

## **ANÁLISIS DE ANALOGÍAS EN LA MECÁNICA COMPUTACIONAL Y ESTRUCTURAL**

**Carlos F. Estrada y Luis A. Godoy**

*CONICET y Departamento de Estructuras, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba,  
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, cestrada@efn.uncor.edu  
<http://www.efn.unc.edu>*

**Palabras Clave:** Analogías, mapeo estructurado, mecánica estructural, razonamiento analógico.

**Resumen.** En este trabajo se discute el uso de analogías en la mecánica de estructuras y mecánica computacional. La esencia de las analogías es considerar un objeto o situación en un contexto y establecer relaciones de similitud con otro objeto o situación en otro contexto. Una de las formas para analizar una analogía es establecer un mapeo entre dos dominios considerados, que se conocen generalmente como dominio-fuente y dominio-meta. En este trabajo se caracteriza el mapeo a través de relaciones que son genéricas e independientes del problema físico. Se analizan varios casos de analogías en la mecánica de estructuras y la mecánica computacional. Se enfatizan los procedimientos involucrados en el razonamiento analógico, y se ponen en evidencia las reglas de mapeo estructurado. Adicionalmente, se considera cuándo y cómo se hace inferencia a las conclusiones a partir del dominio fuente, con el fin de poner en evidencia las limitaciones de las analogías.

## 1 INTRODUCTION

Una analogía es una forma de razonamiento usada repetidamente en el desarrollo de nuevas ideas en ciencias. En la mecánica de estructuras, la analogía más conocida es la de la membrana, propuesta por Prandtl en 1903 (Timoshenko y Goodier, 1970, pp. 303) para solucionar problemas de torsión. Esta analogía considera dos problemas, (a) una membrana homogénea soportada en sus bordes y bajo presión normal uniforme, con la misma geometría que (b) la sección transversal de una barra en torsión. Hay forma experimental sencilla de solucionar el problema de la membrana, mientras que hacia inicios del Siglo XX resultó más complejo solucionar el problema de torsión. Gracias al uso de la analogía se generaron predicciones y conocimientos nuevos de torsión para secciones de formas complejas. En este trabajo se estudian analogías más recientes, establecidas por diferentes autores en la mecánica computacional de sólidos y estructuras, como parte del contexto de justificación de nuevos desarrollos.

Frecuentemente, un razonamiento por analogía intenta relacionar situaciones previas como guía para iluminar la comprensión o solución de situaciones nuevas. En este sentido, el razonamiento analógico tiene que ver con la inducción, pero mientras que la inducción hace inferencias de lo específico a lo general de una misma situación, la analogía trata de hacer inferencias entre contextos diferentes. En la actualidad, el estudio de analogías constituye un área de interés dentro de la epistemología (Vosniadou y Ortony, 1989; Gentner et al., 2001). Las teorías de analogías describen cómo se deriva el significado de una analogía a partir del significado de sus partes, entendiéndose como partes a los objetos y sus relaciones. No toda comparación es analogía porque también existen metáforas, similitud literal, etc., pero toda analogía usa comparaciones.

De acuerdo a la teoría vigente más aceptada (Gentner, 1983), una analogía puede interpretarse como un mecanismo estructurado de mapeo<sup>1</sup> entre dos dominios, uno llamado dominio-fuente (del cual se desprenden los objetos y sus relaciones) y otro llamado dominio-meta (al cual se trasladan relaciones). Esta es una de las funciones que puede cumplir una analogía, y esta función nos interesa en este trabajo para analizar de qué manera específica una analogía participa en la construcción y justificación de conocimientos nuevos.

Como han discutido varios autores, el grado de superposición en el proceso de mapeo de un dominio a otro no es una buena medida en una analogía, de modo que la importancia de una analogía no está centrada (solamente) en la cantidad de atributos que se relacionan; en otras palabras, no todo debe compararse sino lo esencial. Es importante la presencia no solo de mapeado entre objetos y atributos, sino también del mapeado de sus relaciones. Esto permite ver a las analogías como sistemas de objetos interconectados, es decir, como un sistema de relaciones interconectadas, que tiene como consecuencias que un cambio en una de las relaciones produce un cambio en la otra por el hecho de trasladar objetos y sus relaciones entre ambos dominios.

## 2 METODOLOGIA DEL ESTUDIO

Hay numerosos estudios en el campo de analogías, de los cuales uno de los autores ha revisado diferentes corrientes de aportes en Godoy (2002); Godoy (2007). De los varios enfoques posibles, para esta investigación se trabajará en el marco de la teoría de mapeado de estructuras de Gentner, poniendo énfasis en los procesos que se identifican desde la formulación a la consolidación de una analogía.

De acuerdo a French (2002), existen cuatro procesos fundamentales en un razonamiento

---

<sup>1</sup> El término “mapeado” es nuestra traducción del inglés *mapping*.

analógico:

1. El **reconocimiento** del dominio-fuente dada la descripción del dominio-meta;
2. La **elaboración y evaluación** del mapeo entre ambos dominios;
3. La **transferencia** de información desde el dominio-fuente al dominio-meta;
4. La **consolidación** de las conclusiones.

El trabajo de French se enmarca en la teoría del mapeado estructural. El segundo punto del razonamiento analógico puede ser conceptualizado a través de una serie de reglas que han sido explicitadas por [Gentner \(1983\)](#) de la manera siguiente:

(a) **Mapeado de atributos.** La primera regla dice:

$$A(bi) \rightarrow A(ti) \quad (1)$$

donde los  $bi$  y  $ti$  son los objetos del dominio-fuente y del dominio-meta respectivamente. La letra  $A$  se refiere a atributos del objeto y el símbolo de la flecha indica el proceso de mapeo de un dominio a otro. La limitación puesta en el número de atributos que se mapean hace que sea necesario descartar otros atributos que no entran en la operación.

