

ANÁLISIS DE UN MODELO CUASI-ESTÁTICO DE AMARRES EN EL ESTUDIO DINÁMICO DE UNA PLATAFORMA FLOTANTE

Mario R. Escalante^{a,b}, Marta B. Rosales^{a,c} y Carlos P. Filipich^{a,d}

^a*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina,
email: escalam@frcu.utn.edu.ar*

^b*Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional,
Ing. Pereyra 676, 3260 C. del Uruguay (E.R), Argentina*

^c*CONICET,*

email: mrosales@criba.edu.ar

^d*Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos, Fac. Reg. B. Blanca, Universidad Tecnológica Nacional,
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina
email: cfilipich@yahoo.com.ar*

Palabras Clave: estructuras flotantes, amarres no lineales, series de potencias.

Resumen. En este trabajo se estudia el efecto de la configuración inicial de los cables de amarres en el comportamiento dinámico de una plataforma rígida flotante con amarres poco tensos mediante el uso de las series de potencias para el planteo de las ecuaciones diferenciales gobernantes del modelo. En la configuración física del modelo, se acepta un modelo cuasi-estático para los amarres, en el que el cable adopta una forma de catenaria en todo instante con su extremo superior sujeto a la plataforma flotante y el extremo inferior amarrado al fondo del mar. Los autores han desarrollado previamente diferentes modelos para este problema con distintos grados de complejidad. El caso estudiado corresponde a un modelo en el plano con 2 grados de libertad, q : desplazamiento horizontal (“surge”) y h : desplazamiento vertical (“heave”), pero ahora con la complejidad que surge de no considerar, como en los modelos previamente desarrollados, la hipótesis de pendiente nula del cable de amarre en el apoyo, con lo cual las tensiones en los amarres pasan a tener una componente vertical además de la ya conocida componente horizontal. Esto es, se supone una pendiente arbitraria del cable en el punto de amarre. Estas fuerzas constituyen el aporte fuertemente no lineal en el sistema diferencial que se compone ahora de ecuaciones no lineales acopladas. A partir de expandir todas las funciones intervinientes en series de potencias, y a través de una adecuada manipulación de las mismas, se logra obtener un algoritmo de recurrencia para determinar la tensión de los amarres sin truncamientos, en cada instante como función de los desplazamientos q y h . Las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema así obtenidas, son resueltas luego mediante técnicas estándares de integración y la respuesta del sistema es analizada para investigar diferentes tipos de fenómenos dinámicos. Se realizan distintas consideraciones sobre la inclinación inicial de los cables en el amarre y los resultados son comparados con modelos anteriores. El comportamiento fuertemente no lineal del sistema inducido por los amarres es discutido y sus resultados mostrados a través de un ejemplo numérico.

1 INTRODUCCIÓN

Cables de amarre poco tensos son típicamente usados para mantener en una posición determinada estructuras (plataformas) flotantes offshore y reducir los embates causados por el medio ambiente (acción de las fuerzas debido a las olas y el viento). Con este propósito las estructuras se fijan elásticamente al fondo del océano mediante un sistema de amarres, en donde los cables cuelgan estáticamente en forma de catenarias desde la estructura al fondo del océano. Algunas de estas estructuras podemos circunscribirlas dentro de la clase de sistemas de ingeniería oceánicos vinculados elásticamente al fondo oceánico, como por ejemplo: boyas, barcos tanques, pontones, plataformas semi-sumergibles y barcazas. Este tipo de sistema estructural exhibe un comportamiento complejo debido a no linealidades provenientes principalmente de la configuración geométrica en cada instante de los cables de amarre. Las fuerzas de amarre de estos cables entonces, son parámetros importantes del diseño y necesitan ser estimadas.

Ha sido estudiada ya la importancia que tiene el comportamiento dinámico del amarre mismo en el estudio de la respuesta de la plataforma flotante (Nakamura *et al.* 1991). La mayor dificultad en resolver el problema radica en que no existe una solución cerrada (en el sentido de solución clásica) para las ecuaciones del movimiento del cable. Más aún, la presencia de las fuerzas de arrastre (drag forces) del cable, complican su estudio y análisis. Típicamente, el amortiguamiento total en una estructura flotante es muy bajo. Pero como la amplitud de la respuesta dinámica es sensible al amortiguamiento, es necesario entonces hacer una aproximación de este amortiguamiento en el sistema de amarres incluyendo las fuerzas de arrastre.

Extensas investigaciones han sido llevadas a cabo en el pasado en relación a la dinámica de cables marinos. La dinámica de estructuras flotantes de modelos simplificados de un grado de libertad han sido desarrollados por varios autores (Esmailzadeh y Goodarzi, 2001, Sannasiraj *et al.*, 1998, Sarkar and Eatock Taylor, 2000, Smith and MacFarlane, 2001) En particular, los autores del primer trabajo mediante sucesivos truncados en las expansiones de Taylor obtuvieron una ecuación del tipo Duffing. Representaciones del cable mediante elementos finitos han sido desarrolladas por Peyrot (1980) y Leonard and Tuah (1989). Diferentes esquemas de integración en el dominio del tiempo han sido aplicadas por Nakamura *et al.* (1991) and Huang (1994) para resolver la dinámica del cable. Triantafyllour *at al.* (1985) describió los efectos de las fuerzas de interacción de arrastre del fúido, no linealidad geométrica y la interacción entre el lecho y el cable. Originalmente desarrollado por Bliet (1984), Hover *et al.* (1994) usó una matriz de transferencia en el dominio de la frecuencia linearizando las fuerzas hidrodinámicas de arrastre. Webster (1995) efectuó estudios paramétricos del comportamiento dinámico del cable usando una técnica no lineal de elementos finitos. La importancia de la influencia del amortiguamiento del cable de amarre en la respuesta de la plataforma ha sido resaltado por Huse & Matsumoto (1989), basado en algunos resultados experimentales. Otros estudios e investigaciones sobre estos fenómenos fueron desarrollados también por Brown *et al.* (1995) y Thomas & Eran (1994) quienes desarrollaron un esquema de diferencias finitas en el dominio tiempo en donde se tiene en cuenta tanto la fricción con el lecho y el efecto del levantamiento y apoyo de una porción del cable sobre el lecho. Un tratamiento aproximado de la fricción con el lecho del mar en el dominio de la frecuencia fue efectuado por Liu & Bergadhl (1997a,b) ignorando el efecto de levantamiento. Kitney and Brown (1998) hicieron investigaciones mediante simulación numérica en el dominio del tiempo con verificaciones experimentales para investigar el amortiguamiento por arrastre debido a las oscilaciones armónicas y biarmónicas del extremo superior del cable, basando en una aproximación cuasi-estática lo cual supone que el cable mantiene su forma de catenaria en todo instante. Incluir en

