

UTILIZACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DISCONTINUOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

Christian U. Álvarez Tagliabue, Pablo Marino

*Centro de Investigación Industrial (CINI), Tenaris Siderca, Dr. Jorge A. Simini 250, Campana,
Argentina, pamarino@tenaris.com, <http://www.tenaris.com/Argentina/es/>*

Palabras Clave: Radiación, Galerkin Discontinuo, Transferencia de Calor, Elementos Finitos Discontinuos, Ecuación de Transferencia Radiativa, Factores de Vista

Resumen. En numerosos procesos industriales de calentamiento, la combustión del gas natural se realiza en cámaras que se encuentran separadas de la que se utiliza para el calentamiento de la carga. En estos casos, el cálculo del calentamiento implica la resolución conjunta de los flujos turbulentos y de los intercambios de calor por radiación que se producen entre los productos de combustión (vapor de agua y dióxido de carbono), la carga y los refractarios que recubren al horno, pero sin tener en cuenta los procesos de reacción química. La transferencia de calor por radiación en medios participantes es gobernada por la ecuación de transferencia radiativa, que describe el balance de la intensidad de radiación a lo largo de la dirección de propagación. En este trabajo, para la resolución de esta ecuación se implementa el método de elementos finitos discontinuos (Galerkin discontinuo) modelando el salto de intensidad en los bordes de los elementos mediante un esquema con upwinding. A partir del campo de intensidades se calculan las densidades de potencia radiativa que se incluyen en la ecuación de transporte de la energía correspondiente a los flujos turbulentos de los humos en el interior del horno. Se presentan ejemplos de verificación, en los que se evalúa la sensibilidad de los resultados a la elección de la malla y la convergencia del esquema iterativo. El código desarrollado se utiliza para evaluar los flujos de calor en el interior de un horno de pasaje para el curado del recubrimiento de chapa. Finalmente, se evalúa el uso de este método para el cálculo de las áreas de intercambio directas que se definen en el método de zonas.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se explora la utilización del método de los elementos finitos discontinuos para resolver numéricamente la ecuación de transferencia radiativa. Esta ecuación describe un fenómeno que se presenta en múltiples problemas de ingeniería, como es el caso de los hornos industriales a gas, donde la mayor parte de la energía se transfiere por radiación debido a las altas temperaturas a las que operan estas instalaciones. Por este motivo se han desarrollado distintas técnicas de resolución, como el método de los armónicos esféricos (P_N), el método de las ordenadas discretas (S_N), el método de zonas, el método de Monte Carlo, el método de los elementos finitos (continuos), y el método de los volúmenes finitos. Todas estas técnicas se encuentran bien documentadas en Siegel (1992) y en Modest (2003).

La motivación para utilizar el método de elementos finitos discontinuos reside en la versatilidad geométrica que brindan los métodos de elementos finitos, junto a la eficiencia y estabilidad numérica que se obtienen al implementar elementos discontinuos con un esquema de upwinding Li (2006). A continuación se describen en forma detallada la ecuación diferencial junto con las condiciones de contorno, su resolución mediante el método de elementos finitos discontinuos y la discretización empleada. Se presentan las verificaciones efectuadas del código implementado en 1D y 3D. Se comparan los flujos de calor calculados con los analíticos extraídos de la literatura para distintas situaciones y mallas.

Luego se implementa el método en 3D para estimar los flujos radiativos en un horno para el curado de chapa recubierta en la planta de Canning de la empresa Siderar. Por último se analiza la utilización del método para la obtención de los factores de vista correspondientes a geometrías bidimensionales no convexas. Estos factores pueden ser calculados analíticamente y utilizados para evaluar la sensibilidad de los resultados obtenidos con el método numérico a las discretizaciones espaciales y angulares empleadas.

1 ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

Un medio es considerado participante, si absorbe, emite, o dispersa intensidad de radiación a lo largo de la dirección de propagación. La intensidad de radiación $I(\bar{r}, \bar{s})$ es la cantidad de potencia que en la posición \bar{r} se propaga en la dirección \bar{s} , por unidad de ángulo sólido y por unidad de área transversal a la dirección \bar{s} . La transferencia de calor por radiación en un medio participante es gobernada por la ecuación de transferencia radiativa (RTE, por sus siglas en inglés) que describe la variación de la intensidad de radiación a lo largo de una dirección de propagación:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_1(\bar{r}, \bar{s}, t)}{\partial t} + \frac{\partial I_1(\bar{r}, \bar{s}, t)}{\partial s} = -b_1(\bar{r}) I_1(\bar{r}, \bar{s}, t) + k_1(\bar{r}) I_{b1}(\bar{r}, t) + \frac{S_1(\bar{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I_1(\bar{r}, \bar{s}', t) \Phi(\bar{s}, \bar{s}') d\Omega' \quad (1)$$

En esta ecuación, $b_1(\bar{r}) = k_1(\bar{r}) + S_1(\bar{r})$ es el coeficiente de extinción, $k_1(\bar{r})$ es el coeficiente de absorción, $\bar{s} = \sin \vartheta \cos \hat{i} + \sin \vartheta \sin \hat{j} + \cos \vartheta \hat{k}$, $\Omega(\bar{s})$ es el ángulo sólido asociado a \bar{s} , $S_1(\bar{r})$ es el coeficiente de dispersión, y $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\hat{\varphi}$ es el diferencial de ángulo sólido. La función de fase $\Phi(\bar{s}, \bar{s}')$, que describe la forma en que se dispersa la radiación, satisface la siguiente condición:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(\bar{s}, \bar{s}') d\Omega' = 1 \quad (2)$$

En la Ecuación (1), $c = ds/dt$ es la velocidad con la que viaja la intensidad de radiación. Todas las variables son función del espacio, del tiempo, y del número de onda. La intensidad de radiación y la función de fase son función de la dirección \bar{s} y \bar{s}' .

Para muchos problemas de ingeniería, la transferencia de calor por radiación entra en régimen estacionario mucho más rápido que los otros modos de transferencia de calor, por lo que frecuentemente se utiliza una aproximación cuasi-estacionaria. Esto permite eliminar el término transitorio. Para simplificar la descripción del problema se ha supuesto que todas las cantidades son independientes de la longitud de onda, aunque el algoritmo que se presenta puede ser aplicado con mínimas modificaciones para la radiación intercambiada en un dado rango de longitudes de onda. Teniendo en cuenta estas aproximaciones, la Ecuación (1) se escribe:

$$\frac{\partial I(\bar{r}, \bar{s})}{\partial s} = -b(\bar{r})I(\bar{r}, \bar{s}) + k(\bar{r})I_b(\bar{r}) + \frac{S_s(\bar{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\bar{r}, \bar{s}') \Phi(\bar{s}, \bar{s}') d\Omega' \quad (3)$$

Ésta es una ecuación integral-diferencial de primer orden para la intensidad de radiación, y es de tipo hiperbólica. El primer término a la izquierda de la Ecuación (3) mide el cambio de $I(\bar{r}, \bar{s})$ en un diferencial de distancia en la dirección \bar{s} , el primer término a la derecha representa la pérdida de intensidad de radiación debido a la absorción y a la dispersión, el segundo término es la emisión local, y el tercer término representa la contribución de intensidad de radiación en la dirección \bar{s} que proviene de la dispersión de intensidad en otras direcciones. La ecuación debe ser resuelta para cada posición \bar{r} y para cada dirección \bar{s} .

En el caso de una superficie emisora opaca correspondiente a un medio con transmisividad nula y que refleja en forma difusa (según la ley de Lambert), la intensidad de radiación saliente es independiente de la dirección:

$$I(\bar{r}, \bar{s}) = e(\bar{r})I_b(\bar{r}) + \frac{1 - e(\bar{r})}{\rho} \int_{\bar{s}' \cdot \bar{n}_w < 0} I(\bar{r}, \bar{s}') |\bar{s}' \cdot \bar{n}_w| d\Omega' \quad (4)$$

En la Ecuación (4) \bar{n}_w es la normal de la superficie y \bar{s}' recorre las direcciones desde las cuales la superficie es irradiada. El primer término a la derecha representa la radiación emitida por la superficie, y el segundo término representa la radiación reflejada por la superficie proveniente de otras direcciones. En el caso de una superficie de cuerpo negro, $e(\bar{r}) = 1$ y resulta:

$$I(\bar{r}, \bar{s}) = I_b(\bar{r}) \quad (5)$$

En el caso de una superficie opaca que emite en forma difusa pero que refleja en forma especular, la intensidad emitida tiene tres componentes: la emisión difusa, la fracción reflejada en forma difusa, y la fracción reflejada en forma especular:

$$I(\bar{r}, \bar{s}) = e(\bar{r})I_b(\bar{r}) + \frac{r^d(\bar{r})}{\rho} \int_{\bar{s}' \cdot \bar{n}_w < 0} I(\bar{r}, \bar{s}') |\bar{s}' \cdot \bar{n}_w| d\Omega' + r^e(\bar{r})I(\bar{r}, \bar{s}_s) \quad (6)$$

donde \bar{s}_s es la dirección especular, definida como la dirección desde la cual debe provenir un rayo que impacta en \bar{r} para ser reflejado en forma especular en la dirección \bar{s} . Los coeficientes r^d y r^e son la reflectividad difusa y especular, respectivamente, de la superficie.