(b) **Mapeado de relaciones entre objetos.** La segunda regla del proceso de mapeo dice que las relaciones entre objetos deben mapearse tal cual se expresan en el dominio-fuente. En otras palabras, en el dominio-fuente se tienen interconexiones entre las proposiciones y cuando se hace un mapeo se trasladan las mismas interconexiones. Esta regla puede expresarse en forma similar a la regla anterior, tomando la forma que se muestra a continuación:

$$R(bi,bj) \rightarrow R(ti,tj) \quad (2)$$

donde  $bi$ ,  $bj$  y  $ti$ ,  $tj$  son los objetos del dominio-fuente y dominio-meta, respectivamente, relacionados a través de alguna función  $R$  que representa la relación considerada.

(c) **Mapeado de sistemas de relaciones.** La tercera regla del mapeo estructurado, tiene en cuenta los sistemas de relaciones:

$$R'(R_1(bi,bj), R_2(bk,bl)) \rightarrow R'(R_1(ti,tj), R_2(tk,tl)) \quad (3)$$

Los ejemplos que se presentan en este trabajo intentan mostrar los cuatros procesos anteriores, cómo y cuándo se aplican las reglas de mapeo, cuándo se realiza una inferencia y se obtienen nuevos conocimientos.

Para identificar trabajos que incluyen analogías en mecánica computacional se llevó a cabo una búsqueda a partir del 2000 de artículos en *Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering* (identificándose [Mosler y Meschke, 2003](#); [Leung y Luang, 2004](#); [Rosati y Valoroso, 2004](#); [Wilke et al., 2006](#)) y en *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (identificándose [Miehe y Lambrecht, 2002](#); [Luccioni y Oller, 2002](#); [Bottasso et al., 2004](#); [Johnson y Chen, 2005](#); [Markou et al., 2006](#)). Adicionalmente, se identificaron artículos en otras revistas del área ([Lam et al., 2001](#); [Konahai et al., 2003](#); [Lenyiel y You, 2004](#); [Abe y Suzuki, 2004](#)). Hay trabajos que usan analogías en el área de mecánica de estructuras ([Peek, 1997](#); [Wendel, 2004](#)), en los que la novedad radica en que se unifican conocimientos: lo que se pensaba que eran cosas distintas, en realidad están gobernadas por las mismas ecuaciones.

En total se consideran aquí cinco casos de analogías, de los cuales dos son de mecánica computacional de sólidos, dos del área de ingeniería estructural y el restante de sismología.

### 3 RECONOCIMIENTO DE LA FUENTE

En cada caso se inicia el estudio declarando de manera explícita cuál es la analogía en

estudio y luego se la explica con referencia a ambos dominios (fuente y meta). Para estructurar las analogías se ha usado el trabajo de [Godoy \(2002\)](#).

### 3.1 Analogía para establecer un marco teórico de análisis

Analogía: “La inestabilidad de mecanismos estructurales (META) ES COMO la inestabilidad de estructuras elásticas (FUENTE)”.

Este caso está relacionado con problemas de estabilidad, en particular con sistemas de mecanismos estructurales que contienen movilidad interna. Algunos de los diseños de estos mecanismos producen estructuras con singularidades que pueden llevar a configuraciones de deformaciones no deseadas.

Las singularidades en ingeniería estructural no son nuevas, sino que existen en las trayectorias de equilibrio de sistemas elásticos estructurales. Considerando un sistema estructural conservativo, descrito mediante la función de energía potencial total, se puede obtener un conjunto de ecuaciones de equilibrio haciendo estacionaria la energía potencial del sistema. Estas ecuaciones permiten representar las trayectorias de equilibrio. El estudio de estabilidad de estas trayectorias puede contener cuatro formas clásicas de inestabilidad, que son el punto límite y las bifurcaciones asimétrica, simétrica estable y simétrica inestable.

Conceptos similares pueden aplicarse en el estudio de mecanismos de estructuras, como se ilustra en la [Figura 1](#). La descripción de los mecanismos puede realizarse usando las ecuaciones de compatibilidad, en cuyo caso las trayectorias de compatibilidad de algunos mecanismos simples producen bifurcación asimétrica, de manera semejante a las trayectorias de equilibrio de sistemas estructurales elásticos ([Litvin, 1980](#); [Tarnai, 1999](#)). Esta similitud entre la bifurcación asimétrica de las trayectorias de equilibrio y las trayectorias de compatibilidad de los mecanismos, dio lugar al desarrollo de una analogía entre los dos dominios y se encontraron ejemplos de mecanismos que producen éstos y otros modos de bifurcaciones ([Lényel y You, 2004](#)).

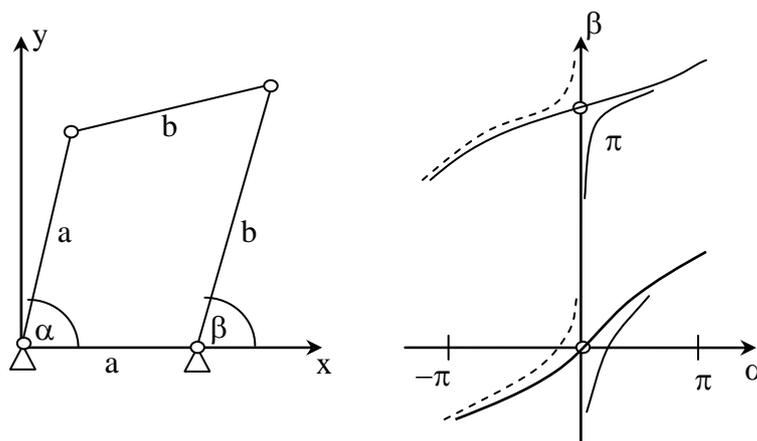


Figura 1: (a) Mecanismo de barras rígidas, (b) Trayectorias de compatibilidad. (Adaptado de Lényel y You, 2003).