forma completa todos los aspectos de la dinámica del cable de amarre puede ser una tarea difícil (Leonard *et al.* 2000). Varias simplificaciones fueron hechas también para estudiar las fuerzas debidas a los cables de amarre, dando especial importancia precisamente al amortiguamiento producido por estos cables. La mayoría de ellos radican en el uso de una solución cuasi-estática y el análisis de posibles perturbaciones. Bandin y Naiciri (2000) por ejemplo hacen una discusión de las fuerzas de amortiguamiento debidas a los amarres y comparan sus resultados con los de otros autores. Pascoal *et al.* (2005, 2006) han propuesto una metodología diferente cuyo modelo consiste en una fuerza equivalente que contiene todos los términos relevantes, basado en la hipótesis de que la fuerza es diferenciable con respecto a la posición, velocidad y aceleración. En análisis y diseños de sistemas de control es común representar la intensidad de la fuerza resultante de amarres por medio de aproximaciones polinómicas con su deformación. El grado de tales aproximaciones es dependiente de la magnitud del movimiento de la estructura. Por otro lado, si en lugar de polinomios aproximantes se usan ecuaciones fenomenológicas de catenarias, es posible estudiar directamente la incidencia de cambios de parámetros físicos en la dinámica del sistema.

En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de una plataforma rígida flotante mediante un modelo cuasi-estático de amarres poco tensos haciendo uso de las series de potencias para el planteo del sistema de ecuaciones diferenciales gobernante, fuertemente no lineal. Se supone que los cables mantienen en todo instante su forma de catenaria, no imponiendo en este caso la condición de pendiente nula en el extremo inferior, sino que la misma es arbitraria.

El uso de las series de potencias en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias es un método ampliamente extendido. La herramienta es particularmente útil para abordar la resolución analítica de ecuaciones diferenciales no lineales, ya sean problemas de condiciones iniciales o de bordes. Los autores han trabajado profusamente utilizando esta herramienta, en problemas diferenciales lineales y no lineales aplicando sistemáticamente las conocidas series de potencias (Filipich y Rosales, 2001, Filipich *et al.*, 2001, Filipich y Rosales, 2002, Filipich *et al.*, 2003, Filipich y Bambill, 2003, Filipich *et al.*, 2003, Filipich *et al.*, 2004).

El modelo analizado pertenece a un tipo especial de estructuras que en inglés se las suele denominar CALM (catenary anchor leg mooring). Se trata de una boya amarrada mediante un cierto número de cadenas poco tensas (catenarias), generalmente para uso de iluminación, portadoras de grúas o torres y también estructuras intermedias en transporte de petróleo o rompeolas. El estudio se centra en la no linealidad aportada por los amarres en donde los efectos hidrodinámicos son simplificados a un par de fuerzas armónicas horizontal y vertical.

Las series de potencias son utilizadas aquí para encontrar las tensiones de los amarres en sus extremos y la propia expresión analítica de de la catenaria.

2 CONFIGURACIÓN DEL MODELO

El modelo analizado corresponde a un modelo 2D con 2 grados de libertad, q : desplazamiento horizontal (“surge”), h : desplazamiento vertical (“heave”). En la configuración física del modelo, el cable se supone inextensible y adopta en todo instante una forma de catenaria con su extremo superior sujeto a la plataforma flotante y el extremo inferior amarrado al fondo del mar. Se supone que el movimiento del extremo superior del cable es guiado por el movimiento de la plataforma. La pendiente en el extremo inferior se supone arbitraria. Se trata de un modelo en evolución, extensión de otros desarrollados previamente por los autores y en los cuales se suponía que en todo instante a pendiente del cable en el extremo inferior era nu-

la. (Rosales *et al*, 2003, Rosales y Filipich, 2006, Escalante *et al*, 2005, Escalante *et al*, 2006). El extremo superior del cable es forzado a seguir un movimiento incluyendo desplazamientos horizontales y verticales, los cuales son inducidos por el movimiento de la estructura flotante interactuando con las olas. Para poder analizar el comportamiento dinámico de la estructura es necesario conocer previamente la fuerza en el extremo A, en cada instante, para cada configuración geométrica del cable. En la Figura 1 se describe el modelo analizado en su posición de equilibrio. El ancho de la plataforma, $2d$ en este caso, no influye en modelo.

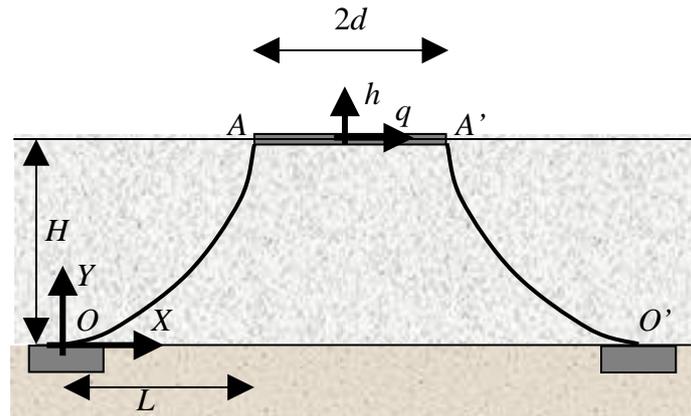


Figura 1: Configuración geométrica del modelo en equilibrio

El uso de las series de potencias entonces es empleado para obtener expansiones explícitas de las fuerzas horizontales y verticales en el cable en términos de los desplazamientos q y h . Las series obtenidas son luego introducidas en las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema fuertemente no lineal en el análisis cuasi-estático del movimiento de la plataforma lográndose un planteo de las ecuaciones sin trucados previos.

