

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL SEGUIMIENTO DE PARTÍCULAS EN EL MODELADO FÍSICO-BIOLÓGICO DEL OCÉANO

Bárbara C. Franco^a y Elbio D. Palma^b

^a*Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur, Avenida Além 1253, 8000 Bahía Blanca, y Departamento de Ciencias de la Atmósfera y los Océanos - FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, C1428 EHA Capital Federal, Argentina, ocebfc@furg.br, <http://www.uns.edu.ar/>, <http://www-atmo.at.fcen.uba.ar>*

^b*Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur, Avenida Além 1253, y Instituto Argentino de Oceanografía, CONICET, 8000 Bahía Blanca, Argentina, uspalma@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar/>*

Palabras Clave: Modelado físico-biológico, seguimiento de partículas, sistemas rígidos.

Resumen. Los Métodos Lagrangeanos de Seguimiento de Partículas (MLP) resultan herramientas adecuadas para aplicaciones en modelado físico-biológico del océano, permitiendo investigar las trayectorias y transporte de partículas que ‘derivan’ en el océano. Debido a la complejidad de la dinámica oceánica, representada por procesos oceanográficos que ocurren en distintas escalas de tiempo, la aplicación de MLPs debe ser analizada con respecto a las limitaciones matemáticas y numéricas de los métodos de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), que son integradas para determinar la posición de las partículas en función del tiempo, y las consecuencias de estas limitaciones en la resolución de la trayectoria ‘real’ de partículas que derivan en el océano. El presente trabajo tiene como objetivo comparar las soluciones analíticas y numéricas de un grupo de EDOs, que varían desde ecuaciones no rígidas hasta ecuaciones fuertemente rígidas, empleando algunos de los métodos numéricos de solución de EDO más utilizados en la simulación digital de sistemas dinámicos y modelado físico-biológico del océano. Además, el trabajo expone una detallada discusión sobre las limitaciones de los métodos testeados con respecto a dinámica oceánica ‘rígida’ y destaca el comportamiento de métodos explícitos de la familia Runge-Kutta de mayor orden y paso fijo como el *RK4* y *RK5*, en la resolución de sistemas rígidos bajo condición de criterio en seleccionar el tamaño del paso de tiempo apropiado. El estudio tendrá posteriormente aplicación en estudios de modelado físico-biológico en regiones particulares con dinámica oceánica ‘rígida’ como la plataforma continental Argentina.

1 INTRODUCCIÓN

Los Métodos Lagrangeanos de Seguimiento de Partículas (MLP) resultan herramientas adecuadas para aplicaciones en modelado físico-biológico del océano, permitiendo investigar las trayectorias y transporte de partículas de interés, las cuales estarían representadas principalmente por organismos marinos que viven en ‘deriva’ en el océano (i.e., plancton). Los métodos MLP utilizan como entrada campos eulerianos de velocidades provistos por un modelo hidrodinámico tridimensional y luego integran temporalmente una ecuación diferencial ordinaria (EDO) para determinar la posición de las partículas en función del tiempo. Debido a la complejidad de la dinámica oceánica, representada por procesos oceanográficos que ocurren en distintas escalas de tiempo, la aplicación de MLPs debe ser analizada con respecto a las limitaciones matemáticas y numéricas de los métodos de integración de EDO y a las posibles consecuencias de estas limitaciones en la resolución de la trayectoria ‘real’ de partículas que derivan en el océano. En este sentido la trayectoria de una partícula en deriva oceánica representa un sistema *rígido* a ser resuelto por métodos de integración de EDO. Se dice que un sistema es “rígido” cuando presenta características de dinámica lenta y rápida en forma simultánea (Heath, 2002). En el caso oceánico la dinámica rápida está representada por términos de difusión turbulenta, mientras que la lenta se asocia a procesos advectivos. El problema físico de advección-difusión en una dimensión es gobernado por la siguiente ecuación (Durrán, 1999):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = M \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde ψ es la función corriente y c es la velocidad advectiva, y M es el coeficiente de difusión turbulenta. Además, el flujo advectivo puede variar considerablemente en el océano una vez que esta representando procesos que ocurren en distintas escalas temporales, como por ejemplo los flujos geostróficos (i.e., giros oceánicos, meandros, vórtices) y ageostróficos (i.e., marea, ondas internas, transporte de Ekman). Sin embargo, los estudios de modelado físico-biológico ya realizados en la literatura han empleado métodos no rígidos para integración del seguimiento Lagrangeano de partículas en el océano y no es común encontrar discusiones sobre las limitaciones que deben ser consideradas con respecto a dinámica oceánica de cada región modelada y las restricciones de los métodos de integración de EDO empleados.