Esta observación permite ver cómo, a partir de haber descubierto que las trayectorias de compatibilidad producían bifurcaciones, existía una posible similitud con las trayectorias de equilibrio y otros conceptos centrales de la teoría de estabilidad. Esta es la etapa de reconocimiento, donde por analogía se encontró similitud con la teoría de estabilidad de sistemas estructurales, que es el dominio-fuente en este caso. Nótese, que el dominio-meta es

el dominio sobre el que se está trabajando, o sea sobre mecanismos de estructuras.

La razón para definir una similitud con algún dominio, o la de buscar alguna analogía a partir de los conocimientos sobre otro dominio, ocurre en este caso por haber encontrado patrones similares en los resultados. Pero es posible extender la analogía para resolver algún problema en el dominio-meta. En efecto, durante el estudio de los mecanismos se encontraron dos problemas: Primero, que diferentes conjuntos de variables de estado producen trayectorias diferentes de compatibilidad. Segundo, que a lo largo de la trayectoria lineal, la matriz Jacobiana tenía filas reducidas, sugiriendo la existencia de una singularidad. Sin embargo, no se observaba una bifurcación en las trayectorias. Basados en este ejemplo, se pudo ver que los gráficos de las trayectorias de equilibrio o de compatibilidad por sí solos no eran elementos suficientes para revelar la verdadera naturaleza del comportamiento del problema en cuestión. Esto motivó a los autores de este trabajo (Lenyel y You, 2004) a utilizar la Teoría de Catástrofes como marco de estudio, porque esta teoría estudia en detalle el comportamiento de un sistema en una singularidad.

Nuevamente se muestra la etapa de reconocimiento que motivó a buscar nueva información contenida en la fuente, a partir de problemas que presentaban las trayectorias de compatibilidad. Nótese que lo que induce a buscar en el dominio-fuente es porque problemas similares aparecen en la teoría de estabilidad y ya se conocen sus posibles soluciones.

### **3.2 Analogía para establecer un modelo predictivo simplificado**

Analogía: “El comportamiento de un grupo de pilotes (META) ES COMO el comportamiento de una viga enterrada (FUENTE)”.

Este segundo caso es propio del área de ingeniería civil, más específicamente de la ingeniería en fundaciones. Cuando las estructuras están sujetas a excitaciones sísmicas se produce una interacción entre suelo y estructura. Este comportamiento ha dado origen a numerosos estudios para intentar resolver de manera efectiva elementos estructurales enterrados en una masa de suelo, más precisamente en el comportamiento de grupos de pilotes. Existen diferentes modelos que van desde discretizaciones que usan elementos finitos hasta modelos simplificados de vigas sobre fundaciones del tipo Winkler.

Como ilustración de la importancia que puede tener la interacción suelo-estructura en pilotes, se hace referencia a las consecuencias del sismo ocurrido al sur de la localidad de Hyogo (Japón) el 17 de Enero de 1995, que causó serios daños en pilas de fundación. Esto motivó a Konahai (2003) a mejorar la representación del comportamiento de un grupo de pilotes, considerando que (a) un grupo de pilotes siempre atrapa suelo entre ellos (como se observa cuando se extrae un cabezal con un grupo de pilas); y (b) que el comportamiento del suelo atrapado en conjunto con los pilotes puede ser visto como un elemento vertical de material compuesto. Konahai (2003) desarrolló un modelo simplificado basado en una analogía con una única viga vertical, formada por  $n$  pilas y el suelo atrapado entre ellas.

La necesidad de establecer una analogía para encontrar soluciones a este problema surgió porque los modelos utilizados aún no habían logrado representar correctamente el comportamiento de un grupo de pilotes. Adicionalmente, existían algunos modelos simplificados que tenían en cuenta en mayor o menor medida al suelo que quedaba atrapado entre los pilotes. Todo esto permitió realizar una analogía considerando como dominio-fuente el comportamiento de una única viga vertical. En este caso la analogía sirvió como un modelo físico del problema real, que es mucho más complejo.

La razón para definir esta similitud con el dominio-fuente, es la de predecir el comportamiento en el dominio-meta. Se busca en el dominio-fuente porque el problema de interacción entre suelo y estructura se puede resolver de una manera simple o bien porque se

conoce más sobre el comportamiento de interacción con el suelo.

### 3.3 Analogías como guías para establecer leyes de comportamiento

Analogía: “Las leyes que caracterizan Internet-quakes (META) SON COMO las leyes de sismicidad (FUENTE)”.

El tercer caso toma dominios de áreas de trabajo diferentes. Internet es un sistema complejo caracterizado por diferentes tipos de comportamientos (Abe y Suzuki, 2004). Estudios recientes mostraron que Internet tiene un comportamiento no estacionario. Para estudiar el estado de Internet, se realiza un experimento llamado Ping (Figura 2). Este experimento contiene series de tiempo de alto grado de componentes no estacionarias. En esta serie, existen dos escalas de tiempo separados: uno es la escala del usuario (típicamente de 1 hora) y la otra es una escala pequeña (100 ms), asociada con un cambio repentino en el patrón temporal, el cual es identificado con una suerte de catástrofe o sacudida y se denomina en inglés como “internet-quakes”.

La existencia de dos escalas de tiempo ocurre también en el mecanismo de sismos, en el cual se almacena energía interna en las zonas de las placas continentales y después de varios años la energía almacenada se libera en cuestiones de segundos o minutos. Inspirado en esta similitud, el autor pregunta si dos leyes empíricas para sismos, la ley de Omori (para un patrón temporal de réplicas) y la ley de Gutenberg-Richter (para la frecuencia y magnitud del sismo), pueden ser utilizadas para caracterizar Internet-quakes.

