

INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA EN FLUJOS BIDIMENSIONALES E INESTACIONARIOS DOMINADOS POR VORTICIDAD

Marcelo Valdez^{a,c}, Sergio Preidikman^{a,b}, Julio Massa^{a,b} y Balakumar Balachandran^c

^a *Departamento de Estructuras, Facultad de C. E. F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, jmassa@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

^b *Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800 Río Cuarto, Argentina, spreidik@vt.edu, <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

^c *Department of Mechanical Engineering, University of Maryland at College Park, M102 Glenn L. Martin Hall, College Park, MD 20742, USA, balab@umd.edu, <http://www.glue.umd.edu/~balab/>*

Palabras Clave: interacción fluido-estructura, alas flexibles, flujos dominados por vorticidad, flujos bidimensionales, aerodinámica inestacionaria y no-lineal, alas batientes, micro-vehículos aéreos.

Resumen. En el presente trabajo se presenta un modelo numérico bi-dimensional para simular la interacción fluido-estructura y determinar su incidencia durante los movimientos característicos del batimiento de alas. El acoplamiento entre la estructura y el fluido es del tipo “fuerte” y requiere la resolución simultánea del problema estructural y del aerodinámico. Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno son integradas numérica, simultánea e interactivamente en el dominio del tiempo empleando un esquema iterativo basado en el método predictor-corrector de Hamming de cuarto orden. La estructura en consideración puede ser rígida o flexible. Para el segundo caso, el perfil aerodinámico se modela como una viga de Euler-Bernoulli. Las deformaciones a lo largo de la envergadura del perfil, debidas a las cargas aerodinámicas y producidas por el propio movimiento del perfil en el seno del fluido, son calculadas empleando el método de modos asumidos. Aunque este método está limitado a pequeñas deformaciones, constituye un buen inicio para entender la naturaleza del fenómeno de interacción fluido-estructura. Puede considerarse que el número de Reynolds que caracteriza al flujo tiene un valor suficientemente alto como para asumir que los efectos viscosos están confinados, únicamente, a la capa límite y a las estelas. Este hecho permite considerar que el flujo está determinado por la vorticidad altamente concentrada en estas zonas. Se dice entonces que el flujo es dominado por vorticidad. Esta hipótesis, junto con posteriores simplificaciones, habilitan el empleo del conocido método de red de vórtices inestacionario y no lineal (UVLM) para la resolución completa del flujo y para el cálculo de las cargas aerodinámicas sobre las superficies sustentadoras. En este trabajo se analizó el mecanismo de generación de sustentación mediante la rotación de dos placas planas vinculadas con un resorte torsional. El movimiento es debido únicamente a la energía potencial elástica acumulada en el resorte. En ausencia de gravedad, el efecto del fluido sobre la estructura consiste tanto en la reducción de la amplitud de las oscilaciones de ambas placas, como en un ascenso neto del sistema. También se analizó la influencia de la interacción fluido-estructura en una cinemática típica del aleteo de aves e insectos en el modo de vuelo conocido como “hovering”. También como parte de este esfuerzo, se desarrolló una herramienta numérica que permite estudiar el fenómeno de interacción fluido-estructura, teniendo en cuenta la flexibilidad de las superficies sustentadoras. Una vez entendidos estos complejos mecanismos, será posible implementar esquemas de control activo de manera de hacer eficiente la generación de sustentación y empuje a través del batimiento de las alas. Todo esto pretende inspirar el desarrollo de micro-vehículos aéreos súper-maniobrables, no tripulados de alas batientes inspirados en la biología.

1 INTRODUCCIÓN

El vuelo de insectos está dominado por mecanismos aerodinámicos inestacionarios y no-lineales producto del batimiento de las alas que ofrecen ventajas únicas respecto de las alas fijas y rotores convencionales (Ellington, 1999). Entre estos mecanismos, pueden mencionarse la captura de estela, la sustentación rotacional y el retraso de la pérdida aerodinámica, entre otros (Dickinson, 2001; Sane, 2003; Azuma et al., 2001).

Numerosas investigaciones aseveran que la eficiencia aerodinámica asociada al mecanismo de batimiento se ve incrementada por la deformación de las superficies sustentadoras. Esta deformación, por lo general, escapa el alcance de la teoría de pequeñas deformaciones y deben estudiarse con modelos dinámicos no lineales. El batimiento de las alas y la flexibilidad de las mismas son dos atributos claves para el vuelo controlado a bajos números de Reynolds (Re) (Shy et al., 1999).