La presencia de dinámicas lentas y rápidas dentro del mismo sistema, introduce dificultades al momento de obtener su solución numérica y los métodos no rígidos de integración de EDO tienen limitaciones matemáticas y numéricas para resolver sistemas rígidos. La formulación Lagrangeana ha sido ampliamente reconocida como una aplicación adecuada para el análisis de trazadores pasivos conservados (Bennett, 2006). Sin embargo, el modelado oceánico todavía impone restricciones a la determinación de la trayectoria ‘real’ de trazadores que sufren procesos difusivos, una vez que la turbulencia de sub-grilla (procesos que ocurren a una escala menor que la resolución espacial del modelo) es parametrizada (coeficiente M en la ecuación 1) y por lo tanto no puede ser calculada analíticamente. Es así que el movimiento ‘real’ de partículas que derivan en el océano no puede ser completamente determinado explotando la equivalencia entre seguir partículas y solucionar una ecuación de transporte de masa para una sustancia conservativa (ecuación 1), como fuera sugerido por Thompson y Gelhar (1990). Además, la aplicación del concepto Lagrangeano en un flujo de número de Reynolds grande como el océano, donde la trayectoria de la partícula del flujo es

altamente variable, solamente se justifica en un sentido estadístico (Bennett, 2006).

Según Dimou y Adams (1993), se puede emplear un esquema de camino aleatorio para calcular el desplazamiento de partículas mediante la suma de un componente determinístico advectivo y de un componente Markoviano independiente aleatorio, que aproxime estadísticamente las características de la dispersión del ambiente. Cada partícula discreta modelada puede estar sujeta a advección, difusión, y decaimiento por una variedad de procesos determinísticos y estocásticos relativamente simples. Por ejemplo, la advección es simulada por la translación de cada partícula con una velocidad derivada desde el campo de velocidad del fluido local (coeficiente c en la ecuación 1). La difusión turbulenta es generalmente simulada empleando una técnica de camino aleatorio, donde cada posición de la partícula es periódicamente perturbada por uno vector aleatorio, derivado desde una función de distribución definida, P . El tamaño espacial (varianza) de P es derivado desde el coeficiente(s) de difusión efectiva requerido (ver Hunter et al., 1993; Visser, 1997). Por lo tanto, la técnica Lagrangeana es utilizada para adveccionar las partículas y el procedimiento de camino aleatorio es empleado para simular los efectos de la difusión turbulenta en escala sub-grilla. Representando la concentración del trazador conservativo por una colección de partículas, el problema del transporte se puede también solucionar por modelos de seguimiento de partículas (Dimou y Adams, 1993; Thompson y Gelhar, 1990). Según lo descrito por esos estudios anteriores, el desplazamiento de una partícula en un modelo de camino aleatorio es gobernada por la ecuación no lineal de Langevin (Gardiner, 1985):

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A(\vec{X}, t) + B(\vec{X}, t)Z_n \quad (2)$$

donde $\vec{X}(t)$, $A(\vec{X}, t)$ y $B(\vec{X}, t)$ son vectores, $\vec{X}(t)$ define la posición de una partícula, el primer termino del lado derecho de la ecuación es la fuerza determinística que advecta la partícula, y el segundo representa la fuerza aleatoria que lleva la difusión de la partícula, considerando que $Z(t)$ es un vector de los números aleatorios independientes con promedio cero y una unidad de varianza.

El presente trabajo tiene como objetivo comparar las soluciones analíticas y numéricas de un grupo de EDOs, que varían desde ecuaciones no rígidas hasta ecuaciones fuertemente rígidas, empleando algunos de los métodos numéricos de solución de EDOs más utilizados en la simulación digital de sistemas dinámicos y modelado físico-biológico del océano. Además, pretendemos determinar el tipo de método y las condiciones que mantengan mayor precisión en la resolución del sistema determinístico oceánico, una vez que el componente estocástico es simulado de manera aleatoria y no puede ser determinado previamente. El estudio tendrá posteriormente aplicación en regiones particulares con dinámica oceánica 'rígida' como la plataforma continental Argentina, cuyo campo de flujo está dominado por componentes de la marea lunar, vientos, descargas de agua dulce y corrientes de contorno oeste (Corriente de Malvinas).