Para una superficie opaca con propiedades arbitrarias, la reflectividad es una función de la posición y la dirección. De esta manera la intensidad de radiación emitida es:

$$I(\bar{r}, \bar{s}) = e(\bar{r})I_b(\bar{r}) + \int_{\bar{s}' \cdot \bar{n}_w < 0} r''(\bar{r}, \bar{s}', \bar{s}) I(\bar{r}, \bar{s}') |\bar{s}' \cdot \bar{n}_w| d\Omega' \quad (7)$$

donde $r'' = r/p$. Para una superficie semitransparente, la radiación externa puede atravesar la superficie y propagarse dentro del medio, por lo que en las ecuaciones anteriores se debe utilizar una emisividad efectiva. Si la frontera es una superficie transparente o está abierta, no hay emisión por parte de la misma, lo que implica $e = 0$.

Una vez conocida la distribución de intensidades de radiación en el medio participante, se pueden calcular las siguientes cantidades relevantes. La primera de ellas es el flujo de calor

$$q_i(\bar{r}) = \int_{4p} I(\bar{r}, \bar{s}) \bar{s} \cdot \bar{i} d\Omega \quad (8)$$

cuya divergencia es la densidad de potencia absorbida o emitida por el diferencial de volumen que circunda a \bar{r} :

$$\nabla \cdot \bar{q}(\bar{r}) = k(\bar{r}) \left(4S T^4(\bar{r}) - \int_{4p} I(\bar{r}, \bar{s}) d\Omega \right) \quad (9)$$

En el cálculo de las transferencias radiativas también es útil determinar la radiación incidente $G(\bar{r})$,

$$G(\bar{r}) = \int_{4p} I(\bar{r}, \bar{s}) d\Omega \quad (10)$$

Por último, los flujos de calor sobre las superficies del contorno se obtienen a través de

$$q_w(\bar{r}) = \int_{2p} I(\bar{r}, \bar{s}) \bar{s} \cdot \bar{n}_w d\Omega \quad (11)$$

2 FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS DISCONTINUOS

Como se realiza usualmente en el planteo de elementos finitos, se discretiza el dominio de cálculo en una serie de elementos utilizando triángulos en 2D y tetraedros en 3D, mientras que el espacio angular es discretizado en un conjunto de ángulos de control. En el caso de la formulación discontinua se integra la Ecuación (3) sobre un único elemento finito y un ángulo de control $\Delta\Omega$, con respecto a la función de peso $v(\bar{r}, \Omega)$.

$$\int_{\Delta\Omega} \int_{V_e} v(\bar{r}, \Omega) \bar{s} \cdot \nabla I(\bar{r}, \bar{s}) dV d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \int_{V_e} v(\bar{r}, \Omega) [-b(\bar{r})I(\bar{r}, \bar{s}) + F(\bar{r}, \bar{s})] dV d\Omega \quad (12)$$

donde se usa la definición $\bar{s} \cdot \nabla I(\bar{r}, \bar{s}) = \partial I(\bar{r}, \bar{s}) / \partial s$, V_e es el volumen del elemento considerado, $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ es el vector posición, y $F(\bar{r}, \bar{s})$ es la función fuente definida por

$$F(\bar{r}, \bar{s}) = k(\bar{r})I_b(\bar{r}) + \frac{S_s(\bar{r})}{4p} \int_{4p} I(\bar{r}, \bar{s}') \Phi(\bar{s}, \bar{s}') d\Omega' \quad (13)$$

$$I_b(\bar{r}) = \frac{S T(\bar{r})^4}{\rho} \quad (14)$$

Integrando por partes la Ecuación (12) se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Delta\Omega_i V_e} \int I(\bar{r}, \bar{s}) \bar{s} \cdot \nabla v(\bar{r}, \Omega) dV d\Omega + \int_{\Delta\Omega_i \Gamma} \int v(\bar{r}, \Omega) I^+(\bar{r}, \bar{s}) \bar{n} \cdot \bar{s} d\Gamma d\Omega = \\ & = \int_{\Delta\Omega_i V_e} \int v(\bar{r}, \Omega) [-b(\bar{r})I(\bar{r}, \bar{s}) + F(\bar{r}, \bar{s})] dV d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

en la que $I^+(\bar{r}, \bar{s})$ es usada para representar el valor de la intensidad del lado exterior a la frontera del elemento. Integrando nuevamente por partes la Ecuación (15) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta\Omega_i V_e} \int v(\bar{r}, \Omega) \bar{s} \cdot \nabla I(\bar{r}, \bar{s}) dV d\Omega + \int_{\Delta\Omega_i \Gamma} \int v(\bar{r}, \Omega) (I^+ - I^-) \bar{n} \cdot \bar{s} d\Gamma d\Omega = \\ & = \int_{\Delta\Omega_i V_e} \int v(\bar{r}, \Omega) [-b(\bar{r})I(\bar{r}, \bar{s}) + F(\bar{r}, \bar{s})] dV d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta\Omega_i V_e} \int v(\bar{r}, \Omega) \bar{s} \cdot \nabla I(\bar{r}, \bar{s}) dV d\Omega + \int_{\Delta\Omega_i \Gamma} \int v(\bar{r}, \Omega) [I] \bar{n} \cdot \bar{s} d\Gamma d\Omega = \\ & = \int_{\Delta\Omega_i V_e} \int v(\bar{r}, \Omega) [-b(\bar{r})I(\bar{r}, \bar{s}) + F(\bar{r}, \bar{s})] dV d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

donde \bar{n} es la normal exterior de la cara del elemento e $[I]$ es el salto en el valor de la intensidad a través de la frontera del elemento en cuestión. En las ecuaciones anteriores se ha utilizado el teorema de la divergencia:

$$\bar{s} \cdot \int_{\Gamma} v I \bar{n} d\Gamma - \bar{s} \cdot \int_V I \nabla v dV = \bar{s} \cdot \int_V v \nabla I dV \quad (18)$$

para convertir la integral sobre el dominio a una integral sobre el contorno del dominio. En la Ecuación (18), Γ es la frontera que encierra el volumen V . \bar{s} es el vector unitario que apunta en la dirección en la que se propaga la intensidad de radiación $I(\bar{r}, \bar{s})$ y es independiente del volumen V .

En la formulación de elementos finitos continuos, los términos del borde se eliminan durante el ensamble con los elementos vecinos o lo que es lo mismo $[I]=0$. Por el contrario, en la formulación discontinua de elementos finitos, esos términos no se cancelan durante el ensamble. En cambio, se utilizan los siguientes valores:

$$I_j^+ = \lim_{\bar{r}_j \rightarrow \Gamma^+} I(\bar{r}_j) \text{ y } I_j^- = \lim_{\bar{r}_j \rightarrow \Gamma^-} I(\bar{r}_j) \quad (19)$$

donde los supra-índices “+” se refieren a los valores fuera del elemento y los “-” a los valores interiores del elemento. El tratamiento anterior supone que los dos valores I_j^+ e I_j^- a través de la frontera del elemento no son iguales y la notación usual para este salto en los valores de la intensidad es:

$$[I]_j = I_j^+ - I_j^- \quad (20)$$

Estos saltos se modelan a través de flujos numéricos. Para los problemas de transferencia radiativa, la elección más simple y efectiva es el esquema de “upwinding” o “de flujo entrante”:

$$[I]_j = \begin{cases} [I]_j & \text{si } \bar{n} \cdot \bar{s} < 0 \\ 0 & \text{si } \bar{n} \cdot \bar{s} > 0 \end{cases} \quad (21)$$