Algunos mecanismos que utilizan la elasticidad de las superficies sustentadoras para incrementar la eficiencia aerodinámica, usados por mariposas y polillas son, entre otros: modificación e inversión de la combadura del perfil entre batimientos hacia arriba y hacia abajo; torsión del ala durante ciertas maniobras; contracción y expansión del superficie alar; y flexión transversal de las superficies sustentadoras. Dada la complejidad que implica el estudio de estos mecanismos, el comportamiento aeroelástico de las alas de insectos y aves pequeñas es un área aún muy poco explorada.

La necesidad de desarrollar modelos aerodinámicos de orden reducido que permitan estudiar estos complejos mecanismos es la causa que motiva el empleo de un método aerodinámico de vórtices, no viscoso y basado en hipótesis que, en principio, parecen contradecir la naturaleza del fenómeno que se está modelando. El estudio de estos mecanismos a través de métodos de simulación numérica directa o DNS que permiten simular de manera precisa todas las escalas de vorticidad en el dominio fluido son, por ahora, demasiado costosos desde el punto de vista computacional. El empleo del método de red de vórtices inestacionario servirá como un paso de transición para entender la física subyacente en el fenómeno de interacción fluido estructura, así como los mecanismos generación y evolución de las estructuras vorticosas en el seno fluido.

2 EL MODELO AERODINÁMICO

El modelo aerodinámico empleado en este trabajo se basa en el método de red de vórtices inestacionario o UVLM. Como hipótesis fundamental este método supone que el número de Reynolds es lo suficientemente elevado (en teoría infinito) como para considerar que toda la vorticidad del flujo se encuentra concentrada exclusivamente en determinadas regiones compactas del fluido. Estas regiones caracterizadas por un flujo altamente rotacional pueden dividirse en dos grandes grupos: *i*) la capa límite adyacente a las superficies sólidas, y *ii*) las estelas vorticosas que se desprenden de los bordes afilados del mismo, donde el flujo experimenta separación. Fuera de estas regiones, el flujo es considerado irrotacional.

Considerar que el número de Reynolds tiende a infinito implica una simplificación adicional. El espesor de las capas límites y las estelas tiende a cero debido a que el efecto de la difusión viscosa en la dirección normal a las paredes sólidas se vuelve cada vez más pequeño. En el límite, estas regiones pueden ser modeladas como sábanas vorticosas continuas; singularidades que se caracterizan por presentar una discontinuidad en la velocidad tangencial a través de ellas. Estas sábanas vorticosas pueden ser de dos tipos: adheridas a las superficies sólidas, representando las capas límites; o libres, representando las estelas (Katz and Plotkin, 1991).

La ecuación que gobierna el fenómeno así descrito es la ecuación de continuidad para flujos incompresibles e irrotacionales, conocida como ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \Psi(\vec{R}, t) = 0 \quad (1)$$

donde $\Psi(\vec{R}, t)$, es el potencial de velocidades, el cual está relacionado con el campo de velocidades $\vec{V}(\vec{R}, t)$ a través de la siguiente relación,

$$\vec{V}(\vec{R}, t) = \nabla\Psi(\vec{R}, t) \quad (2)$$

La condición de contorno requerida es la “condición de no penetración” que estipula que, sobre las paredes del sólido, la componente normal de la velocidad de una partícula de fluido, relativa al sólido debe ser nula. Matemáticamente se expresa como sigue:

$$\hat{n} \cdot (\vec{V} - \vec{V}_B) = \hat{n} \cdot (\nabla\Psi - \vec{V}_B) = 0 \quad (3)$$

donde \vec{V}_B es la velocidad de la superficie sólida y \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie del cuerpo.

En el infinito, las perturbaciones \vec{V} debidas al cuerpo moviéndose a través del fluido que estaba inicialmente en reposo deben anularse. En un sistema de referencia inercial, la velocidad de ese fluido es en consecuencia cero en el infinito (lejos de los contornos sólidos, móviles, del cuerpo). Esta condición es frecuentemente conocida como “condición de regularidad en el infinito” y puede expresarse como sigue,

$$\lim_{\|\vec{R}\| \rightarrow \infty} \|\vec{V}\| = \lim_{\|\vec{R}\| \rightarrow \infty} \|\nabla\Psi\| = 0 \quad (4)$$

Esta última condición es automáticamente satisfecha por el potencial de velocidades asociado a un vórtice puntual.

El campo de velocidades puede ser reconstruido a partir del campo de vorticidad a través de la relación cinemática dictada por la ley de Biot y Savart,

$$\vec{V}(\vec{R}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S(\vec{R}_0, t)} \frac{\vec{\Omega}(\vec{R}_0, t) \times (\vec{R} - \vec{R}_0)}{\|\vec{R} - \vec{R}_0\|^2} dS(\vec{R}_0) + \vec{V}_\infty \quad (5)$$

donde: $S(\vec{R}_0, t)$ es la región compacta del dominio fluido donde la vorticidad es no nula.