2 METODOLOGÍA

2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Una EDO está caracterizada por una ecuación del tipo: $y' = f(t, y)$. La ecuación no determina por sí mismo una función única porque solamente la pendiente $y'(t)$ de los

componentes de la solución están prescritos por la EDO para cualquier valor de t , no el valor de la solución $y(t)$ por sí mismo, entonces hay generalmente una familia infinita de funciones que satisfacen la EDO. Para seleccionar una solución particular, debemos especificar el valor de la función de la solución, denotado por y_0 , para un cierto valor de t , denotado por t_0 . Bajo asunciones razonables, este requisito adicional determina la solución única a la EDO dada. Con métodos explícitos de integración de EDO este es el único valor considerado para determinar la nueva posición de cada partícula, así que cada condición inicial es ‘olvidada’ a cada nuevo paso temporal. Una EDO rígida no puede ser resuelta a menudo usando métodos explícitos porque la matriz Jacobiana $\partial y/\partial t$ no tiene todos sus autovalores de tamaño similar.

Los errores en la determinación de las soluciones numéricas de EDOs vienen sobre todo en dos formas. La primera forma de error se relaciona con la exactitud de la función diferencial para aproximar la ecuación diferencial ordinaria. Esta forma de error se llama, el error de truncamiento local, y es el error asociado a un solo paso de tiempo del algoritmo. Tales errores locales se pueden ser estimados fácilmente y después controlados puntualmente por algoritmos adaptivos (Heath, 2002). La segunda forma de error, el error de discretización global, es el error acumulativo relacionado con la diferencia entre la solución verdadera y nuestra aproximación, $y(t+\Delta t)$. Esta forma de error es más difícil de controlar. Debido a la estabilidad, el error global no es necesariamente una función de aumento del número de pasos de tiempo, sino que puede oscilar con la disminución del número de pasos empleados (e.g., Heath, 2002; Bradie, 2006). Un tercer tipo de error existe, redondeando el error, generado por la precisión finita del cómputo. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas la fuente del error dominante es error de truncamiento local en soluciones numéricas de EDOs (e.g., Heath, 2002), y es este error que será considerado en este trabajo como ‘error local’.

2.2 Métodos de integración de EDO

Resolver una ecuación diferencial ordinaria en el contexto del modelado físico-biológico oceánico consiste en, conociendo las velocidades eulerianas, obtener la función primitiva que describe la posición futura. Como las componentes eulerianas de velocidad calculadas por los modelos oceánicos son resultantes de procesos advectivos y difusivos (parametrizados) representan sistemas rígidos a ser resueltos. Los métodos no rígidos tienen restricciones en cuanto a la resolución de sistemas rígidos pero no hay detallada discusión sobre las restricciones de los métodos rígidos de integración de EDOs para el caso oceánico. En este trabajo se comparan resultados analíticos y numéricos obtenidos para un conjunto de EDOs, desde no rígidas hasta fuertemente rígidas empleando los siguientes esquemas numéricos:

a) **Métodos de paso fijo y sin control de error local:** Euler modificado de orden 2 o método de Heun (*RK2*), clásico Runge-Kutta de orden 4 (*RK4*), Runge-Kutta de orden 5 (Dormand-Prince, *RK5*) e el predictor-corrector Adams-Bashforth-Moulton de orden 4 (*ABM4*);

b) **Métodos de paso variable y con sensibilidad al control de error local:** explícito Runge-Kutta de ordenes 2 y 3 (par de Bogacki y Shampine, *RK2,3*), explícito Runge-Kutta de ordenes 4 y 5 (Runge-Kutta-Fehlberg, *RK4,5*), *ABM4* de paso variable y con control de error implementado (*ABM4c*), Klopfenstein-Shampine (rígido, formula de diferenciación numérica retrograda - *KS*) y el Modified Rosenbrock (rígido, par modificado de Rosenbrock - *MR2,3*).