Estudios futuros incluirán otros elementos del modelo físico con el objeto de lograr una mejor representación de la estructura, tal como las acciones hidrodinámicas sobre los cables.

3 TENSIÓN DE LOS CABLES DE AMARRE

Primeramente es establecido el problema dinámico del cable. El caso estático es obviamente, un caso particular incluido en las ecuaciones gobernantes.

3.1 Planteo dinámico

La Figura 2 describe el cable bajo estudio donde (X, Y) es el sistema de referencia fijo y (x, y) está relacionado con el sistema fijo mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= X + u \\ y &= Y + v \end{aligned} \tag{1}$$

donde u y v son los desplazamientos del punto $P(X, Y)$, arbitrariamente ubicado en el eje de referencia $Y = 0$ en el instante t_0 .

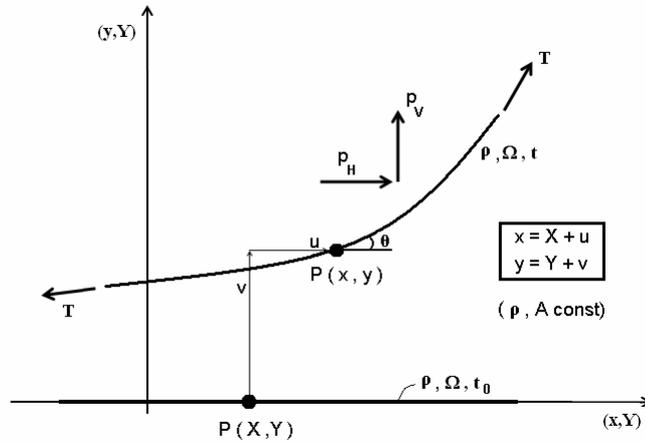


Figura 2

Analicemos una porción del cable Δs como se muestra en la Figura 3. Dado que el cable es supuesto inextensible, se tiene que $\Delta s = \Delta x$. Definiendo $H = T \cos \theta$ (componente horizontal) y $V = T \sin \theta$ (componente vertical), la aplicación de la segunda Ley de Newton y el límite para $\Delta s \rightarrow 0$, conduce a las siguientes ecuaciones que gobiernan el equilibrio dinámico de un cable inextensible

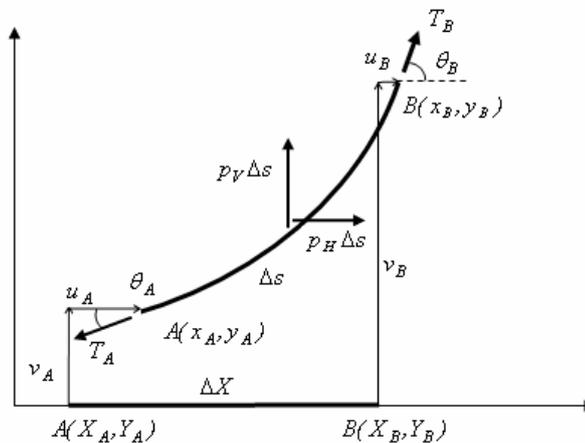


Figura 3

$$\begin{cases} H_x = \rho \Omega \ddot{u} - p_H \\ V_x = \rho \Omega \ddot{v} - p_V \end{cases} \quad (2)$$

donde $(\cdot)_x \equiv \partial(\cdot)/\partial X$ y $(\dot{\cdot}) \equiv \partial(\cdot)/\partial t$. La carga vertical p_V puede ser separada en q_V , una eventual carga externa y el peso propio $\gamma \Omega$, esto es $p_V = q_V - \gamma \Omega$.

De consideraciones geométricas se tiene:

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dX} \quad (a) \quad (3)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dX} \quad (b)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1) las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$\cos \theta = 1 + u_x \quad ; \quad \text{sen } \theta = v_x \quad (4)$$

Si definimos $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial x$, se tiene que $(\cdot)' x_x = (\cdot)' (1 + u_x) = (\cdot)' \cos \theta$, y las siguientes ecuaciones pueden ser deducidas fácilmente,

$$\cos \theta = \frac{1}{1 - u'} \quad (a); \quad \text{tg } \theta = v' \quad (b) \quad (5)$$

También, usando Pitágoras, se tiene

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad u' + \frac{1}{2}(v'^2 - u'^2) = 0 \quad (6)$$

Luego, el sistema de ecuaciones para el caso particular de $p_v = -\gamma\Omega$ y $p_H = 0$ se puede escribir como:

$$\begin{cases} H_x - \rho\Omega\ddot{u} = 0 \\ V_x - \rho\Omega\ddot{v} = \gamma\Omega \\ 2u_x + u_x^2 + v_x^2 = 0 \\ H v_x - V(1 + u_x) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Las incógnitas en este sistema son $u(x,t), v(x,t), H(x,t)$ y $V(x,t)$. Los autores al momento del presente trabajo se encuentran trabajando en solución de este sistema (DAE – Differential – Algebraic Equations).

Seguidamente, el problema estático derivado del anterior sistema será presentado y resuelto tanto analíticamente como mediante el uso de las series de potencias.