\vec{R}_0 es el vector posición de un punto material en la región $S(\vec{R}_0, t)$.

\vec{R} es el vector posición del punto material donde se calcula la velocidad $\vec{V}(\vec{R}, t)$ asociada al campo de vorticidad.

$\vec{\Omega}(\vec{R}_0, t)$ es el vector vorticidad de la partícula fluida ubicada en la posición \vec{R}_0 .

\vec{V}_∞ es la velocidad de la corriente libre.

El integrando en (5) es cero donde quiera que $\vec{\Omega}(\vec{R}_0, t)$ es nulo. Por lo tanto, la región donde el flujo es irrotacional no contribuye en absoluto al campo de velocidades $\vec{V}(\vec{R}, t)$, razón por la cual este puede ser determinado tanto en la región viscosa como en la no viscosa a través de la distribución de vorticidad en la región viscosa únicamente.

2.1 Método de Red de Vórtices Inestacionario

Se introduce ahora una nueva aproximación correspondiente al método de red de vórtices inestacionario. Las sábanas vorticosas continuas son discretizadas mediante la distribución de vórtices puntuales. Sobre las superficies sólidas, el arreglo de vórtices forma lo que se conoce como malla o red adherida, que está formada por paneles o elementos vorticosos. En este trabajo, los vórtices se ubican en los nodos de estos paneles. Esta distribución es tal que dos vórtices se encuentran uno en cada extremo de la superficie sólida, y vinculan la red adherida y la red de vórtices en las estelas. Estos vórtices serán luego convectados con la velocidad de las partículas fluidas al seno fluido para formar las estelas en los sucesivos instantes de tiempo.

La distribución de los vórtices en las estelas se determina como parte de la solución del problema. La Figura 1 muestra esquemáticamente la discretización de las sábanas vorticosas.

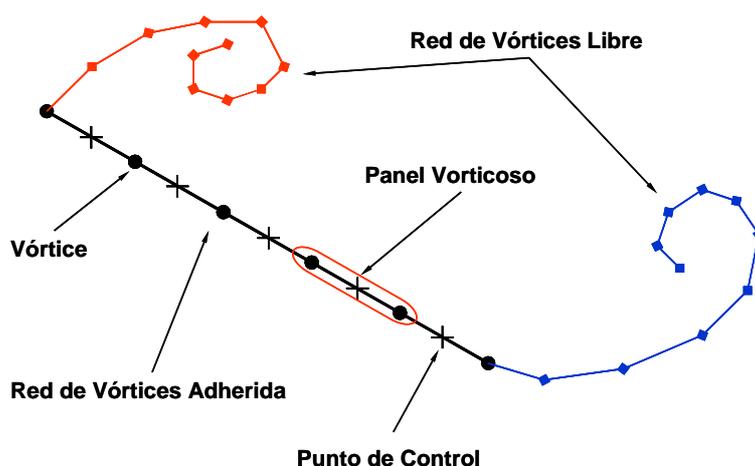


Figura 1: Discretización de las sábanas vorticosas adheridas y libres

El reemplazo de las sábanas vorticosas continuas por un arreglo de vórtices puntuales implica que la condición de no penetración (3) sólo puede ser forzada ahora en un número finito de puntos sobre la superficie sólida. Estos puntos son conocidos, en el contexto del UVLM, como puntos de control. En este modelo, los puntos de control se ubican en el centro de cada panel.

Con el objeto de formular la condición de no-penetración, es conveniente desdoblarse el potencial de velocidades Ψ en dos componentes: un potencial Ψ_B asociado a los vórtices adheridos a la superficie del cuerpo, y un potencial Ψ_W asociado a los vórtices en las estelas. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (3) se puede reescribir como sigue,

$$\left(\nabla\Psi_B + \nabla\Psi_W - \vec{V}_B\right) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6)$$

La contribución de los vórtices que componen la malla adherida se expresa como una combinación lineal de las circulaciones de cada uno de los mismos, ponderadas mediante el respectivo coeficiente de influencia aerodinámico. La velocidad de la superficie sólida \vec{V}_B es conocida debido a que su cinemática es impuesta o bien, es conocida a partir de la integración de las ecuaciones de movimiento del sistema. La circulación de los vórtices que forman las estelas permanece constante desde el momento que son convectados debido a que están libres de fuerzas, y, en consecuencia, sus valores, así como sus posiciones son conocidas de pasos de cálculo anteriores. Por ello la contribución de estos vórtices a la condición de no penetración, $\nabla\Psi_W$, es también conocida.