Estos esquemas numéricos son ampliamente utilizados en la literatura y una completa descripción de cada uno de ellos se encuentra en Shampine y Reichelt (1997), Durrán (1999)

y Heath (2002). El control del error local en los métodos explícitos de paso variable depende, para métodos de distinto orden, de la forma de la aproximación de la función derivada; mientras que en los métodos implícitos el error depende de la aproximación de la función derivada en la predicción de la integración futura de la EDO. Sin embargo, en el modelado físico-biológico las velocidades eulerianas son conocidas sólo a un paso de tiempo fijo (aquel utilizado en el modelo oceánico), de modo que en este caso la adaptación del tamaño del paso de tiempo en términos del flujo no es viable. En contrapartida, debido a las limitaciones matemáticas y numéricas de cada método, es importante una buena selección del intervalo de tiempo en el cual las velocidades eulerianas son integradas por el modelo oceánico y del paso de tiempo en el cual son integradas las EDOs en el seguimiento de las partículas. Es por ello que para analizar la exactitud los métodos a) y b) en la aproximación de distintas EDOs (Tabla 1), éstos fueron analizados con respecto a su capacidad para resolver numéricamente con exactitud el problema sin la implementación del control de error local:

	Ecuación diferencial ordinaria	Nivel de <i>rigidez</i>
F1	$y' = -y^3, y(0) = 1$	no rígida
F2	$y' = t^2 - y, y(0) = 1$	no rígida
F3	$y' = y + \cos(4t), y(0) = -1$	no rígida
F4	$y' = \cos(t)y, y(0) = 1$	no rígida
F5	$y' = -2ty^2, y(0) = 1$	no rígida
F6	$y' = 4(t - t^3)y^2, y(0) = 0.5$	poco rígida
F7	$y' = -10y + 10t - 11, y(0) = 3$	poco rígida
F8	$y' = -20y, y(0) = 1$	rígida
F9	$y' = -1000(y - (t+2)) + 1, y(0) = 1$	muy rígida
F10	$r=1; Kc=1.5; e=r-x(1); u=Kc*e;$ $y'_a=x(2); y'_b=-x(1)-0.5*x(2)+u$	EDOs rígidas

Tabla 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias empleadas en los experimentos.

3 RESULTADOS

Con los experimentos numéricos para los métodos seleccionados fue posible investigar el comportamiento de métodos de paso fijo en comparación a los métodos que utilizan distintos órdenes de integración y controlan el tamaño del paso temporal en forma adaptiva. La metodología de análisis de la sensibilidad al control de error local fue empleada con el objetivo de investigar si los métodos rígidos resuelven bien problemas no rígidos o poco rígidos, y además si los métodos rígidos no difieren mucho de la solución de las ecuaciones con el control de error local no implementado. Además cada experimento fue realizado utilizando diferentes pasos temporales para determinar la dependencia de resolución de los diferentes métodos con respecto al tamaño del paso de tiempo. En lo que sigue, se discuten los principales resultados y restricciones de cada tipo de método:

- Los métodos no rígidos y de paso fijo de la familia Runge-Kutta tienen muy buena performance al resolver EDOs no rígidas y poco rígidas si el paso de tiempo es pequeño (intervalo de tiempo utilizado en los experimentos: 0:0.2:2). Las excepciones fueron las EDOs rígida F8 y fuertemente rígida F9, que tuvieron una solución suficientemente precisa empleado un paso temporal muy pequeño ($\Delta t = 0.02$ y 0.002 , respectivamente). A mayor orden de aproximación del método, mayor su exactitud por

paso de tiempo, de modo que el método *RK5* presenta en estos casos siempre soluciones más próximas a la solución exacta que el *RK2* o *RK4*. Es posible evidenciar, como ejemplo en la [Figura 1](#), que en la F9 los métodos no rígidos del tipo *RK* acumulan errores a lo largo de la integración y estos errores aumentan de magnitud con pasos de tiempo menores, siendo los errores globales mucho mayores en magnitud de lo que se estima en la literatura ([Durrán, 1999](#); [Heath, 2002](#)).