3.2 Planteo estático.

Si suponemos que $p_H = 0$ y $q_v = 0$, despreciando los términos correspondientes a las fuerzas de inercia en las ecuaciones (2) se tiene que

$$H_x = 0 \Rightarrow H = \text{cte} \quad (a); \quad V_x = \gamma\Omega \quad (b) \quad (8)$$

3.2.1 Solución Analítica.

De la ecuación (8)b y siendo $V = H \text{tg } \theta = H v'$ se obtiene

$$(v')_x = \beta \Rightarrow v'' = \frac{\beta}{\cos \theta} = \beta \sqrt{1 + v'^2} \Rightarrow v'' - \beta \sqrt{1 + v'^2} = 0 \quad (9)$$

Donde $\beta = \gamma\Omega / H$. Después de sucesivas integraciones e imponiendo las condiciones de borde $v(0) = 0$, se obtiene la ya conocida solución de la catenaria

$$v(x) = \frac{1}{\beta} [\cosh(\beta x + C) - \cosh C] \quad (10)$$

De la ecuación de inextensibilidad de los cables se obtiene $u' = 1 \pm \sqrt{1 + v'^2}$. Después de imponer las condiciones de borde $u(0) = 0$ la solución para el desplazamiento horizontal es

$$u(x) = x - \frac{1}{\beta} [\sinh(\beta x + C) - \sinh C] \quad (11)$$

Definamos $r \equiv \cosh C$ y $s \equiv \sinh C$, y por lo tanto $r = \sqrt{1+s^2}$. Luego las dos soluciones $u(x)$ y $v(x)$ se pueden escribir como

$$v(x) = \frac{1}{\beta} [r(\cosh \beta x - 1) + s \sinh \beta x] \quad (a) \quad (12)$$

$$u(x) = x - \frac{1}{\beta} [r \sinh \beta x + s(\cosh \beta x - 1)] \quad (b)$$

Hasta aquí, los valores de β y C son desconocidos. En $x=a$ es $v(a)=b$ y $u(a) = -(L_c - a)$ (Ver Figura 4).

De las ecuaciones (12) se tiene

$$r \cosh \beta a + s \sinh \beta a = \beta b + r \quad (a) \quad (13)$$

$$r \sinh \beta a + s \cosh \beta a = \beta L_c = s \quad (b)$$

Ahora bien, para encontrar β y C debemos resolver el sistema dado por las ecuaciones (13) para r y s , esto es

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta a - 1 & \sinh \beta a \\ \sinh \beta a & \cosh \beta a - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ L_c \end{pmatrix} \quad (14)$$

Luego de manipular algebraicamente las ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente relación que debe satisfacer β ,

$$\frac{\sinh \varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L_c^2 - b^2}}{a} \quad (15)$$

donde $\varphi \equiv \beta a / 2$. Dado $A = a + q$ y $B = b + h$ para cierto valores de q y h (ver Fig.3) la ecuación trascendente anterior se puede resolver para φ . De la solución del sistema de ecuaciones (14) es posible encontrar C con la expresión

$$C = \operatorname{arcsenh} \left(-\frac{\beta}{2} (L_c + pb) \right) \quad \text{con} \quad p = -\coth \frac{\beta a}{2} \quad (16)$$

Una vez conocido el valor de C , el problema de encontrar las componentes horizontal H y V de la tensión T queda resuelto. Obviamente, la tensión se puede encontrar en cualquier punto del cable como así también la posición del mismo para una configuración dada (para cualquier q y h). (Ecuaciones (12)).

3.2.2 Solución en series de potencias.

Seguidamente utilizaremos las series de potencias para encontrar expresiones de las componentes horizontal y vertical de las tensiones en el amarre H y V en función de los desplazamientos desconocidos q y h . Para ellos, si llamamos como $f(q, h)$ al lado derecho de la ecuación (15), se tiene

$$f(q, h) = \frac{\sqrt{L_c^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{L_c^2 - (B+h)^2}}{A+q} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{B+h}{L_c}\right)^2}}{\frac{A+q}{L_c}} \quad (17)$$

en donde los valores de L_c , A y B son datos (ver Fig. 4). Introducimos la siguiente notación

$$w_n = \sqrt{1 - \left(\frac{B+h}{L_c}\right)^2} = \sum_{k=0}^M N_k h^k \quad (a); \quad w_d = \frac{1}{\frac{A+q}{L_c}} = \sum_{k=0}^M D_k q^k \quad (b) \quad (18)$$

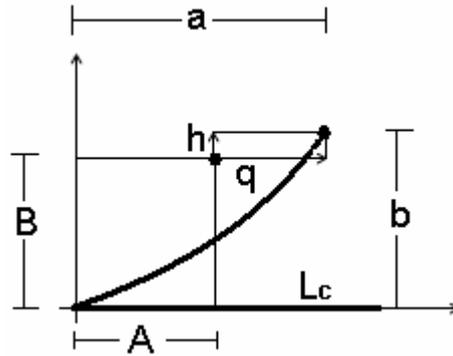


Figura 4

Con esta notación es posible encontrar los coeficientes de las series en términos de q y h .

$$f(q, h) = w_n w_d = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M K_{ij} q^i h^j \quad (19)$$

Expandimos ahora el lado izquierdo de la ecuación (15), esto es

$$F(\varphi) = \frac{\sinh \varphi}{\varphi} = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \quad (20)$$

Pero como necesitamos expresar a φ , en una serie de potencias en función de q y h , introducimos la siguiente serie

$$\varphi^k = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M R_{kij} q^i h^j \quad (21)$$

En particular $\varphi = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M R_{1ij} q^i h^j$. Es posible encontrar

$$R_{2ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=4,6,\dots} \gamma_k R_{kij}}{\gamma_2} \quad (22)$$

siendo $\gamma_k = \frac{1}{(k+1)!}$, $k = 2, 4, 6, \dots$ y $A_{ij} \equiv (K_{ij} - \delta_{i0} \delta_{0j})$