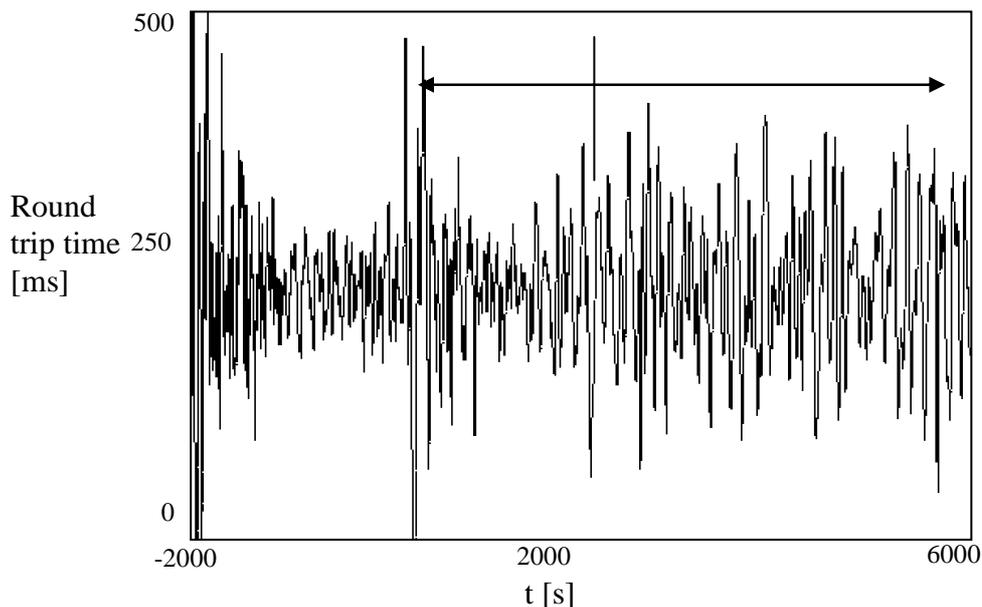


Figura 2: Señales obtenidas a través del comando Ping. (Adaptado de Abe y Suzuki, 2004).

Lo que motiva a realizar esta analogía es la similitud de comportamiento de las evidencias experimentales que se tienen acerca del comportamiento de Internet, más precisamente sobre la señal Ping que sirve para medir la efectividad de una red. La finalidad de la analogía es caracterizar el comportamiento de Internet (dominio-meta) a partir de los conocimientos que se tienen de la ingeniería sísmica (dominio-fuente). En este ejemplo no se intenta resolver un problema específico sobre el dominio-meta pero sí se desea caracterizar el fenómeno de Internet-quakes a través de mostrar una similitud con el sismo.

Nótese que hasta el momento se ha intentado mostrar cómo reconocer el dominio-fuente.

La búsqueda y reconocimiento de una fuente lleva implícito que se está haciendo una analogía. A su vez, el razonamiento analógico está motivado por haber encontrado similitud de un comportamiento y tratar de caracterizarlo a partir de conocimientos provenientes de una fuente, o por intentar resolver un problema específico y conocer soluciones posibles que están presentes en el dominio-fuente.

### 3.4 Analogía como guía para establecer una metodología

Analogía: “El movimiento de una malla de elementos finitos (META) ES COMO el movimiento de un sistema de resortes (FUENTE)”.

El siguiente caso trata de la técnica de mallado para problemas con mallas móviles en el método de elementos finitos. El uso de aproximaciones con mallas móviles es la técnica más comúnmente utilizada, porque la generación de una nueva malla es más costosa desde el punto de vista computacional. Las metodologías más utilizadas son las basadas en lo que se conoce como “analogía del resorte” (Markou et al., 2006).

En un problema computacional, por ejemplo en la modelación de la interacción entre fluido y estructura, el movimiento de la malla durante el tiempo de integración puede tenerse en cuenta a través de la regeneración de la malla o a través de un mallado adaptativo considerando por ejemplo la malla de fluido como un sistema pseudo-estructural con masas ficticias, con coeficientes de amortiguamiento y rigidez. En este caso el comportamiento del sistema está gobernado por una ecuación del tipo  $M \partial^2 u / \partial t^2 + C \partial u / \partial t + Ku = 0$ , donde  $M$ ,  $C$ ,  $K$  y  $u$  son las matrices de masa ficticia, amortiguamiento, rigidez y vector de desplazamiento respectivamente.

El sistema análogo (pseudo-estructural) puede ser excitado al imponer sobre los nudos de la malla originalmente localizados sobre el borde  $\Gamma_m$  una condición de desplazamiento prescrito, de modo que  $u(t) = \bar{u}(t)$ , donde  $\bar{u}$  denota el vector de desplazamiento del borde móvil  $\Gamma_m$ . Si se considera que cada elemento de la malla puede ser tratado como un sistema de resortes, donde los resortes ficticios no tienen masa ni amortiguamiento asociado, el sistema pseudo-estructural puede ser analizado a través de un método pseudo-estático  $Ku = 0$  con  $u = \bar{u}$  sobre  $\Gamma_m$ , donde  $K$  es una matriz de rigidez ficticia que nace a partir de utilizar una analogía de resorte.

Para cada instante de tiempo, la nueva malla (dominio-meta) se obtiene a partir de resolver un sistema de resortes (dominio-fuente). Nótese que en este caso la analogía se abandona después de encontrada la nueva posición de equilibrio de los nudos y el análisis del problema de interacción entre fluido y estructura sigue su curso.

### 3.5 Analogía formal

Analogía: “La disipación visco-elástica térmica (META) ES COMO un modelo visco-elástico de material de Maxwell (FUENTE)”.

El último caso es sobre la disipación visco-elástica térmica de componentes de caucho (Johnson y Chen, 2005). La disipación mecánica es dificultosa de computar cuando el modelo constitutivo se define a través de una integración a lo largo del tiempo, donde la disipación de energía viscosa se expresa como una doble integral de convolución. En este ejemplo se propone resolver el término de disipación (dominio-meta) mediante una analogía de un modelo constitutivo basado en la ecuación de un material del tipo Maxwell (dominio-fuente) (Figure 3).