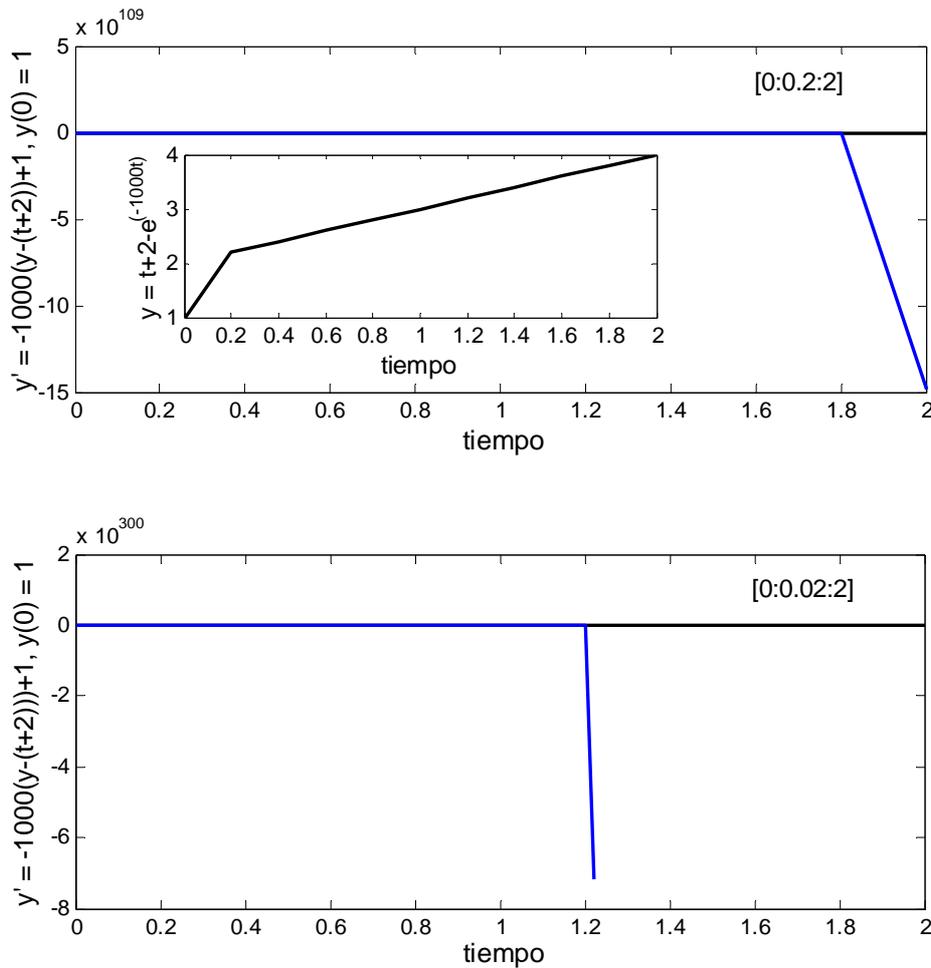


Figura 1: La solución exacta (negro, y) de la ecuación diferencial ordinaria F9 es comparada con la solución numérica del método *RK5* (azul) en diferentes pasos de tiempo (0.2 y 0.02).

- El método de paso fijo (explícito-implícito) predictor-corrector Adams-Bashforth-Moulton de orden 4 (*ABM4*) también presenta las mismas restricciones en cuanto al tamaño del paso temporal para ecuaciones rígidas y muy rígidas, pero además presenta restricciones en situaciones de EDOs poco rígidas como las F6 y F7 (ver [Figura 2](#)) en las cuales el *RK4* y el *RK5* tiene buena exactitud.

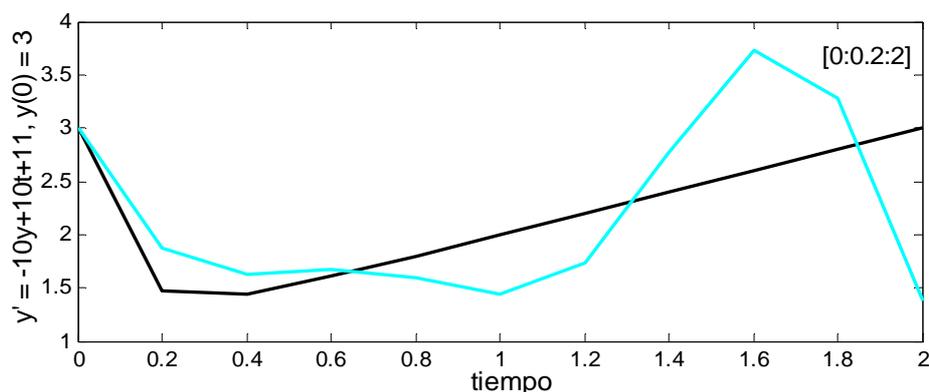


Figura 2: La solución exacta (negro) de la ecuación diferencial ordinaria F7 es comparada con la solución numérica del método *ABM4* (azul claro) con el paso de tiempo 0.2.