De esta forma, las funciones de interpolación no requieren continuidad entre elementos. En nuestro caso se utiliza una función escalón para el ángulo sólido y un polinomio para la coordenada espacial $v(\Omega, \bar{r}) = y(\Delta\Omega_i)j(\bar{r})$. Aquí $j(\bar{r})$ es la función de peso para la coordenada espacial y $y(\Delta\Omega_i)$ es la función escalón para el diferencial de ángulo sólido centrado en Ω_i , por lo que la intensidad de radiación dentro del ángulo sólido de control es uniforme, aunque varía con la dirección. Para el cálculo de la intensidad de radiación, $y(\Delta\Omega_i) = 1$ dentro del ángulo sólido de control y es nula en el exterior. Como consecuencia, tanto las soluciones espaciales como angulares son discontinuas, lo que hace inevitable la aparición de efectos numéricos como la falsa dispersión. Sustituyendo las funciones de peso en la Ecuación (17) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta\Omega_i} \bar{s} \cdot \int_{V_e} j(\bar{r}) \nabla I(\bar{r}, \bar{s}) dV d\Omega + \int_{\Delta\Omega_i} \int_{\Gamma} j(\bar{r}) [I] \bar{n} \cdot \bar{s} d\Gamma d\Omega = \\ & = \int_{\Delta\Omega_i} \int_{V_e} [-b(\bar{r}) j(\bar{r}) I(\bar{r}, \bar{s}) + j(\bar{r}) F(\bar{r}, \bar{s})] dV d\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

Esta es la forma integral final de la ecuación de transferencia radiativa. Cabe destacar que si en la Ecuación (22) se hace $[I] = 0$ se impone la continuidad entre elementos, por lo que se llega a la formulación en elementos finitos continuos, y si la función de peso es un polinomio de orden cero se obtiene la formulación en volúmenes finitos usual. De esta manera, ambas formulaciones, elementos finitos continuos y volúmenes finitos, están contenidas en la formulación en elementos finitos discontinuos.

La secuencia de cálculo comienza en los elementos del contorno, para los cuales se debe imponer la condición de borde, que para un contorno gris es la siguiente:

$$I^+(\bar{r}, \bar{s}_i) = e(\bar{r}) I_b(\bar{r}) + \frac{1 - e(\bar{r})}{\rho} \sum_{j=0, \bar{s}'_j \cdot \bar{n} < 0}^{N_\Omega} I^-(\bar{r}, \bar{s}'_j) |\bar{s}'_j \cdot \bar{n}| \Delta\Omega'_j \quad (23)$$

y continúa actualizando las intensidades de radiación correspondientes a una dada dirección angular en todos los elementos del dominio. El cálculo se repite para todas las direcciones. Luego se actualizan los flujos de calor y esta secuencia completa es repetida hasta alcanzar la convergencia. La forma discreta de la intensidad de radiación incidente, que es utilizada para el cálculo de la divergencia del flujo de calor, es:

$$G(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N_\Omega} I(\bar{r}, \bar{s}) \Delta\Omega_i \quad (24)$$

También es utilizada para evaluar la convergencia a través del siguiente criterio:

$$\max \left(\left| \frac{G^{n+1}(\bar{r}) - G^n(\bar{r})}{G^{n+1}(\bar{r})} \right| \right) \leq \epsilon = 10^{-4} \quad (25)$$

Los valores de discontinuidad finales son en general muy pequeños, mucho menores que el

valor establecido en el criterio de convergencia.

Debido a que la formulación en elementos finitos discontinuos es local, para analizar la implementación numérica hay que centrarse en el elemento i y en los vecinos. Además hay que convivir con dos tipos de valores nodales, los valores locales de cada elemento en el nodo y un valor global del nodo que surge como un promedio de los valores nodales de cada elemento asociado a ese nodo. Esto puede ser una desventaja desde el punto de vista del uso de memoria, ya que requiere guardar más información por nodo, pero que se ve altamente compensada al evitar el ensamble y resolución de una matriz global.

Una descripción completa de la implementación del método se encuentra en [Cui y Li \(2005\)](#) y [Li \(2006\)](#).

3 VALIDACIÓN

En esta sección se muestra la comparación de los resultados obtenidos con el código desarrollado con algunas soluciones analíticas presentes en la bibliografía. El primer caso consiste en calcular el flujo radiativo entre dos placas (planas, paralelas e infinitas) en la aproximación unidimensional a lo largo de la dirección normal a las mismas. En la Figura 1 y la Figura 2 se observan el excelente acuerdo que se logra para este problema sencillo, con dos discretizaciones distintas (cuatro elementos y veinte elementos).

Los parámetros utilizados en este caso de prueba corresponden a un medio participante que se encuentra a una temperatura de 100°K , con un coeficiente de absorción $b = 1\text{ m}^{-1}$, una emisividad de la superficie $e = 1$, y con una temperatura superficial igual a 0°K .

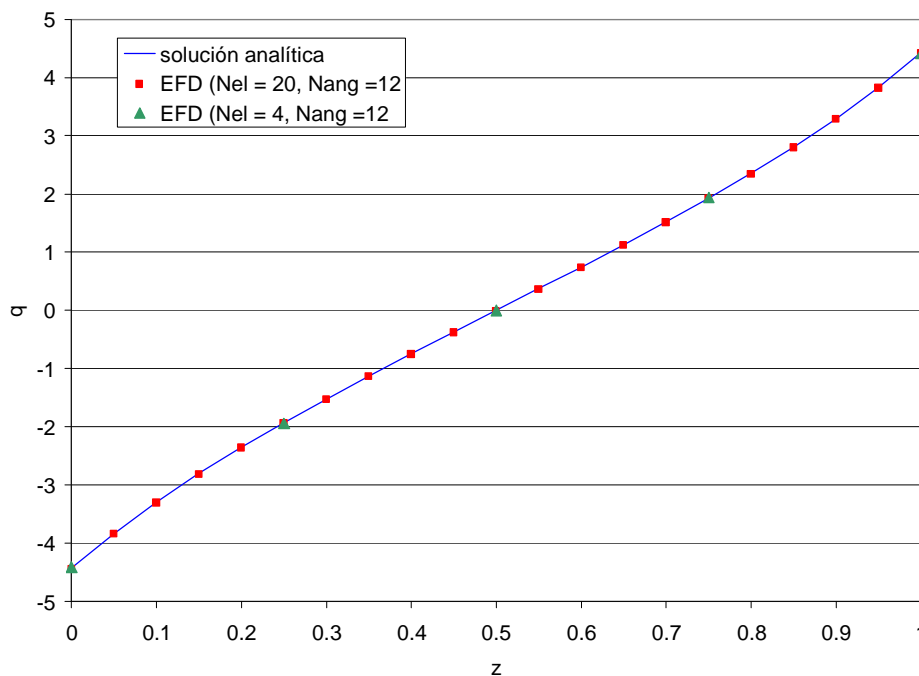


Figura 1. Flujo de calor teórico vs. Calculado [W/m^2]

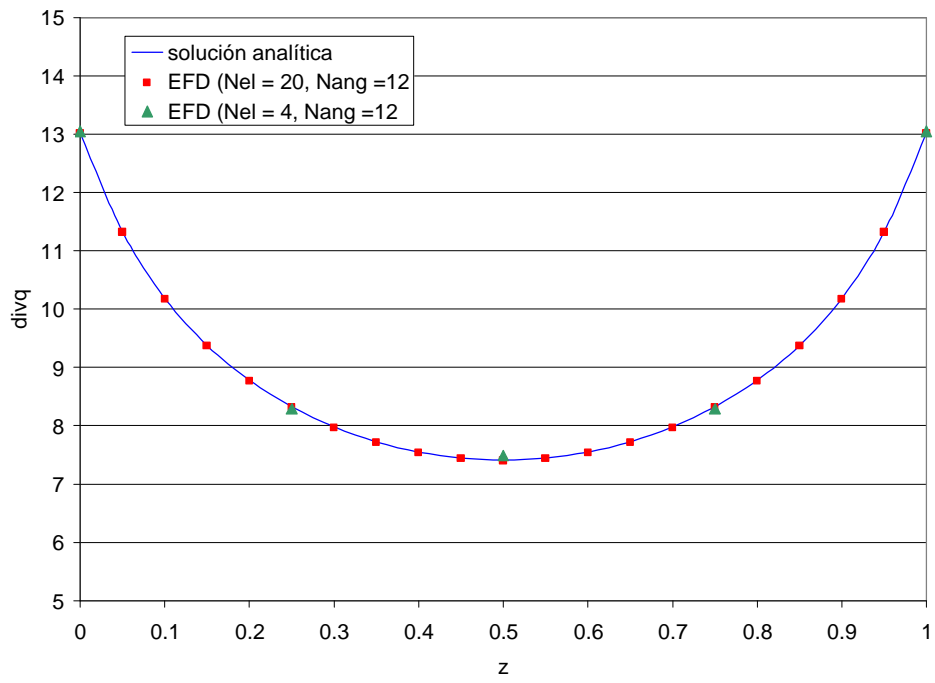


Figura 2. Divergencia teórica del flujo de calor vs. calculada [W/m³]