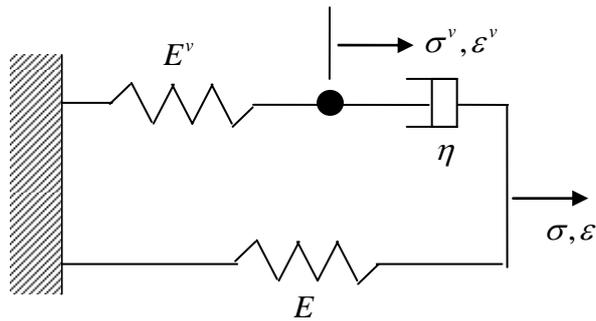


Figure 3: Modelo de Maxwell unidimensional.

Para llegar a la analogía se realiza una aproximación basada en descomponer el campo de tensiones en una componente elástica y otra visco-elástica, y la forma débil de la ley constitutiva del material se define a través de una serie denominada Prony. La forma de la ecuación en diferencias finitas obtenida por la serie de Prony es similar a la ecuación en diferencias finitas para sólidos tipo Maxwell. Es decir que primero se aproxima la doble integral de convolución a través de una serie numérica y como consecuencia resulta que la forma de la ecuación obtenida es análoga a lo que se conoce sobre un modelo unidimensional de Maxwell (dominio-fuente).

## 4 ELABORACIÓN Y EVALUACIÓN

### 4.1 Mapeado de clasificación de inestabilidades

Analogía: “La inestabilidad de mecanismos estructurales ES COMO la inestabilidad de estructuras elásticas, PORQUE las formas de singularidades en las condiciones de compatibilidad SE MAPEAN EN las formas de singularidades en las condiciones de equilibrio”.

En el primer caso, para considerar la elaboración y evaluación de la analogía, los autores consideran la teoría de catástrofes. Sin entrar en detalles de rigor, la teoría básicamente permite encontrar la forma canónica de la energía potencial cuando la matriz de la energía potencial  $V$  es singular. Luego se puede obtener un listado de ecuaciones canónicas y su respectiva forma de equilibrio. Entonces, volviendo al dominio-meta y tomando un ejemplo de un sistema mecánico, se plantea la condición de compatibilidad y a través de una serie de pasos matemáticos es posible obtener una ecuación cuya forma se corresponde con una de las ecuaciones de equilibrio de la Teoría de Catástrofes.

Considerando un sistema de cuatro barras articuladas de la Figura 1(a), se determina su ecuación de compatibilidad y luego, a través de las reglas de mapeo estructurado, se puede obtener la analogía comparando cada término de las ecuaciones en ambos dominios. De esta manera se tiene:

$$R(b1, b2) \xrightarrow{\text{mapea}} R(t1, t2) \quad (4)$$

$$R(3x^2 + t_1) \xrightarrow{\text{mapea}} R\left(u^2 - \left(\frac{2ab}{a^2 + ab + 2b}\right)^2 v^2\right) \quad (5)$$

donde

$$b1 = 3x^2 \xrightarrow{\text{mapea}} t1 = u^2 \quad (6)$$

$$b2 = t1 \xrightarrow{\text{mapea}} t2 = -\left(\frac{2ab}{a^2 + ab + 2b}\right)^2 v^2 \quad (7)$$

De modo que se necesita de un proceso de elaboración y evaluación entre ambos dominios. Así, se pueden establecer ejemplos con diferentes mecanismos y encontrar la respectiva expresión de equilibrio en el dominio-fuente y establecer correlaciones entre expresiones de compatibilidad de mecanismos y ecuaciones de equilibrio de la Teoría de Catástrofes.

#### 4.2 Mapeado de rigideces

Analogía: “El comportamiento de un grupo de pilotes ES COMO el comportamiento de una viga enterrada, PORQUE las rigideces del grupo SE MAPEAN EN la rigidez de la viga, CONSIDERANDO (a) que el suelo se mueve en conjunto con las vigas; (b) que se desprecia el efecto friccional; (c) que en el extremo superior, los pilotes están fijos a un cabezal”.

En este caso, el dominio-fuente está relacionado con la analogía de una viga vertical. Para establecer la analogía, se mapea la matriz de rigidez de una viga simple de rigidez  $EI_{simple}$  en el dominio-fuente, hacia el dominio-meta, como  $n(EI_{simple})$ , donde  $n$  es el número de pilotes. De igual manera, parámetros como el área y el módulo elástico pasan del dominio-fuente al dominio-meta considerando ponderación de una superficie compuesta por pilotes y suelo.

Si en el modelo el suelo y las  $n$  pilas se dividen en  $n_L$  capas horizontales y luego se aplican las reglas de mapeo se obtiene:

$$R(b1, b2) \xrightarrow{\text{mapea}} R(t1, t2) \quad (8)$$

$$R(M_{int} = [D_{simple}]^{-1} \{\Delta\theta\}) \xrightarrow{\text{mapea}} R(M_{int} = [D_{compuesto}]^{-1} \{\Delta\theta\}) \quad (9)$$

donde  $M_{int}$  es el momento flector de la viga,  $[D]$  es la matriz de rigidez,  $\Delta\theta$  es el vector de giros.  $[D]$  se expresa en el dominio-meta como:

$$[D_{compuesto}] = \begin{bmatrix} 2 \frac{h1}{EI} & \frac{h1}{EI} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h1}{EI} & 2\left(\frac{h1}{EI} + \frac{h2}{EI}\right) & \frac{h2}{EI} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{h2}{EI} & 2\left(\frac{h2}{EI} + \frac{h3}{EI}\right) & \frac{h3}{EI} & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \frac{hn_{L-1}}{EI} \\ 0 & \dots & & \dots & \frac{hn_{L-1}}{EI} & 2\left(\frac{hn_{L-1}}{EI} + \frac{hn_L}{EI}\right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que en el mapeo se cumple que:  $EI_{simple} \xrightarrow{\text{mapea}} EI = nEI_{simple}$ .

Nótese que en este caso la elaboración de las relaciones entre ambos dominios conlleva una serie de condiciones. De hecho, estas condiciones también introducen limitaciones en los resultados y en las inferencias de las conclusiones.

### 4.3 Mapeado de leyes

Analogía: “Las leyes que caracterizan Internet-quake SON COMO las leyes de sismicidad, PORQUE las señales Ping SE MAPEAN EN registros sísmicos”.