Los coeficientes R_{2ij} se pueden encontrar por medio de un proceso iterativo y posteriormente los coeficientes R_{1ij} se pueden determinar a partir de las siguientes expresiones

$$R_{(n+2)ij} = \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j R_{nrs} R_{2(i-r)(j-s)}, \quad n = 2, 4, 6, \dots; \quad R_{2ij} = \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j R_{1rs} R_{1(i-r)(j-s)} \quad (23)$$

Después de trabajar estas expresiones, se llega finalmente a las siguientes expresiones

$$\begin{cases} i = j = 0 & R_{100} = \sqrt{R_{200}} \\ i = 0 & R_{10j} = \left[R_{20j} - \sum_{s=1}^{j-1} R_{10s} R_{10(j-s)} \right] / 2R_{100} \\ j = 0 & R_{2i0} = \left[R_{2i0} - \sum_{r=1}^{i-1} R_{1r0} R_{1(i-r)0} \right] / 2R_{100} \\ i \neq 0, j \neq 0 & R_{1ij} = \left\{ R_{2ij} - \left[2R_{10j} R_{1i0} + S_{0s} + S_{r0} + S_{rs} \right] \right\} / 2R_{100} \end{cases} \quad (24)$$

donde las sumas S_{0s} , S_{r0} y S_{rs} son respectivamente

$$\begin{aligned} S_{0s} &= \sum_{s=1}^{j-1} (R_{10s} R_{1i(j-s)} + R_{1is} R_{10(j-s)}) \\ S_{r0} &= \sum_{r=1}^{i-1} (R_{1r0} R_{1(i-r)j} + R_{1rj} R_{1(i-r)0}) \\ S_{rs} &= \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{s=1}^{j-1} (R_{1rs} R_{1(i-r)(j-s)}) \end{aligned} \quad (25)$$

Iterando con este sistema se encuentra φ y sus potencias. Expresamos luego el valor de H en el extremo del cable en potencias de q y h

$$H(q, h) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M H_{ij} q^i h^j \quad (26)$$

Los coeficientes H_{ij} se pueden encontrar teniendo en cuenta que $H = (\gamma\Omega)(A + q)/(2\varphi)$ y recordando las definiciones de φ y β . Los pasos son análogos a los descritos más arriba para encontrar los R_{ij}

La componente vertical en el extremo del cable se puede obtener de la expresión $V = \gamma\Omega L_c + H \sinh C$. Para arribar a una expresión de la forma $V = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M V_{ij} q^i h^j$ y encontrar los valores de los coeficientes V_{ij} se tiene primero que expandir la función $\sinh C$ en potencias de q y h . Por brevedad no se presenta aquí el detalle del álgebra aunque la metodología es completamente similar a la empleada hasta aquí.

4 ECUACIONES GOBERNANTES DEL SISTEMA PLATAFORMA-CABLES

Las ecuaciones del movimiento son obtenidas a partir de la formulación clásica, tienen la forma de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales cuya expresión general es

$$\ddot{\mathbf{X}} + D(\dot{\mathbf{X}}) + R(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, t) \quad (27)$$

en donde $R(\mathbf{X})$ y $D(\dot{\mathbf{X}})$ son los vectores del sistema de fuerzas de recuperación del resorte no lineal y el amortiguamiento respectivamente. $F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, t)$ es el vector fuerza dependiente del tiempo que excita el sistema, y $\mathbf{X} = (q, h)$ es el vector desplazamiento del sistema que representa los movimientos surge (q : desplazamiento horizontal) y, heave (h : desplazamiento vertical).

Se tienen entonces, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \quad (28)$$

O bien

$$\begin{cases} m\ddot{q}(t) + D_x \dot{q}(t) + (H_A^i - H_A^d) = F_1(t) & (a) \\ m\ddot{h}(t) - E + (V_A^i + V_A^d) = F_2(t) & (b) \end{cases} \quad (29)$$

donde m es la masa de la plataforma, D_x es el coeficiente que representa el amortiguamiento del sistema, H y V son la componente horizontal y vertical respectivamente de la tensión de la cadena de amarre en el punto A ; y el superíndice indica el amarre derecho d o izquierdo i ; las acciones dinámicas externas que excitan el sistema, se representan mediante dos fuerzas horizontal y vertical F_1 y F_2 respectivamente.

E representa la fuerza del empuje por flotación, que puede expresarse como la suma de $E_0 + Kh$, siendo E_0 la fuerza de empuje por flotación en el estado de equilibrio estático.

Admitiendo la masa del cable concentrada en su centro de masa, las expresiones de las componentes horizontales de las tensiones de los amarres en un instante t , quedan determinadas por medio de la Segunda Ley de Newton mediante

$$\begin{cases} H_A^i = H_O^i + m_c \ddot{x}_c^i & (a) \\ H_A^d = H_O^d - m_c \ddot{x}_c^d & (b) \end{cases} \quad (30)$$

en la que m_c es la masa de la cadena, $H_O^{i,d}$ son las tensiones horizontales en la base del amarre y $\ddot{x}_c^{i,d}$ son las aceleraciones de la masa localizada en el centro de gravedad de cada cadena.

Análogamente se tiene para el movimiento vertical

$$\begin{cases} V_A^i = V_O^i + m_c \ddot{y}_c^i + m_c g & (a) \\ V_A^d = V_O^d + m_c \ddot{y}_c^d + m_c g & (b) \end{cases} \quad (31)$$

Ahora bien, de acuerdo al modelo adoptado, el cable en todo instante conserva su forma de catenaria, luego la función que representa esta configuración para cada q y h estará dada por

$$y(x) = \frac{1}{\beta} [\cosh(\beta x + C) - \cosh C] \quad (32)$$

A partir de esta última ecuación es posible obtener las coordenadas del centro de gravedad del amarre. Luego expandimos dichas expresiones en función de q y h y las derivamos dos veces respecto al tiempo para hallar las expresiones en series de potencias de las componentes horizontal y vertical de la aceleración del movimiento ($\ddot{x}_c^{i,d}$ y $\ddot{y}_c^{i,d}$), que son introducidas posteriormente en las ecuaciones (30) y (31) respectivamente.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se considera una plataforma rígida en 2D con vínculos elásticos constituidos por dos amarres catenarios (Figura 1). Se adoptan los siguientes valores: dimensión horizontal $L = 40m$, dimensión vertical $H = 20m$, el coeficiente de amortiguamiento $D_x = 100 \text{ N/m}$. Se supone una plataforma de masa $m = 1000kg$. La densidad lineal de los cables de amarres es de $\rho A_c = 50 \text{ N/m}$, $L_c = 45.5m$