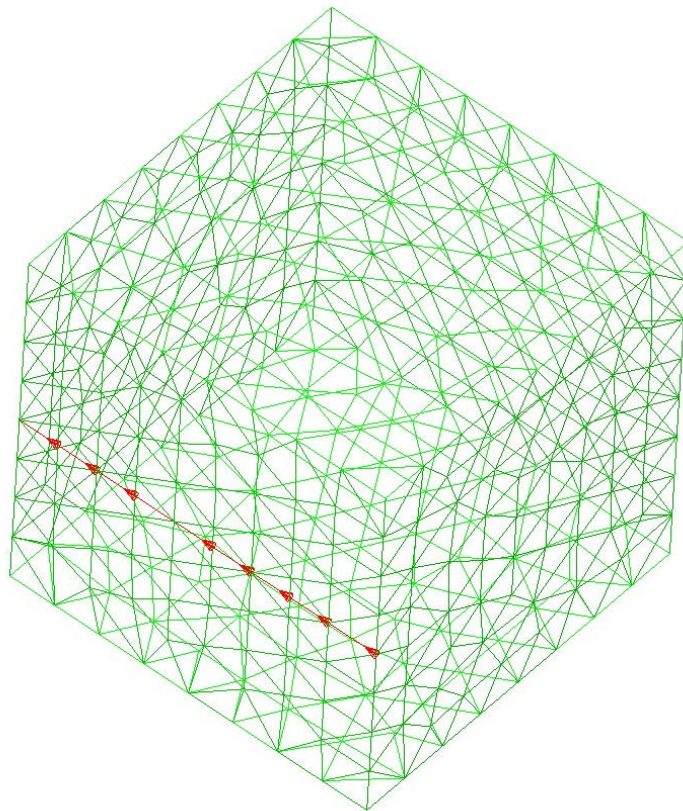


Figura 3. Malla de elementos finitos

En un segundo caso se plantea el cálculo en tres dimensiones en el interior de un cubo de arista unitaria, con las mismas propiedades y condiciones de contorno que se utilizaron en el problema unidimensional. La malla de elementos finitos se ilustra en la Figura 3, y esta compuesta por 5137 tetraedros y 1092 nodos.

En la Figura 4 se muestra el módulo del flujo de calor sobre las paredes del cubo unitario. En la Figura 5 se realiza una comparación de los flujos de calor con los que se obtienen en el plano $z=0,5$ cambiando la emisividad de las paredes de $e = 1$ a $e = 0,5$.

En la Figura 6 se compara la solución analítica del flujo de calor normal a una cara del cubo (Raithby y Chui, 1990) con los resultados obtenidos con el modelo 3D para dos casos extremos del coeficiente de absorción: $0,1$ y 1m^{-1} .

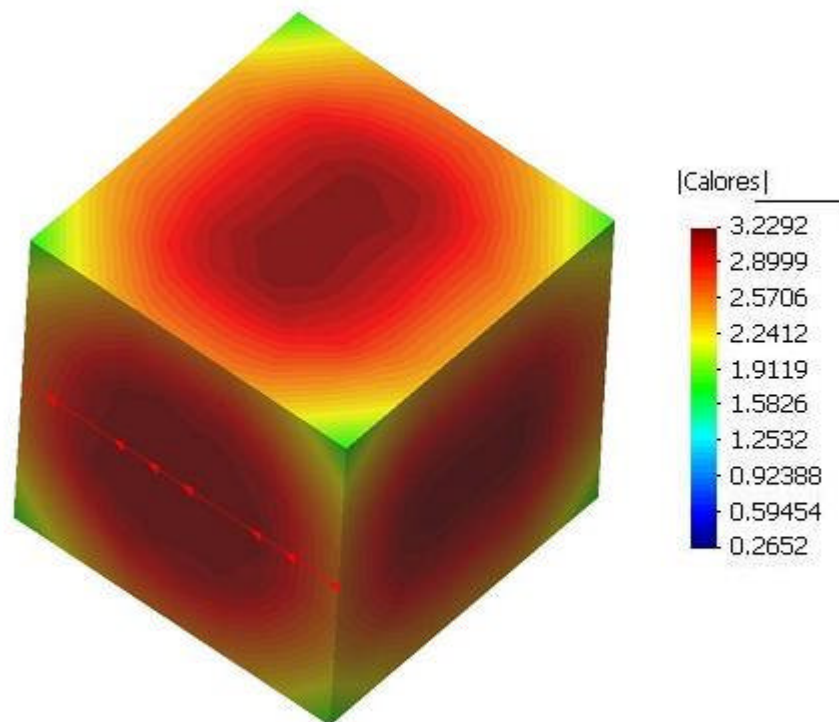


Figura 4. Módulo del flujo de calor sobre las paredes [W/m^2]

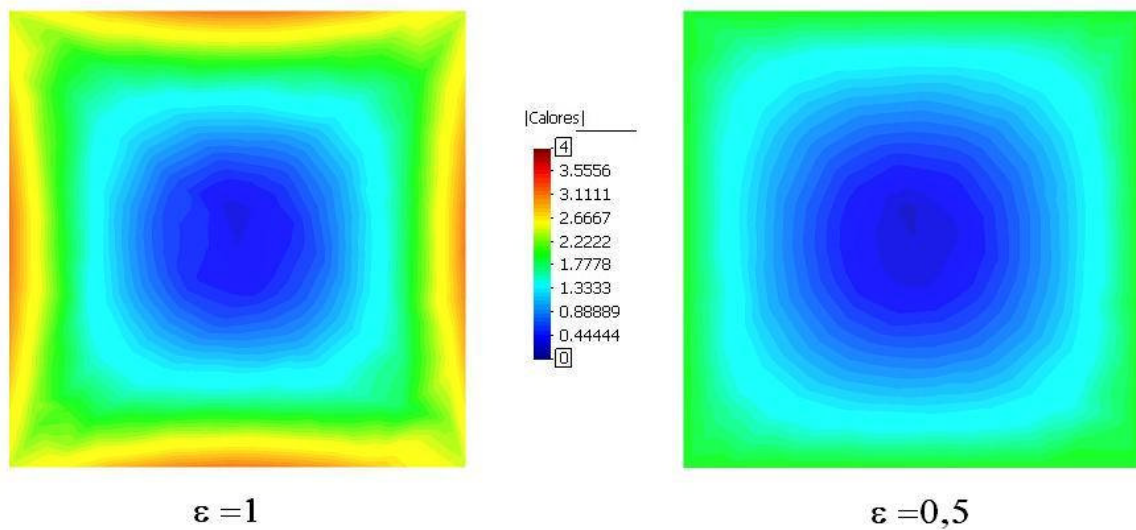


Figura 5. Corte del módulo del flujo de calor en el plano $z=0,5$

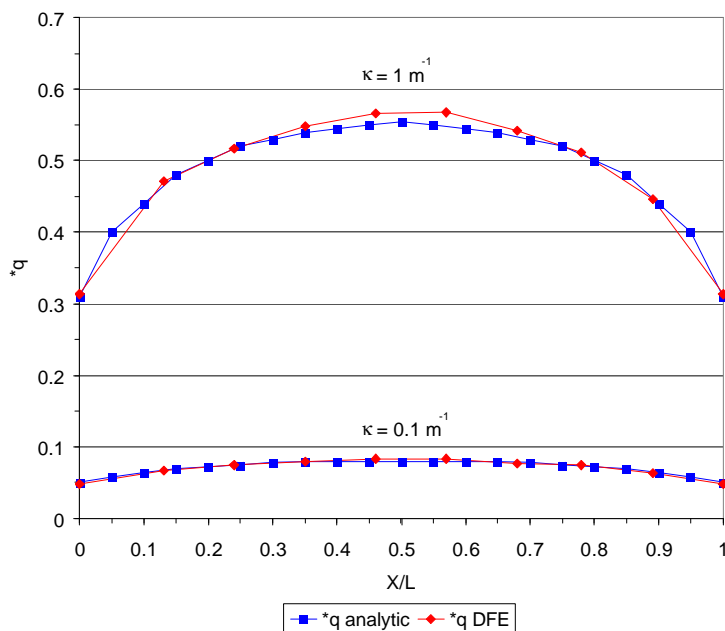


Figura 6. Corte del flujo de calor normal en la pared del cubo

Por último se compara la solución analítica que existe para el flujo de calor radial sobre el lateral de un cilindro (Chui et al., 1992) con los resultados del modelo 3D. El problema que se resuelve es también el de un gas participante a una temperatura de 100°K con un coeficiente de absorción 1m^{-1} , las paredes a 0°K y con emisividad $\epsilon = 1$. En la Figura 7 se observa el módulo del flujo de calor sobre las paredes del cilindro y la posición del corte realizado sobre la pared, mientras que en la Figura 8 se muestra la comparación de los valores calculados analíticamente versus los calculados con el modelo 3D para una malla poco densa (1859 nodos).