El tercer ejemplo trata la analogía entre Internet y un movimiento sísmico. En este trabajo, se presentaron algunas evidencias experimentales para la validación de las leyes de Omori y Gutenberg-Richter. El experimento se llevó a cabo utilizando el comando Ping, el cual permite obtener un conjunto de señales, [Figura 2](#). Las señales se emitieron unas tras otras en intervalos de tiempo de 1 segundo. Los resultados muestran un comportamiento no estacionario (indicados con una flecha horizontal en la [Figura 2](#)) y cambios repentinos en el patrón temporal en una escala pequeña de tiempo, el cual constituye un Internet-quake.

La elaboración del mapeo, consiste en utilizar las leyes de sismología en el dominio-meta. Ubicados en la fuente, la ley de Omori expresa como  $N(t) = At^{1-p}$  donde  $N(t)$  es el número de réplicas,  $t$  es el tiempo de sacudida,  $A$  es una constante, y  $p$  es un exponente (que en un sismo va de 0.8 a 1.5). El proceso de mapeo utiliza la misma expresión al pasar al dominio-meta. En términos de las reglas de mapeo se tiene:

$$R(b1, b2) \xrightarrow{\text{mapea}} R(t1, t2) \quad (11)$$

$$R(m = (1/1.5) \log_{10} M - c) \xrightarrow{\text{mapea}} R(\mu = \log_{10} \tau + \gamma) \quad (12)$$

donde  $\mu$  es la “magnitud” de un Internet-quake,  $\tau$  el tiempo de viaje circular correspondiente con el momento sísmico y  $\gamma$  una constante. La evaluación de ambas leyes en el dominio-meta se lleva a cabo utilizando la evidencia experimental. De esa forma es posible encontrar los valores de las constantes. La analogía de las respuestas sirve para exportar una ley ya establecida en el campo sísmico.

### 4.4 Mapeado de ecuaciones dinámicas

Analogía: “El movimiento de una malla de elementos finitos ES COMO el movimiento de un sistema de resortes, PORQUE los movimientos en el interior de una malla SE MAPEAN EN los desplazamientos de un sistema de resortes, CONSIDERANDO QUE los resortes no tienen masa ni amortiguamiento”.

En este ejemplo, la analogía tiene como función resolver un problema de mallado. Es una analogía física, donde la malla de elementos finitos se considera como un sistema estructural formado por resortes. En términos de mapeo se tiene

$$R(b1, b2) \xrightarrow{\text{mapea}} R(t1, t2) \quad (13)$$

$$R([K]\{u\} = F) \xrightarrow{\text{mapea}} R(Ku = 0) \quad (14)$$

Si se considera la ecuación  $Ku = 0$  discretizada por elementos finitos, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} K_{\Gamma\Gamma} & K_{\Gamma I} \\ K_{I\Gamma} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{M\Gamma} \\ u_{MI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{\Gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow K_{II} u_{MI} = K_{I\Gamma} u_{M\Gamma} = \bar{f} \quad (15)$$

donde  $u_{M\Gamma}$  y  $u_{MI}$  son vectores de desplazamientos de los nudos del borde y del interior de la malla, respectivamente,  $K$  es la matriz de rigidez del sistema estructural ficticio y  $\bar{f}$  es el vector de fuerzas ficticias obtenidos a través de la conversión de un problema de Dirichlet a un problema equivalente de Neumann. Los subíndices  $M\Gamma$  denota los grados de libertad de los

nudos del borde de la malla  $\Gamma_m$  y  $MI$  corresponden a los nudos interior de la malla.

#### 4.5 Mapeado de modelos constitutivos

Analogía: “La disipación visco-elástica térmica ES COMO un modelo visco-elástico de material de Maxwell, PORQUE el incremento de tensiones para un tiempo SE MAPEA EN el incremento de tensiones en un material de Maxwell”.

El último ejemplo trata sobre un problema de disipación. Luego en términos del mapeo estructurado y agrupando variables para mayor claridad se tiene:

$$R(b1, b2, b3) \xrightarrow{\text{mapea}} R(t1, t2, t3) \quad (16)$$

$$\sigma_{n+1}^v = \left\{ \frac{\sigma_{n+1}^0 - \sigma_n^0}{\left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau}\right)} \right\} g + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \sigma_n^v \xrightarrow{\text{mapea}} \sigma_{n+1}^v = \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)\right) \hat{\sigma}_{n+1}^0 + \\ \left(\frac{\tau}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)\right) \hat{\sigma}_n^0 \end{array} \right\} g + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \sigma_n^v \quad (17)$$

donde

$$b1 = \frac{\sigma_{n+1}^0 - \sigma_n^0}{\left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau}\right)} \xrightarrow{\text{mapea}} t1 = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)\right) \hat{\sigma}_{n+1}^0 + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)\right) \hat{\sigma}_n^0 \quad (18)$$

$$b2 = g \xrightarrow{\text{mapea}} t2 = g \quad (19)$$

$$b3 = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \sigma_n^v \xrightarrow{\text{mapea}} t3 = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \sigma_n^v \quad (20)$$

donde  $\hat{\sigma}_n^0$  es el incremento de tensiones computado para el tiempo  $t_n$  usando un gradiente de deformación entre la configuración al tiempo  $t_{n-1}$  y  $t_n$ , y usando un módulo instantáneo del material  $E_0$ . El escalar  $g$  es una fracción definida en un modelo de Maxwell como  $g = E^v / (E + E^v)$ .

Luego del mapeo de las ecuaciones en diferencias finitas se mapea también el término de disipación del dominio-fuente al dominio-meta.

$$r(t) = \frac{(\sigma^v)^2}{E^v \tau} \geq 0 \quad (21)$$

Esta es la transferencia más importante de esta analogía, ya que el término disipativo, si bien es aproximado, es más simple de calcular que el término de la doble integral de convolución, la cual se expresa como

$$r(t) = E \int_{s_2=-\infty}^t \int_{s_1=-\infty}^t \frac{\partial \varepsilon(s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial \varepsilon(s_2)}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(2t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 > 0 \quad (22)$$

Nótese que en el caso de las analogías que se realizan en el área de estructuras la regla (a) se cumple totalmente al descartarse los atributos de los objetos, como se mencionó antes al

describirse los elementos de los dominios.