Las acciones de excitación de las olas externas están dadas por una fuerza horizontal $F(t) = F_0 \sin \omega_f t$, $F_0 = 0.05 H m_{eq} \omega^2$, $m_{eq} = m + 2m_c$, donde m_c es la masa del amarre; y una fuerza vertical $G(t) = 1000 \cos \omega t$ y $\omega = 0.25 \text{ rad/s}$, $\omega_f = 1.344$.

El sistema diferencial planteado es resuelto mediante una rutina estándar de integración (Runge-Kutta-Fehlberg, rkf45).

Para validar la solución en serie de potencias, se compararon los valores de la componente horizontal de la tensión del amarre izquierdo en el extremo inferior ($H_o^i(q, h)$) obtenidos mediante las series de potencias y aquellos correspondientes a la solución analítica (Tabla 1) para diferentes desplazamientos q y h del extremo A del cable. Se observa en todos los casos la coincidencia de los valores.

Es analizada también la convergencia de las series de potencias halladas mediante los algoritmos de recurrencia. Para ello se estudió la sucesión de sumas parciales de los valores de H_o^i , $\{H_{MN}\}$, para un desplazamiento $q = 0.5, h = 0.25$ del extremo A del cable.

q		h (M=20)			
		-0.5	-0.25	0	0.25
-0.5	S.Pot	2009.19510	2087.29223	2176.91348	2281.13014
	S. Anal	2009.19335	2087.29211	2176.91142	2281.07824
-0.25	S.Pot	2204.79450	2307.57885	2428.46865	2573.30041
	S. Anal	2204.79450	2307.57885	2428.46865	2573.30041
0	S.Pot	2461.28089	2604.45776	2779.24496	2998.93587
	S. Anal	2461.28090	2604.45776	2779.24496	2998.93587
0.25	S.Pot	2819.97213	3037.81962	3321.02810	3709.66458
	S. Anal	2819.97213	3037.81962	3321.02810	3709.66458
0.5	S.Pot	3376.75229	3764.38670	4338.16046	5314.77035
	S. Anal	3376.73577	3764.38709	4338.16781	5315.02051

Tabla 1: Tabla comparativa de valores de H_o^i para diferentes desplazamientos de q y h del extremo A del cable. Se adoptó $M = 20$

La Figura 5 muestra el diagrama M vs $\{H_{MM}\}$ en el cual se refleja la convergencia de la serie, como así también se puede ver la rapidez de la convergencia de los valores de H a partir de $M = 10$.

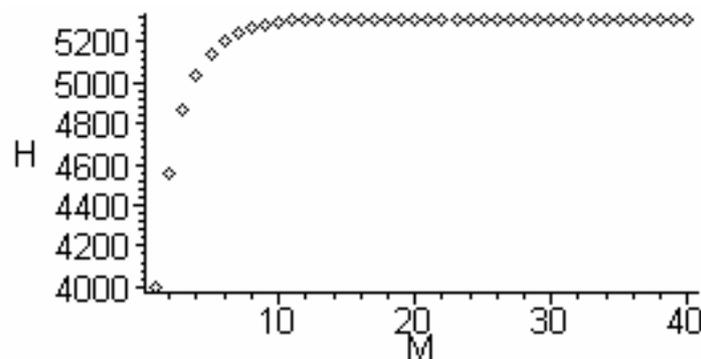


Figura 5: Valores de $H = \sum_{i,j=0}^k H_{ij} q^i h^j$, $k = 1..40$

Análogamente la Figura 6 muestra el mismo estudio de convergencia para los valores de la componente vertical de la tensión V en el amarre, para los mismos desplazamientos q y h .

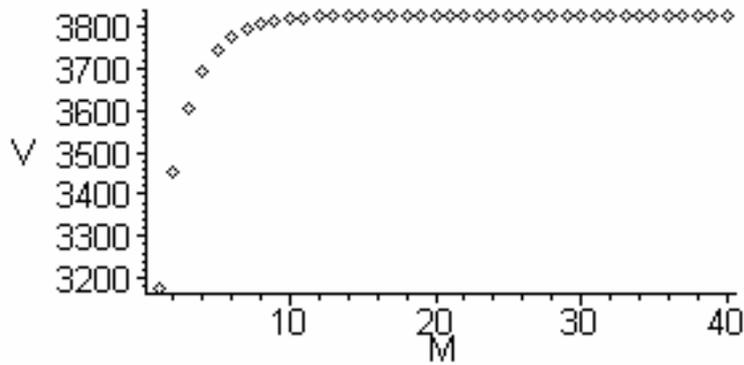


Figura 6: Valores de $V = \sum_{i,j=0}^k V_{ij} q^i h^j$, $k = 1..40$

En las Figuras 7 a y b se muestran los diagramas de fase respectivos para un intervalo de tiempo $t = 300$.