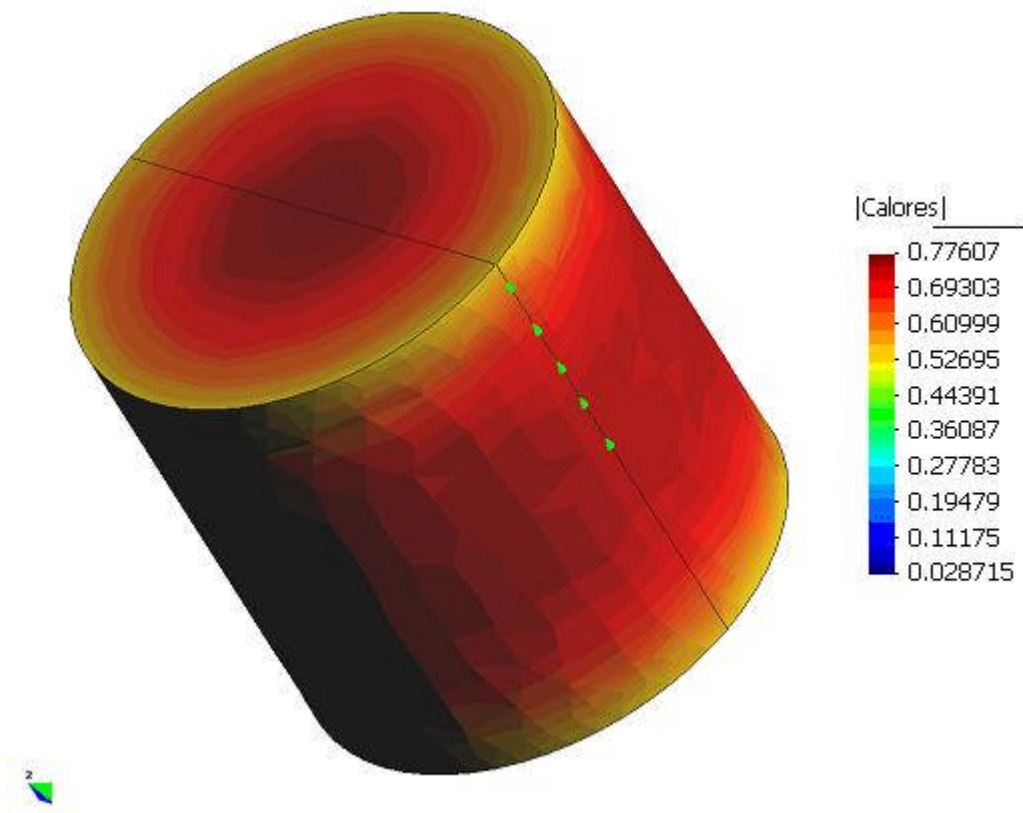


Figura 7. Módulo del flujo de calor volumétrico en las paredes del cilindro

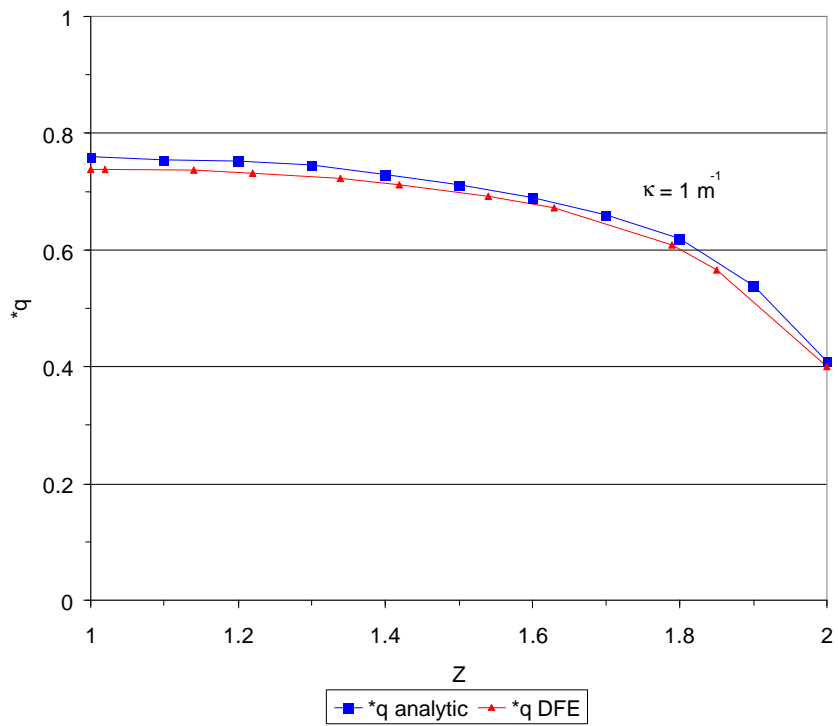


Figura 8. Corte longitudinal del flujo de calor radial en la pared del cilindro

4 EJEMPLO DE APLICACIÓN

En esta sección se muestran los resultados obtenidos al aplicar esta metodología de cálculo para evaluar los flujos de calor radiativos en un horno para el curado de chapa pintada. Este horno cuenta con tres cámaras de combustión externas. Los humos resultantes de la combustión son inyectados en la cámara principal del horno donde intercambian calor por convección y radiación con la chapa y las paredes del horno. A los efectos de esta evaluación se supuso que las distribuciones de temperatura en los humos y en las paredes son iguales y dependen únicamente de la coordenada longitudinal del horno. Los valores utilizados, fueron obtenidos con un modelo simplificado del horno y se muestran en la Figura 11.

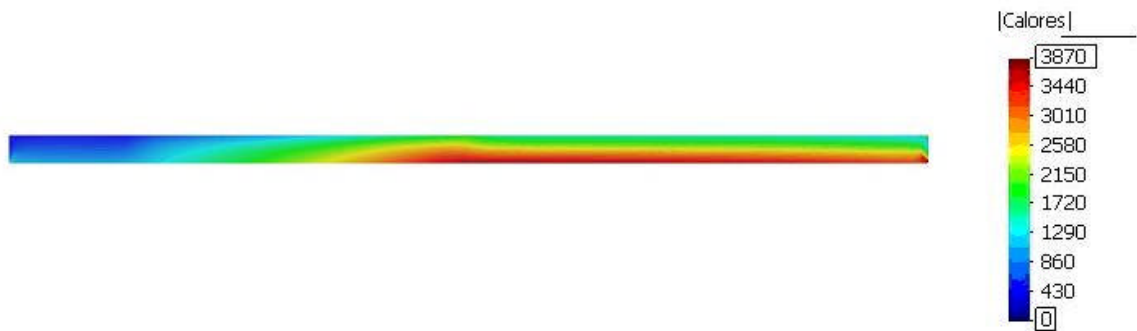


Figura 9. Corte longitudinal del módulo del flujo de calor [W/m^2]

Como primer paso se malló el interior del horno con tetraedros, y se utilizó una emisividad para las paredes de $e = 0,85$ y de $e = 0,30$ para la chapa, con un coeficiente de absorción para el gas de $b = 0,30 \text{ m}^{-1}$. En la Figura 9 se muestra un corte longitudinal del módulo del flujo de calor volumétrico y en la Figura 10 una serie de cortes transversales del horno con el módulo del flujo de calor sobre dichos planos.