- Los métodos de paso variable no presentan una importante mejoría en las soluciones con respecto a los de paso fijo y de mayor orden para resolver EDOs no rígidas. Sin embargo, para las EDOs F6, F7, F8 y F9 que varían desde ecuaciones poco rígidas a fuertemente rígidas el método *RK4,5* con el control de error de orden $1e^{-5}$ implementado tiene mayor exactitud que el método *RK5*, principalmente con pasos de tiempo mayores (comparar la Figura 3 con la Figura 1). Esto se debe a que si las aproximaciones obtenidas por los métodos *RK4* y *RK5* son mayores que el error tolerado (del orden $1e^{-5}$), el método *RK4,5* adaptivo actúa con el criterio de disminuir el paso de tiempo y por lo tanto tiene mayor capacidad de controlar la capacidad en los métodos explícitos de resolver sistemas rígidos.

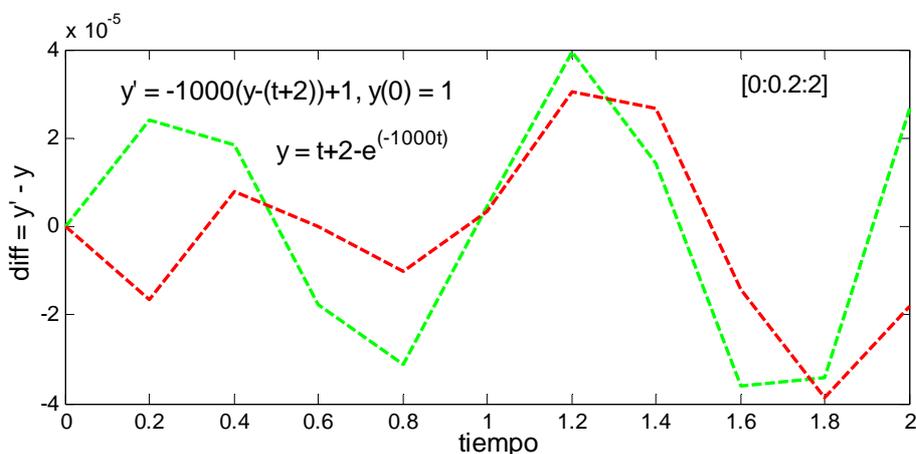


Figura 3: Diferencia entre la solución numérica y exacta (y) de los métodos *RK2,3* (verde) y *RK4,5* (rojo) para la ecuación diferencial ordinaria F9 con el paso de tiempo 0.2.

- Los métodos rígidos sin implementación del control de error local, como principalmente el Modified Rosenbrock (*MR2,3*), resuelven bien sistemas poco rígidos hasta fuertemente rígidos, como los experimentos F7, F8 y F9, pero presentan diferencias pequeñas de orden $< O(1)$ con respecto a la solución exacta de EDOs no rígidas o poco rígidas como los experimentos desde F1 hasta F6 y incluso el F10 (ver ejemplo de F4 y de la aplicación de EDOs F10 en la Figura 4). Además, cuando el paso de tiempo es muy (0.02) pequeño, lo que aumenta la exactitud de los métodos del tipo *RK*, ambos

métodos rígidos (*KS* y *MR2,3*) presentan importantes errores en la solución. Esto se pasa con los experimentos F3, F4, F5 y F6.