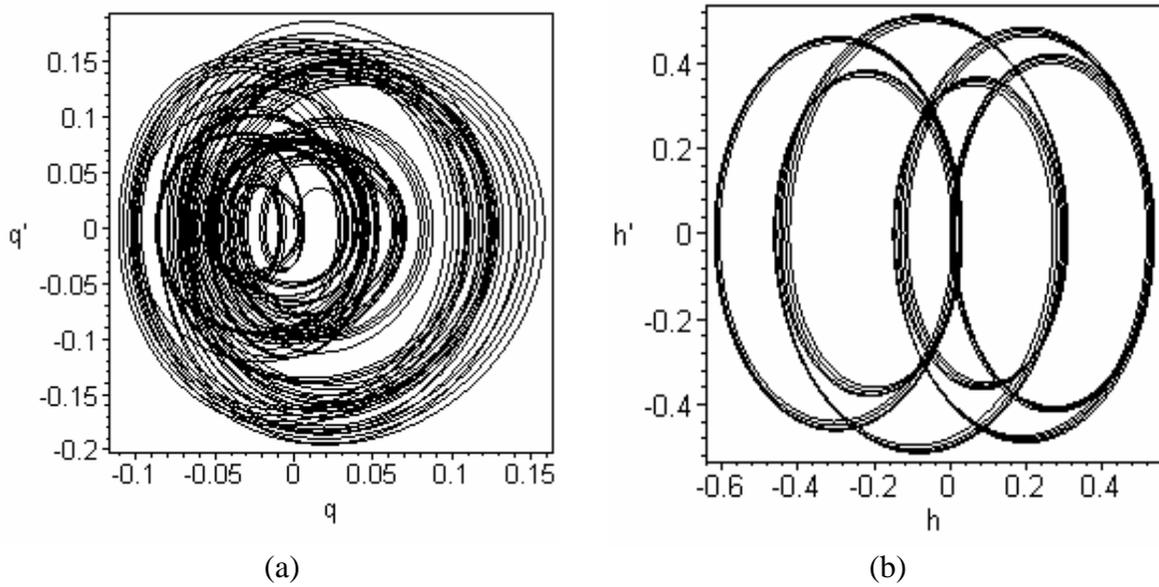


Figura 7

En las Figuras 8 y 9, se muestran los diagramas D vs. t y Co vs. t , en donde D es la distancia del extremo A del amarre al extremo O en función del tiempo y Co la pendiente del amarre en el extremo O en función del tiempo.

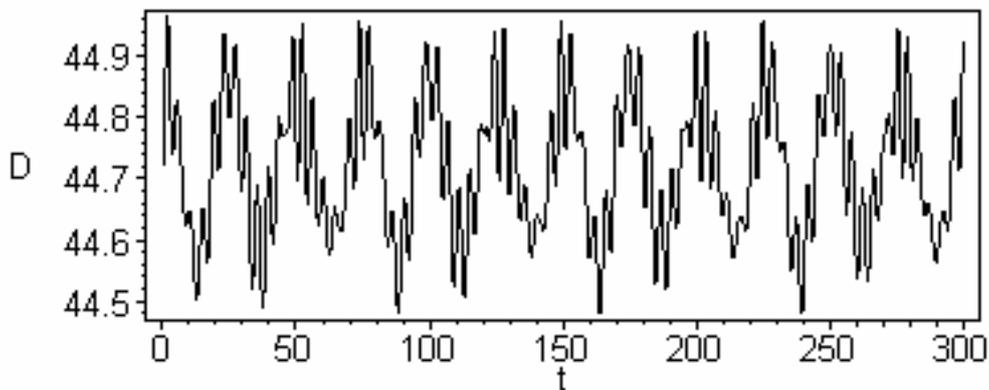


Figura 8

Como se observa en dichos gráficos los valores de D se mantienen en todo instante, menores que la longitud del cable, y la pendiente en el extremo inferior del cable es siempre positiva (Figura 9).

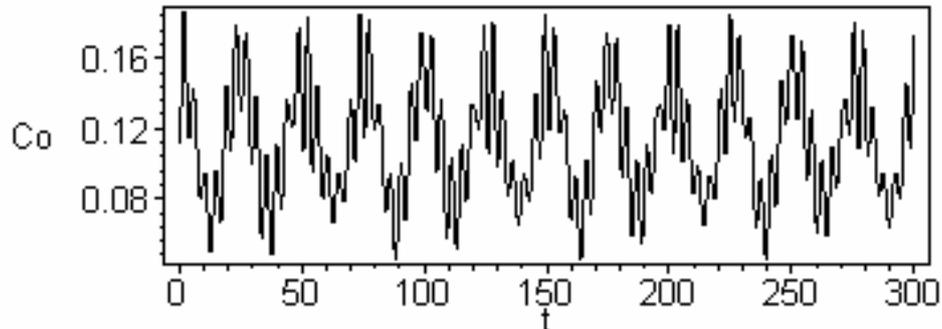


Figura 9:

Por último, en el gráfico de la Figura 10 se muestran los desplazamientos q y h en función del tiempo que describen el movimiento del extremo superior del cable durante los primeros 300 segundos.

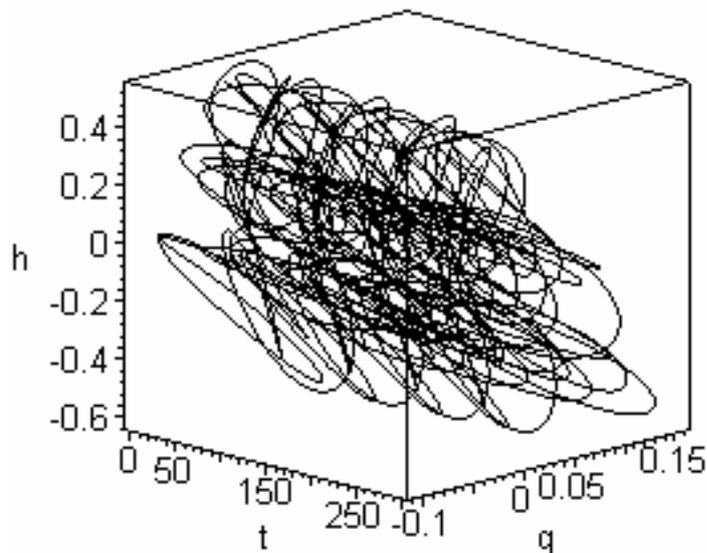


Figura 10

6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha analizado el comportamiento dinámico de una plataforma flotante con un modelo cuasi-estático de amarres no lineales. Estos últimos, supuestos catenarios en todo instante y de pendiente arbitraria en su extremo inferior, aportan el término fuertemente no lineal al sistema de ecuaciones diferenciales gobernante acopladas del problema. Se utilizaron sistemáticamente las series de potencias para el planteo de las ecuaciones, sin necesidad de truncamientos previos. Se obtuvo un sistema diferencial fuertemente no lineal de ecuaciones no acopladas que fue resuelto luego por una rutina estándar de integración (Runge-Kutta-Fehlberg). Mediante un ejemplo numérico se validaron los valores de las tensiones en los amarres obtenidos mediante los algoritmos implementados comparándolos con los va-