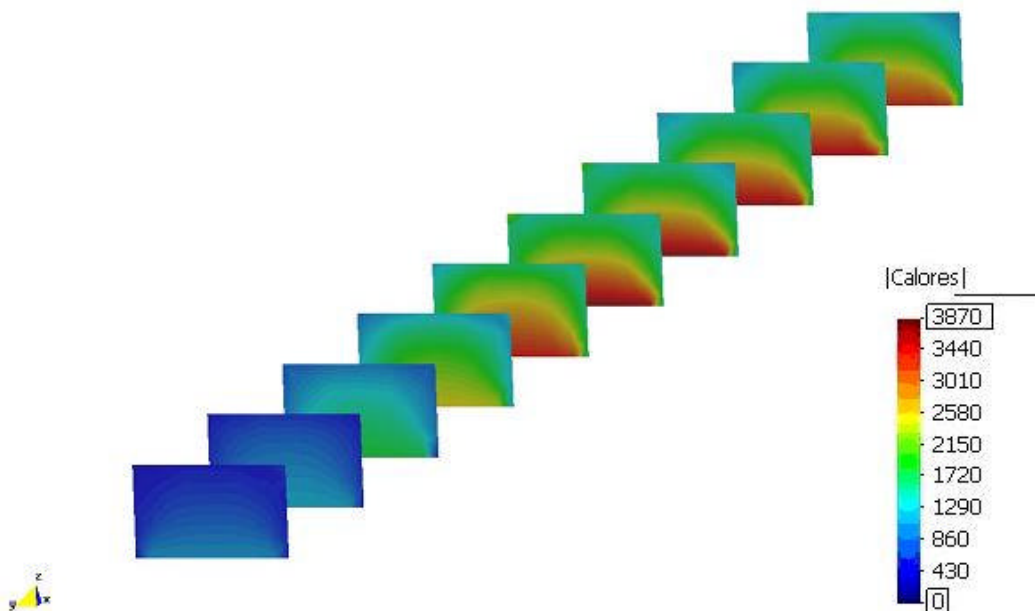


Figura 10. Cortes del módulo del flujo de calor dentro del horno [W/m^2]

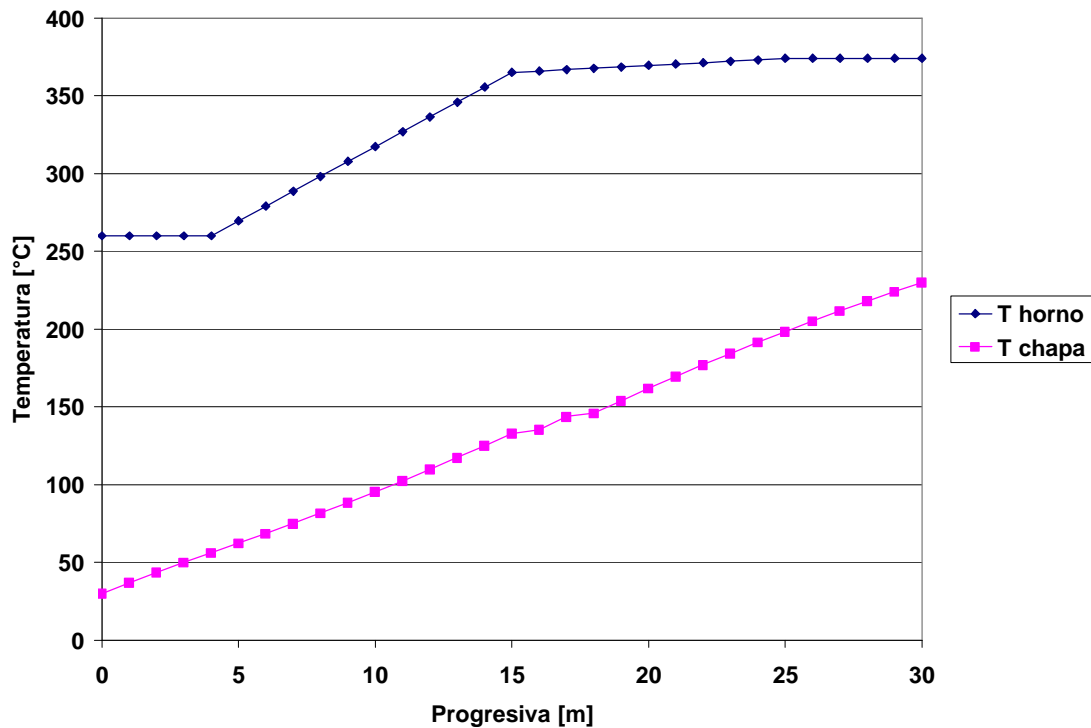


Figura 11. Distribución de temperaturas utilizadas para el horno, las paredes y la chapa

5 FACTORES DE VISTA

Una aplicación interesante de este algoritmo es el cálculo de los factores de intercambio directos correspondientes a los problemas de intercambio de radiación en medios participantes o no. En el caso en que el medio sea no participante los factores de intercambio directo se reducen al producto del factor de vista por el área de la superficie. Para realizar el cálculo de los factores de intercambio directos se deben realizar cálculos integrales que requieren importantes tiempos de cálculo, especialmente para geometrías complejas en las que se presentan obstrucciones. Estos factores pueden ser calculados resolviendo la ecuación de transferencia radiativa.

Un algoritmo con el que se puede proceder para dicho cálculo es, fijar una temperatura arbitraria ($64,77^{\circ}\text{K}$) a una superficie ó volumen y temperaturas nulas para el resto de las superficies y volúmenes, para luego calcular los flujos de calor sobre el resto de las superficies y volúmenes. Con estos valores de temperatura, el valor numérico de los flujos de calor sobre las superficies y volúmenes coincide con los factores de intercambio directo dividido por el área de la superficie con respecto al resto de las superficies y volúmenes.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación del algoritmo propuesto, que corresponde a la cavidad bidimensional cerrada de la Figura 12.

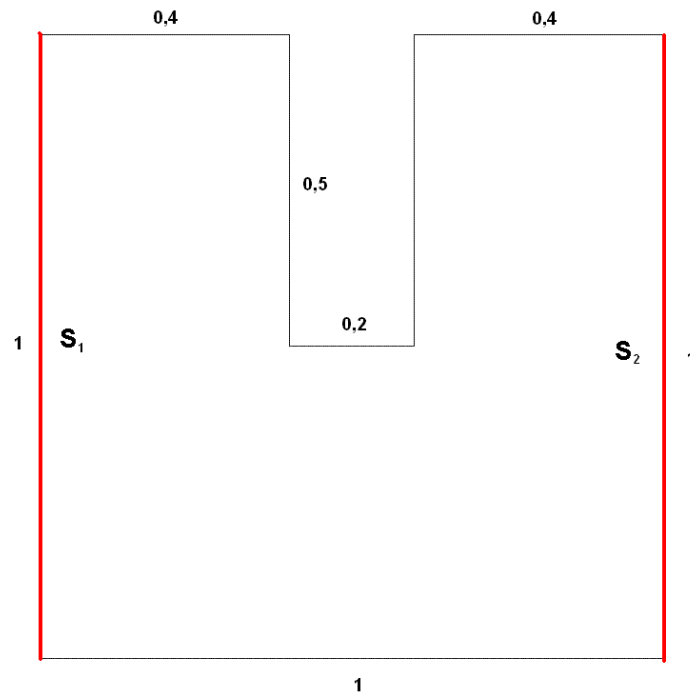


Figura 12. Cavity utilizada como ejemplo

Para verificar el valor obtenido con el método de elementos finitos discontinuos, se puede calcular exactamente el factor de vista entre dos laterales de la cavity, utilizando el método de las cuerdas de Hottel. El factor de vista entre la cara S_1 y S_2 es $F_{12} = 0,181$. Es decir que la superficie S_2 recibe el 18,1% de la energía que emite la superficie S_1 . Luego se aplica el método de elementos finitos discontinuos para calcular este mismo factor de vista. También se puede calcular analíticamente la distribución del factor de vista $F(y)$ de un diferencial de área sobre la superficie S_2 con respecto a S_1 como función de la coordenada vertical, Ecuaciones (26), (27), y (28).

$$F(y) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\arctan \left(\frac{0.5 - y}{0.6} \right) \right) - \sin \left(-\arctan(y) \right) \right] \quad 0 \leq y < \frac{1}{2} \quad (26)$$

$$F(y) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\arctan \left(\frac{y - 0.5}{0.4} \right) \right) - \sin \left(-\arctan(y) \right) \right] \quad \frac{1}{2} \leq y < \frac{5}{6} \quad (27)$$

$$F(y) = 0 \quad \frac{5}{6} \leq y \leq 1 \quad (28)$$

Al haber elegido convenientemente la temperatura de la superficie S_1 , el flujo de calor normal a la superficie S_2 será directamente el factor de vista, como se muestra en la Ecuación (29).