## **5 TRANSFERENCIA Y CONSOLIDACIÓN**

Esta etapa es muy importante desde el punto de vista del razonamiento analógico, ya que aquí se realiza la inferencia de nuevos conocimientos a través de las conclusiones.

### **5.1 Identificación de catástrofes en sistemas gobernados por compatibilidad**

Analogía: “La inestabilidad de mecanismos estructurales ES COMO la inestabilidad de estructuras elásticas, ENTONCES las singularidades en las condiciones de compatibilidad pueden caracterizarse usando la clasificación de la Teoría de Catástrofes”.

En el primer caso, la transferencia de información de un dominio a otro se hace cuando las ecuaciones de compatibilidad encuentran una similitud con las ecuaciones de equilibrio de las formas canónicas de la teoría de catástrofes. En efecto, los ejemplos analizados muestran que una bifurcación asimétrica de un mecanismo, [Figura 1\(b\)](#), es equivalente a la ecuación de la catástrofe denominada “pliegue” (del inglés *fold*); una bifurcación simétrica es equivalente a la ecuación de catástrofe denominada “cola de milano” (del inglés *swallowtail*), etc. De esta manera, se concluye que las condiciones de compatibilidad son similares a las ecuaciones de equilibrio en la teoría de estabilidad de sistemas estructurales vistas desde la perspectiva de la Teoría de Catástrofes.

### **5.2 Pilotes con separaciones pequeñas pueden representarse como un único elemento**

Analogía: “El comportamiento de un grupo de pilotes ES COMO el comportamiento de una viga enterrada, ENTONCES se pueden evaluar esfuerzos en un grupo de pilotes usando modelos de viga, PERO cuando la separación entre pilotes es pequeña”.

En este ejemplo, la transferencia de información se produce cuando se elaboran los resultados y se consolidan a través de la verificación con soluciones rigurosas o experimentales. Por ejemplo, en el estudio del efecto de grupo de pilotes bajo cargas dinámicas se obtuvo buena representación del comportamiento con la solución rigurosa estática del efecto de grupo de pilotes. A partir de estos resultados, se identifica cuándo el efecto de grupos de pilotes es importante y se concluye que, para un grupo de pilotes con una separación grande, cada pila trabaja por separado y puede ser analizada como un elemento estructural individual. En caso contrario, para separaciones menores, se debe considerar el grupo de pilotes en su conjunto, en cuyo caso la analogía de la viga vertical permite aproximar el comportamiento del grupo.

A la vista de lo expuesto, la inferencia se hace a partir de los resultados obtenidos por el modelo simple de la viga vertical. Todas las conclusiones están referidas a los resultados obtenidos en la analogía, y algo importante es que las mismas conclusiones establecen las limitaciones de la analogía.

### **5.3 Las leyes de caracterización sísmica pueden usarse para caracterizar Internet-quakes**

Analogía: “Las leyes que caracterizan Internet-quakes SON COMO las leyes de sismicidad, ENTONCES un Internet-quake puede ser caracterizado usando las leyes de Omori y de Gutenberg-Richter”.

Veamos el tercer ejemplo, la transferencia de información y consolidación de las conclusiones se realiza cuando se comparan los resultados experimentales con los valores obtenidos por las leyes de Omori y Gutenberg-Richter. Lo novedoso es que el efecto de

internetquake puede ser caracterizado de manera semejante a un sismo y que existe una analogía entre dos áreas que son muy diferentes. La similitud lleva implícito la siguiente conclusión: las leyes sísmicas de Omori y Gutenberg-Richter parecen poder representar comportamientos de varios sistemas complejos no estacionarios.

#### **5.4 Una malla deformada puede calcularse mediante la deformación de un sistema equivalente de resortes**

Analogía: “El movimiento de una malla de elementos finitos ES COMO el movimiento de un sistema de resortes, ENTONCES el movimiento de una malla puede determinarse como un proceso de deformación”.

En el ejemplo de mallado, la transferencia de información se realiza mediante pruebas numéricas sobre problemas de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones y también sobre problemas con grandes deformaciones inducidas sobre los nudos del borde (frontera móvil) y comparando la posición de la malla para distintos incrementos de tiempo. Los ejemplos numéricos se fundamentan en casos simples donde se comparan la distorsión de la malla y el número de interacciones. También se compara el comportamiento de la malla desde un punto de vista cualitativo o en términos de criterios geométricos. Por ejemplo, una forma de medir el comportamiento del método es a través de una medida cualitativa de la distorsión del elemento (una relación de radios entre el círculo inscripto y el circunscripto en un elemento). En este ejemplo, la analogía sirve para resolver un problema geométrico en el dominio-meta.

#### **5.5 La disipación visco-elástica térmica puede calcularse sin necesidad de resolver una doble integral de convolución**

Analogía: “La disipación visco-elástica térmica ES COMO un modelo visco-elástico de material de Maxwell, ENTONCES el término de disipación visco-elasto-térmico puede calcularse como la disipación de un modelo de Maxwell”.

En el último ejemplo la analogía sucede a partir de haber aproximado el comportamiento sobre el dominio-meta. En efecto, la analogía transfiere conocimiento del modelo de Maxwell sobre el término de disipación y su sencillez de cálculo comparado con la doble integral de convolución. La transferencia de información está limitada por la capacidad numérica del modelo de Maxwell (dominio-fuente).