lores exactos de las tensiones resolviendo analíticamente la ecuación de la catenaria en el caso estático. Por último se mostraron distintos gráficos para ilustrar el comportamiento dinámico del sistema plataforma-amarres. De los diagramas pueden inferirse características típicas de respuestas no lineales y actualmente se están estudiando posibles bifurcaciones. La información que allí surja será reportada en el congreso.

REFERENCIAS

- C. Bandium and M. Naciri, A contribution on quasi-static mooring line damping. *Journal of Offshore Mechanics Arctic Engineering* 122, 125-133, 2000.
- A. Blied, Dynamic analysis of single span cables. Ph.D. thesis. MIT, Cambridge, MA, USA, 1984.
- D.T. Brown, G.J. Lyons and H.M. Lyn, Advances in mooring line damping. *Underwater Technology* 21, 5-11, 1995.
- M. R. Escalante, M. B. Rosales y Carlos P. Filipich. Planteo y solución del problema de amarres no lineales de una plataforma flotante. In volume XXIV, Buenos Aires, Argentina, VIII Congreso de Mecánica Computacional (MECOM 2005), 2005.
- E. Esmailzadeh and A. Goodarzi, A., Stability analysis of a CALM floating offshore structure, *Int. J. of Nonlinear Mech*, 36: 917-926, 2001.
- C. P. Filipich y M.B. Rosales, A recurrence solution of strongly non-linear systems, In *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, XXI, 141-149. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson and I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando. Proceedings, 21st. Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM XXI), Orlando, U.S.A ,2002
- C. P. Filipich, M.B Rosales y F. Buezas, Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions, *International Journal of Latin American Applied Research*, 34(2):105-123, 2004.
- F.S. Hover, M.A. Grosenbaugh and M.S. Triantafyllou, Calculation of dynamic tension in towed underwater cable. *IEEE Journal of Oceanic Engineering* 19, 449-457, 1994.
- S. Huang, Dynamic analysis of 3-D marine cables. *Ocean Engineering* 21, 587-605, 1994.
- E. Huse and K. Matsumoto, Mooring line camping due to first and second order vessel motion. *Offshore Technology Conference*, Paper OTC 6137.
- N. Kitney and D.T. Brown, Efficient prediction of mooring line dynamic loading with experimental verification. *Proceedings of International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, OMAE 98-0402, New York:ASME, 1998.
- J.W. Leonard and H. Tuah, Nonlinear deterministic and stochastic response of cable systems with large bodies under hydrodynamics loads. *Engineering Structures* 8, 94,107, 1989.
- J.W. Leonard, K. Idris and S.C.S. Yim, Large angular motions of tethered surface buoys. *Ocean Engineering* 27, 1345-1371, 2000.
- Y.G. Liu and L. Bergdahl, Influence of current and seabed friction on mooring cable response: comparison between time-domain and frequency-domain analysis. *Engineering Structures* 19, 945-953, 1997a.
- Y.G. Liu and L. Bergdahl, Frequency-domain dynamic analysis of cables. *Engineering Structures* 19, 499-506, 1997b.
- N. Nakamura, W. Koterayama and Y. Kyozyuka, Show drift camping due to drag forces action on mooring lines. *Ocean Engineering* 18, 283-296, 1991.
- R. Pascoal, *et al.*, Equivalent force model for the effect of mooring systems. *Applied Ocean Research* 27, 165-172, 2005.

- R. Pascoal, *et al.*, Assessment of the effect of mooring systems on the horizontal motions with an equivalent force to model. *Ocean Engineering* 33, 1644-1668, 2006.
- A.H. Peyrot, Marine cable structures. *ASCE Journal of Structures Division* 12, 2391-2400, 1980.
- M. B. Rosales y C.P. Filipich, Full modelling of the mooring nonlinearity in a two-dimensional floating structure, *Int. J. Nonlinear Mech*, 41, 1-17 2006.
- M. Rosales, C. Filipich, y M. Escalante. Dinámica de una estructura flotante amarrada: modelado de la no linealidad mediante recurrencias algebraicas. In M.B. Rosales, V.H. Cortínez, and D.V. Bambill, editors, *Mecánica Computacional*, volume XXII, Bahía Blanca, Argentina, (November 2003). XIII Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2003), 2003.
- S. A. Sannasiraj, V. Sundar and R. Sundaravadivelu. Mooring forces and motion response of pontoon-type floating breakwaters. *Ocean Engng* 26: 27-48, 1998.
- A. Sarkar and R. Eatock Taylor. Effects of mooring line drag damping on response statistics of vessels excited by first- and second-order wave forces. *Ocean Engng* 27: 667-686, 2000.
- R. J. Smith and C.J. MacFarlane. Statics of a three component mooring line. *Ocean Engng* 28: 899-914, 2001.
- D.O. Thomas and G.E. Hearn, Deepwater mooring line dynamics with emphasis on sea-bed interference effects. *Offshore Technology Conference*, Paper OTC 7488, 1994.
- M.S. Triantafyllou, A. Bliet and S. Shin, Dynamic analysis as a tool for open-sea mooring system design, *SNAME Transactions* 93, 303-324, 1985.
- W.C. Webster, Mooring induced damping. *Ocean Engineering* 22, 571-591, 1995.