$$q_{12} = F_{12} S T_1^4 = F_{12} \quad (29)$$

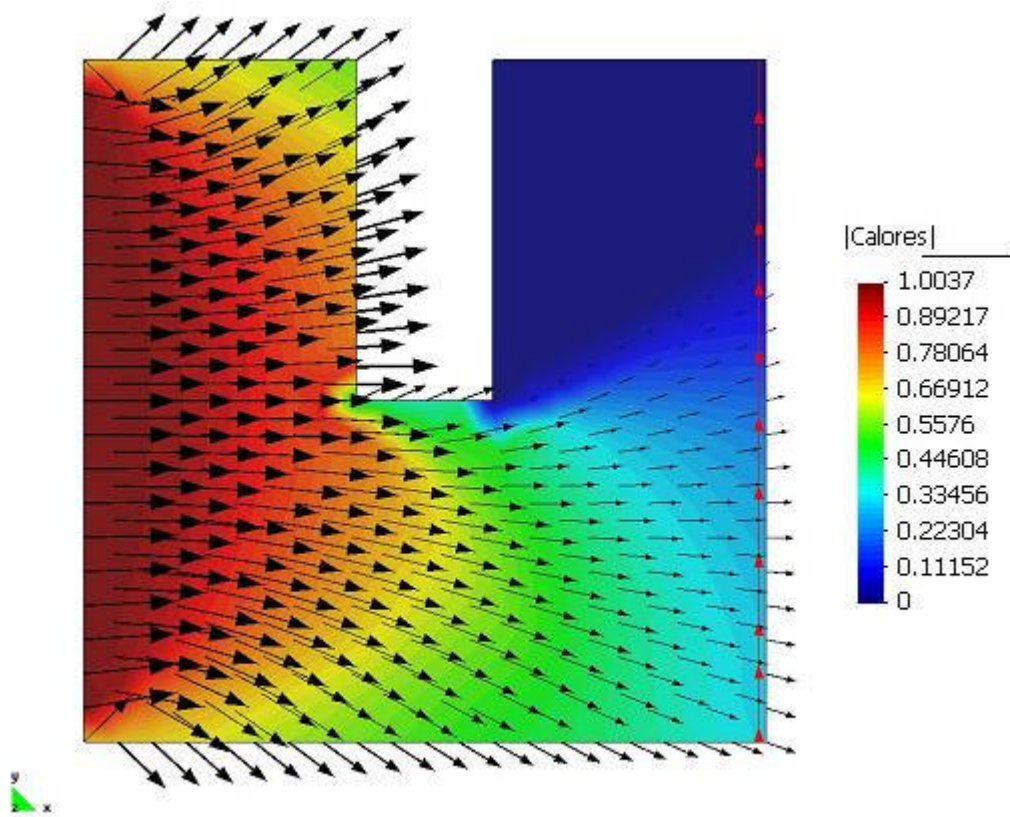


Figura 13. Corte del flujo de calor

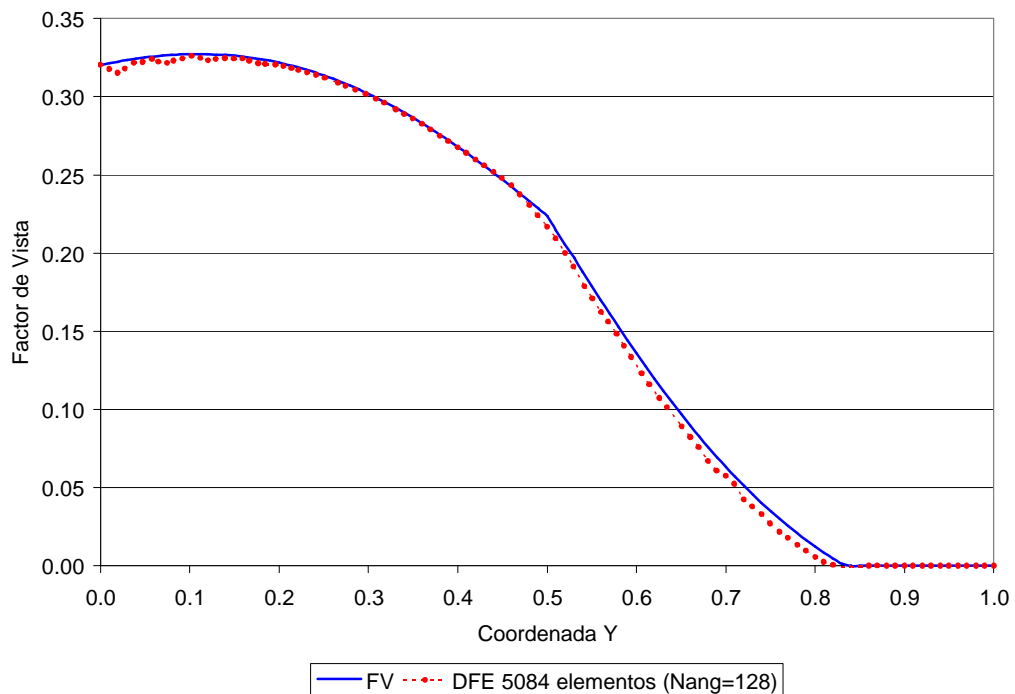


Figura 14. Distribución de los factores de vista

En la Figura 13 se observan los flujos de calor calculados con el método de elementos finitos discontinuos utilizando una malla para el cálculo compuesta por 5084 triángulos con 2668 nodos y 128 direcciones, en la que la longitud promedio de las aristas de los triángulos es 0,02. En la Figura 14 se grafican las distribuciones del factor de vista calculadas analíticamente y numéricamente. Integrando la distribución de factores de vista se encuentra el factor de vista total $F_{12} = 0,178$. Procediendo de esta forma se puede hallar la matriz de factores de vista de la cavidad.

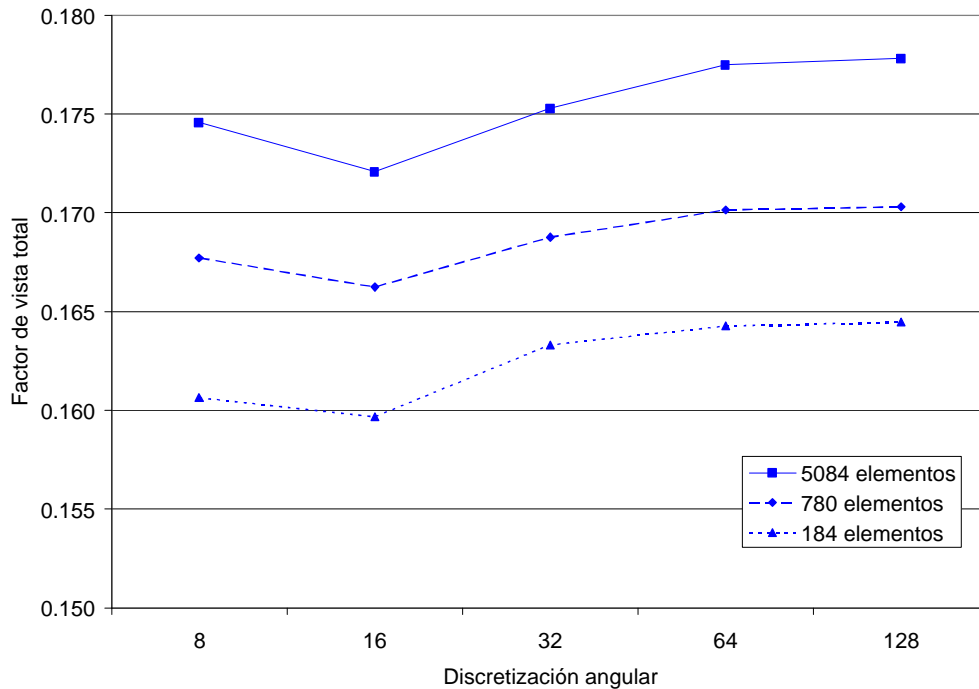


Figura 15. Convergencia según la discretización angular y cantidad de elementos para mallas no estructuradas

En la Figura 15 se observa la convergencia del factor de vista total, es decir la integral de la distribución de factores de vista, con respecto al tamaño de la malla y la discretización angular. En la Figura 16 se observa la convergencia de los errores relativos del factor de vista total, calculados según la Ecuación (30), también con respecto al tamaño de la malla y la discretización angular.