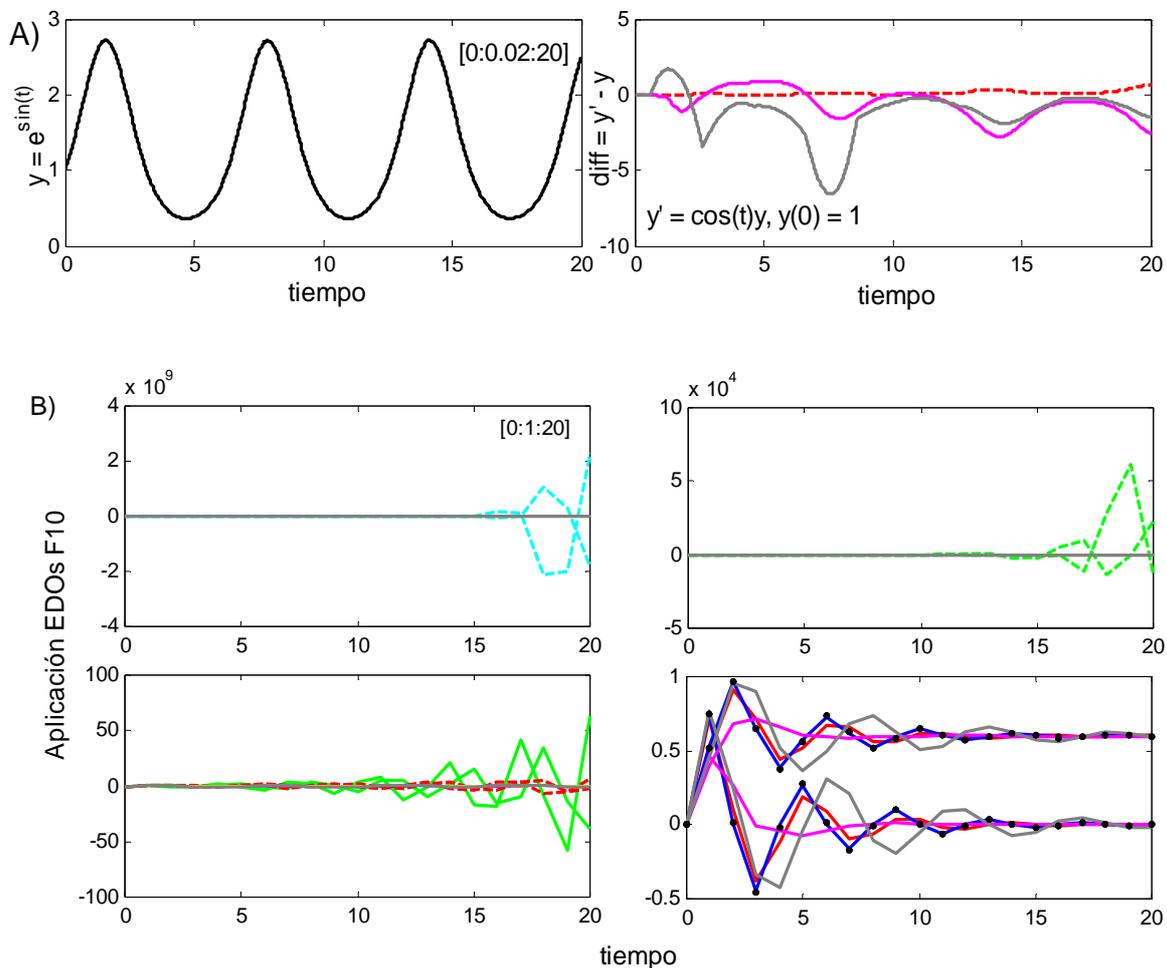


Figura 4: A) Solución exacta (negro, y) a la izquierda y diferencia entre la solución numérica y la solución exacta de los métodos *RK4,5* (rojo), *KS* (rosa), *MR2,3* (gris) para la ecuación diferencial ordinaria F4 con el paso de tiempo 0.02. B) Solución numérica de la aplicación de EDOs F10 por los métodos *ABM4c* (azul claro), *RK2,3* (verde, línea de guiones), *RK4,5* (rojo), *KS* (rosa) y *MR2,3* (gris) todos con control de error local de orden $1e^5$ en comparación con la resolución de todos los métodos b) (definidos en 2.2) implementados con control de error local de orden $1e^{-5}$ (puntos en negro) y todos con el paso de tiempo 1.

4 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una EDO no rígida puede ser resuelta a menudo usando métodos explícitos siempre que la matriz Jacobiana $\partial y/\partial \hat{a}$ tenga todos sus autovalores de tamaño similar. En una ecuación diferencial rígida los componentes de la solución se desarrollan en escalas de tiempo muy dispares y no cumplen con esa condición. Una posible solución al problema planteado por la presencia de constantes de tiempo muy diferentes, puede ser la utilización de métodos de paso variable, los cuales pueden ajustar el paso de integración de acuerdo a los requerimientos del sistema y hasta resolver sistemas rígidos como fue evidenciado en los resultados precedentes. El problema es que para sistemas rígidos un método numérico de paso variable, elige posiblemente un tamaño de paso en función de la componente más rápida de la solución, aunque su contribución a la solución sea insignificante. Esto conduce a tamaños de pasos

