C := B \odot A = [b_1 \otimes a_1, \dots, b_m \otimes a_m], \quad o(C) = kn \times m$$

El operador $vec(A)$, se define como el vector:

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}_{nm \times 1}$$

6 REFERENCIAS

- Baarda, W., S-Transformations and criterion matrices. *Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy. New Series. Volume 5. Number 1,1:168. Second Revised Edition, 1981.*
- Benzao, T., and Shaorong, Z., Optimal design of monitoring networks with prior deformation information. *Survey Review*, 33, 258, 1995.
- Chang, Y., Chen, Ching-Ho and Chen, Chung-Sung, Optimal Observation design of surveying network using artificial neural network. *Geomatics Research Australasia. No.64, 1:16,1996*
- Crosilla, F., About the construction of criterion matrix. *Proc. Survey Control networks meeting of study group 5B. Munchen. FIG, 1982.*
- Crosilla, F., A Criterion Matrix for Deforming Networks by Multifactorial. In Grafarend, E.W. and Sanso, F., *Optimization and Design of Geodetic Networks. Springer-Verlag. ISBN: 3-540-15739-5. Section 0, 429: 435, 1985.*
- Grafarend, E., Optimisation of Geodetic Networks. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini. Istituto Geografico Militare. Firenze. Anno XXXIII No.4., 351: 407, 1974.*
- Grafarend, E., and Schaffrin, B., Kriterion - Matrizen I - zweidimensionale homogene und isotrope geodatische Netze. *zfv. Germany, 1979*
- Grafarend, E.W., Criterion Matrices for Deforming Networks. In Grafarend, E.W. and Sanso, F., *Optimization and Design of Geodetic Networks. Springer-Verlag. ISBN: 3-540-15739-5. Section N, 363:426, 1985.*
- Grafarend, E., Krumm, F., and Schaffrin, B., Criterion matrices of heterogeneously observed threedimensional networks. *Manuscripta geodaetica, 10:3-22. Springer-Verlag. Germany. 1985.*
- Grafarend, E.W. and Schaffrin, B., *Ausgleichungs-Rechnung in Linearen Modellen. ISBN 3-411-16381-X, Mannheim, Germany 1:483, 1993.*

- Helmert, F.R., Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie, *Z. Math. Phys.* 13,73, 1868.
- Kaltenbach, H., and Schmitt, G., A new approach for criterion matrices based on graph theory. *Manuscripta geodaetica*. Springer-Verlag. Germany, 1988.
- Koch, K.R., *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer-Verlag. Berlin, 1988.
- Kuang, S.L ., Chrzanowski, A. and Chen, Y.Q., A unified mathematical modelling for the optimal design of monitoring networks. *Manuscripta geodaetica*. Springer-Verlag. Germany, 1991.
- Schaffrin, B. and Grafarend, E., Kriterion - Matrizen II- zweidimensionale homogene und isotrope geodatische Netze. *zfv*. Germany, 1982.
- Schaffrin, B., On some recent modifications regarding the optimal design of geodetic networks. *Geodesy* 79, 43-56, 1983.
- Schmitt, G., Second Order design of a free distance network, considering different types of criterion matrices. *Bulletin Géodesique*. v54, 531:543. Paris. Francia, 1980.
- Schmitt, G., Second Order Design. In: Grafarend, E.W. and Sanso, F., *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer-Verlag. ISBN: 3-540-15739-5. Section D, 74:122, 1985.
- Wimmer, H., Second Order Design of Geodetic Networks by an Iterative Approximation of a Given Criterion Matrix. *Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of The International Association of Geodesy*, Munich, August 31 to September 5, Volume III: Optimal Design of Geodetic Networks, edited by Sigl Rudolf, 112: 128. 1981.
- Xu , P., Multi-objective optimal second order design of networks. *Bulletin Geodesique*. Volume 63. Número 3, 297: 309. 1989.
- Xu , P., The Second Order Design of Geodetic Networks Using Multiobjective Optimization Theory. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*. Anno XLIX No. 3 Istituto Geografico Militare. Firenze, 185: 197. 1990.