En la Figura 17 se muestra el análisis de convergencia de distintas mallas no estructuradas con las diferentes discretizaciones angulares y también el desempeño de un mallado estructurado para una única discretización angular, de 64 direcciones. En la Figura 18 se realiza la misma comparación, pero esta vez relativa al valor teórico de la distribución de factores de vista. Se observa que las mallas estructuradas tienen un desempeño muy superior a las no estructuradas.

$$E_{rel} = \frac{\int_0^1 |F(y) - F_{EFD}| dy}{\int_0^1 F(y) dy} \quad (30)$$

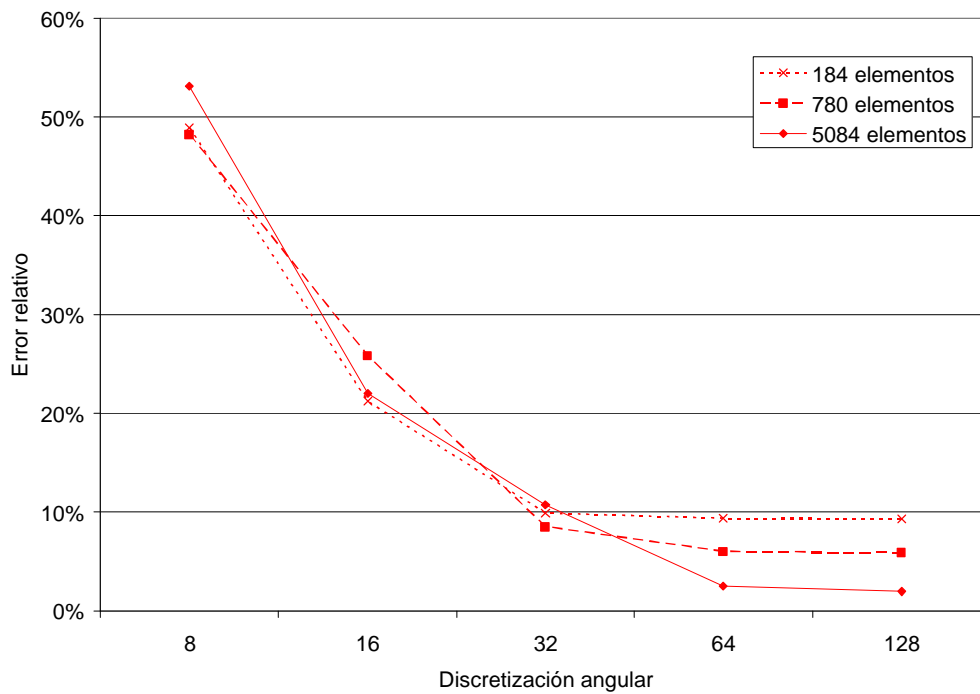


Figura 16. Errores relativos según la discretización angular y la cantidad de elementos para mallas no estructuradas

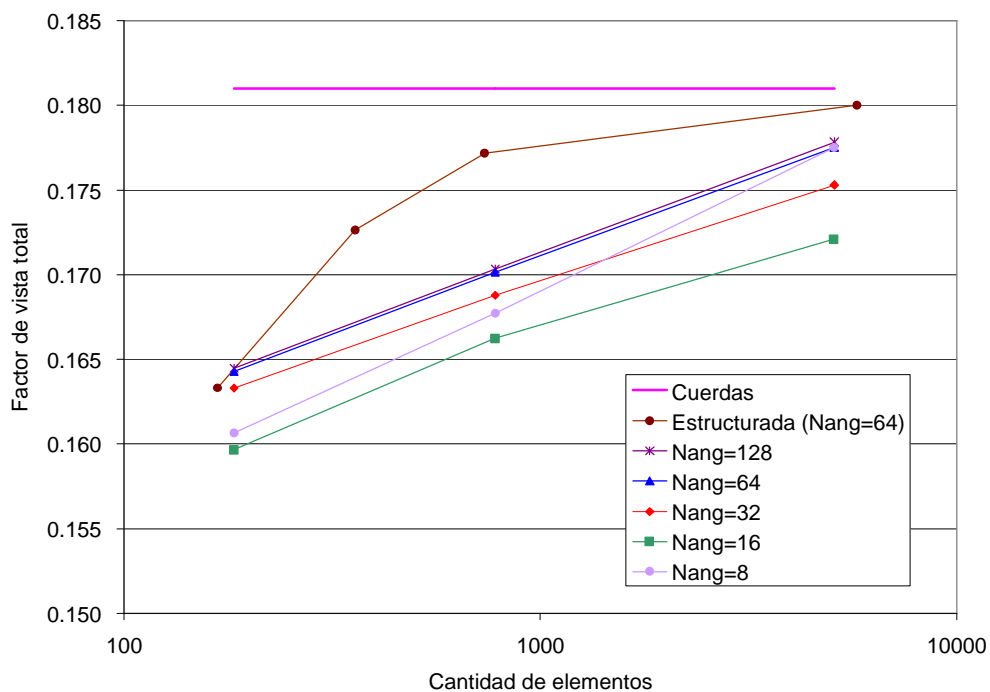


Figura 17. Factor de vista total según la discretización angular, la cantidad de elementos y el tipo de malla utilizado

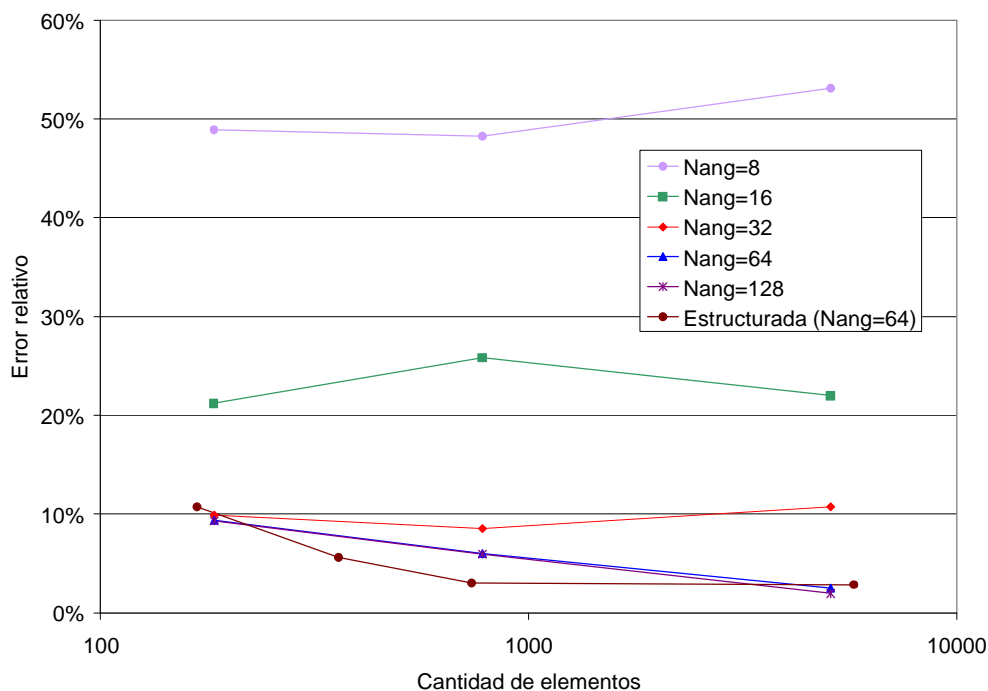


Figura 18. Errores relativos según la discretización angular, el tipo de malla y la cantidad de elementos

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se implementa y analiza el método de elementos finitos discontinuos para resolver en forma versátil y eficiente la ecuación de transferencia radiativa. Se muestra que los resultados obtenidos con esta formulación son muy precisos para el caso de geometrías sencillas, aún cuando se utilicen mallas y discretizaciones angulares relativamente groseras. Sin embargo, es importante destacar que en el caso de geometrías complejas y con obstrucciones, si las mallas utilizadas no son lo suficientemente densas, especialmente en lo que respecta a la discretización angular, se obtienen resultados que difieren muy significativamente de los teóricos. Es esperable encontrar el mismo tipo de errores en los casos en los que hay gradientes de temperatura importantes sobre las superficies de la cavidad.

REFERENCIAS

- W.H. Reed, T.R. Hill, *Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479, Los Alamos, NM, 1973.
- B. Cockburn, G. Karniadakis, C.W. Shu. The Development of Discontinuous Galerkin Methods. In: B. Cockburn, G. Karniadakis, C.W. Shu, editors. *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 11. New York: Springer-Verlag, 2000; 3-50.
- B. Cockburn. Devising Discontinuous Galerkin Methods for Non-Linear Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001; 128:187-204.
- B.Q. Li. *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Springer, 2006.
- X. Cui, B.Q. Li. A Mixed-Mesh and New Angular Space Discretization Scheme of Discontinuous Finite Element Method for Three-Dimensional Radiative Transfer in

Participating Media. *Transactions of the ASME*, November 2005.

M.F. Modest. *Radiative Heat Transfer 2nd Ed.* New York: McGraw-Hill, 2003.

R. Siegel, J.R. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3rd Ed. Washington, D.C.: Hemisphere Publishing Company, 1992.

Raithby G.D., Chui E.H. A Finite-Volume Method for Predicting a Radiant Heat Transfer in Enclosures With Participating Media. *Journal of Heat Transfer*, vol. 112, pp 415-423, 1990.

Chui E.H., Raithby G.D., Hughes P.M.J. Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with the Finite Volume Method. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 6, number 4, pp 605-611, 1992.