temporales muy pequeños y altamente ineficaces en el cómputo debido a las inestabilidades propias del método, donde un error pequeño puede crecer rápidamente con cada paso temporal. En estos casos el control de error es indispensable, es así que en el modelado físico-biológico se torna una limitación importante el hecho de que el método no pueda adaptar el tamaño del paso temporal. Para la solución de sistemas rígidos usualmente se prefieren los métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales basados en las fórmulas de diferencias retrógradas implícitas. Los algoritmos de múltiple etapas implícitos ofrecen mayor exactitud y son más estables que los algoritmos de múltiple etapas explícitos, sin embargo, en ecuaciones no lineales requieren una buena estimación inicial para determinar y_{i+1} (Heath, 2002). Teóricamente los métodos implícitos logran una mejor eficiencia por permiten el empleo de pasos de tiempo relativamente grandes cuando la componente rápida del sistema rígido se atenúa, obteniéndose una mayor precisión, debido al empleo de menor cantidad de pasos [disminución de los efectos de los errores de redondeo (e.g., Durrant, 1999)]. Sin embargo, hay limitaciones impuestas por la exactitud de la solución y a pesar de su mayor estabilidad teórica en la práctica se observa que los métodos implícitos causan amortiguamientos severos en la propagación de señales transitorias de la solución. Un método explícito puede generar una excelente estimación inicial, y los métodos explícitos/implícitos como el predictor-corrector *ABM4* son ampliamente utilizados en la solución de sistemas rígidos. Sin embargo, para beneficiarse 'completamente' de la naturaleza de un algoritmo implícito de múltiple etapas, tienen que ser resueltos directamente vía técnicas 'root-finding' cuando su naturaleza implícita es necesaria para resolver EDOs rígidas. En los experimentos de este trabajo evidenciamos que el método *ABM4* además de presentar las mismas restricciones que los *RK* para EDOs rígidas presenta también restricciones en EDOs poco rígidas.

Teniendo en consideración que los métodos rígidos sin la implementación del control de error local presentan errores en las soluciones de varias EDOs ensayadas, como los experimentos desde F1 hasta F6 y incluso el F10 (e.g., Figura 4) y hasta con una mejor resolución del paso temporal, la conclusión es que no aproximan bien la función derivada de estos sistemas. Por lo tanto, los métodos explícitos de mayor resolución de la familia Runge-Kutta con paso fijo como el *RK4* y *RK5*, principalmente, presentan mayor estabilidad en la resolución desde EDOs no rígidas hasta rígidas (e.g., Figura 4) y con el criterio de controlar previamente el tamaño del paso temporal el método termina siendo efectivo incluso en la resolución de sistemas fuertemente rígidos (e.g., Figura 3). Además, el error de aproximación de la función derivativa de métodos explícitos de la familia *RK* puede ofrecer menor margen de error en el modelado físico-biológico de que el error por aproximación de métodos implícitos. Por ende enfatizamos que a mayor orden de aproximación de los métodos *RK*, mayor su exactitud por paso de tiempo, de modo que el método *RK5* debe presentar soluciones más próximas a la solución exacta que el *RK2* o *RK4*, y las diferencias en la exactitud de los métodos de diferentes ordenes se torna importante principalmente en sistemas rígidos.

Agradecimientos: Este trabajo fue financiado por el proyecto CRN2076 del Instituto Inter-Americano para el Estudio del Cambio Global, que es financiado por la Fundación Nacional de Ciencias de los EEUU (GEO-0452325). La Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PICT04 25533) y Glaciar Pesquera S.A., Argentina, brindaron apoyo adicional. Actualmente B. C. Franco es becaria de Doctorado del CONICET.

5. REFERENCIAS

- Bennett, A., *Lagrangian Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- Bradie, B., *A Friendly Introduction to Numerical Analysis*. Prentice Hall, 2006.
- Dimou, K.N., y Adams, E.E., A random-walk, particle tracking model for well-mixed estuaries and coastal waters. *Estuarine, Coastal, and Shelf Science*, 37:99-110, 1993.
- Durrant, D.R., *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, 1st Ed. Springer Verlag, 1999.
- Gardiner, C.W., *Handbook of stochastic models*, 2nd Ed. Springer, 1985.
- Heath, M.T., *Scientific Computing: An Introductory Survey*, 2nd Ed. McGraw Hill, 2002.
- Hunter, J.R., Craig, P.D., y Phillips H.E., On the use of random walk models with spatially variable diffusivity. *Journal of Computational Physics*, 106:366– 376, 1993.
- Shampine, L.F., y Reichelt, M.W., "The MATLAB ODE Suite", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18:1-22, 1997.
- Thompson, A.F.B., y Gelhar, L.W., Numerical simulations of solute transport in three-dimensional randomly heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 26:2541– 2562, 1990.
- Visser, A.W., Using random walk models to simulate the vertical distribution of particles in a turbulent water column. *Marine Ecology Progress Series*, 158:275– 281, 1997.