## **6 DISCUSIÓN**

Los casos estudiados en este trabajo ilustran que hay diversidad de orígenes que pueden tener las analogías, cuando se plantean en el campo de mecánica computacional y aplicada. En general, la búsqueda aparece debido a dificultades de comprensión, caracterización o modelación en el dominio-meta, que se trata de una problemática compleja o poco estudiada. En ese sentido, la idea de plantear una analogía en mecánica computacional nace como una necesidad en el dominio-meta, y debido a la naturaleza de la disciplina, esta necesidad tiene una componente fuerte predictiva.

En ninguno de los trabajos estudiados se detalla cómo fue el proceso de establecer la analogía, y se la presenta como un producto acabado. Debido a que para un dominio-meta determinado hay infinitos posibles dominios-fuente de los cuales se pueden derivar analogías, los trabajos nos dejan sin ayuda sobre cuáles fueron las razones por las que se seleccionó una en particular. Seguramente hay un factor personal involucrado, que es el bagaje de conocimientos que tiene un investigador sobre otros problemas diferentes del que está

estudiando en el dominio-meta.

Los ejemplos estudiados en este trabajo parecen indicar que se identificaron similitudes en (a) ecuaciones que definen el problema (caso 5), (b) comportamientos provenientes de respuestas computadas (casos 1 y 3), (c) suposiciones sobre el comportamiento esperado previo a computar respuestas (caso 2 y 4).

Una vez que se establece la idea de una posible analogía, sigue un proceso metódico y sistemático de mapeo (mapeo estructurado), que constituye la etapa de elaboración y evaluación. En todos los trabajos mencionados se llevó a cabo una tarea detallada de mapeado, incluyendo formas de singularidades (caso 1), rigideces (casos 2 y 4), leyes (caso 3) y modelos constitutivos (caso 5). Debido a que ambos dominios en el problema están bien definidos, el mapeado incluye no solamente variables sino también relaciones entre variables. En todos los casos, la extensión del mapeado es la mínima necesaria para definir la búsqueda en el dominio-meta.

Finalmente, se observa que la analogía se usa para construir nuevos conocimientos, pero los autores los plantean con generalidad, independientemente de la génesis que les dio origen. Solamente en uno de los ejemplos estudiados (caso 2) se establecieron las limitaciones de las analogías, que es una etapa crucial, como se señaló en [Godoy \(2002\)](#), pero en los otros casos no se establecen las condiciones dentro de las cuales tiene validez la analogía.

## REFERENCIAS

- Abe, S. y Suzuki, N., Statistical similarities between internet-quakes and earth-quakes. *Physica*, 193: 310–314, 2004.
- Bottasso, C.L., Detomi, D. y Serra, R., The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**: 4244–4264, 2004.
- French, R., The computational modeling of analogy-making. *Trends in Cognitive Sciences*, **6**:200–205, 2002.
- Gentner, D., Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy. *Cognitive Science*, **7**:155–170, 1983.
- Gentner, D., Holyoak, K. J. y Kokinov, B. N. (Eds), *The Analogical Mind: Perspectives from the cognitive sciences*, The MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
- Godoy, L.A., Sobre la estructura de las analogías en ciencias, *Interciencia*, **27**(8): 422–429, 2002.
- Godoy, L.A., Analogías en Ciencias: ¿Facilitadoras u obstaculizadoras en la construcción de conocimientos?, Capítulo en: *La Dialéctica Clásica: La Lógica de la Investigación*, Ed. Félix A. Lamas, Colección Circa Humana Philosophia, Buenos Aires, 2007.
- Johnson, A.R. y Chen T., Approximating thermo-viscoelastic heating of largely strained solid rubber components. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**: 313–325, 2005.
- Konahai, K., Yin, Y. y Muroto, Y., Single beam analogy for describing soil-pile group interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **23**: 213–221, 2003.
- Lam, N. T., Wilson, J. L., y Chandler, A. M., Seismic displacement response spectrum estimated from the frame analogy soil amplification model. *Engineering Structures*, **23** (11): 1437-1452, 2001.
- Lengyel, A. y You, Z., Bifurcations of SDOF mechanisms using catastrophe theory. *Int. Journal of Solids and Structures*, **41**: 559–568, 2004.
- Leung A.Y.T., Kuang J.L., Spatial chaos of 3-D elastica with the Kirchhoff gyrostic analogy using Melnikov integrals, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **61**: 1674-

- 1709, 2004.
- Litvin, F.L., Application of theorem of implicit function system existence for analysis and synthesis of linkages. *Mechanism and Machine Theory*, **15**:115–125, 1980.
- Luccioni B., Oller S., A directional damage model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**:1119–1145, 2002.
- Markou G. A., Mouroutis Z. S., Charmpis D. C., Papadrakakis M., The ortho-semi-torsional (OST) spring analogy method for 3D mesh moving boundary problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**: 747–765, 2006.
- Miehe C., Lambrecht M., A two-scale finite element relaxation analysis of shear bands in non-convex inelastic solids: small-strain theory for standard dissipative materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**: 473–508, 2002.
- Mosler J., Meschke G., 3D modeling of strong discontinuities in elastoplastic solids: fixed and rotating localization formulations, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**:1553–1576, 2003.
- Peek, R. y El-Bkaily, M., Mechanical Analogies for Liquid Storage Tanks and Action of Eccentric Gravity Loads. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **123** (6): 561–567, 1997.
- Rosati L., Valoroso N., A return map algorithm for general isotropic elasto/visco-plastic materials in principal space, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **60**:461–498, 2004.
- Tarnai, T., Rigidity and kinematic bifurcation of structures. *In:40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), Madrid, Spain, September 20–24*, 1: B2.81–B2.90, 1999.
- Timoshenko, S.P. y Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, Third Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
- Vosniadou, S. y Ortony, A. (Ed), *Similarity and Analogical Reasoning*, Cambridge University Press, 1989.
- Wendel, S., Collapse Considerations and Electrical Analogies for Statically Indeterminate Structures. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **130** (10): 1445–1453, 2004.
- Wilke D. N., Kok S., Groenwold A. A., A quadratically convergent unstructured remeshing strategy for shape optimization, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **65**:1–17, 2006.