El coeficiente de interacción aerodinámico a_{ij} se define como la componente normal de la velocidad que un vórtice de circulación unitaria “ j ” genera en la posición del punto de control “ i ”. Matemáticamente, se expresa como sigue,

$$a_{ij} = (u, w)_{ij} \cdot \hat{n}_i \quad (7)$$

donde u_{ij} y w_{ij} son las componentes de la velocidad en el punto de control “ i ” asociada al vórtice “ j ”.

En el punto de control “ i ”, la velocidad normal a la superficie V_{ni} se expresa como sigue,

$$V_{ni} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} \Gamma_j + \left[\nabla\Psi_W - \vec{V}_B\right]_i \cdot \hat{n}_i = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

donde Γ_j es la circulación del vórtice “ j ” y N es el número de paneles. La satisfacción de la condición de no penetración en todos los puntos de control genera un sistema de N ecuaciones algebraicas lineales y $N+1$ incógnitas. La necesaria imposición de la condición de Kelvin de

conservación de la circulación en flujos no viscosos incorpora la ecuación adicional al sistema de ecuaciones, determinando unívocamente su solución.

En la ecuación (8) todas las contribuciones conocidas son transferidas al lado derecho de la ecuación para formar el vector de términos independientes o *RHS*.

Finalmente, el sistema de ecuaciones a resolver toma de la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} & a_{1(N+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} & a_{i(N+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} & a_{N(N+1)} \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_{,1} \\ \vdots \\ \Gamma_{,i} \\ \vdots \\ \Gamma_{,N} \\ \Gamma_{,N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHS_1 \\ \vdots \\ RHS_i \\ \vdots \\ RHS_N \\ \Gamma_B(t-\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde la última ecuación es la condición de Kelvin y Γ_B denota la circulación adherida total, definida como sigue,

$$\Gamma_B(t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j(t) \quad (10)$$

Para mas detalles acerca de la formulación del modelo se refiere al lector a Katz and Plotkin (1991) y Valdez et al. (2006).

3 EL MODELO ESTRUCTURAL

La Figura 2 muestra esquemáticamente el modelo estructural a estudiar. En general, las dos vigas son flexibles y se modelan como vigas de Euler-Bernoulli. Se emplean cuatro coordenadas absolutas: “ $x(t)$ ” e “ $y(t)$ ” para definir la posición del vínculo entre ambas vigas, y los ángulos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ para medir la orientación de ambas vigas con respecto a la dirección horizontal. Finalmente, para el estudio de las deformaciones flexionales se emplean las coordenadas relativas $v_1(\xi_1, t)$ y $v_2(\xi_2, t)$, las cuales se miden respecto de la posición indeformada de las respectivas vigas.

En total, se emplean tres sistemas de referencia: un sistema inercial, $(\hat{n}_1; \hat{n}_2)$; un sistema fijo a la viga indeformada 1, $(\hat{a}_1; \hat{a}_2)$ y un sistema fijo a la viga indeformada 2, $(\hat{b}_1; \hat{b}_2)$.

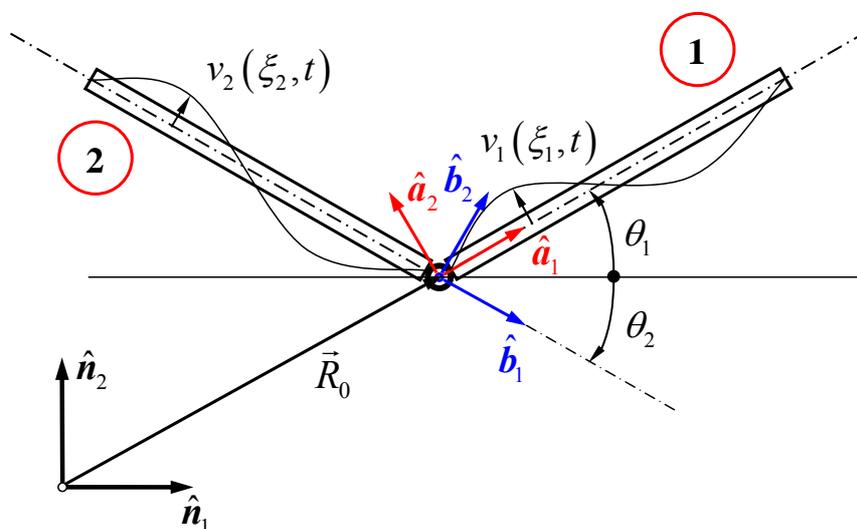


Figura 2: Modelo estructural de dos vigas flexibles

La flexibilidad de las placas se introduce mediante el difundido método de los modos asumidos. Es importante recordar que el modelo utilizado para incorporar los efectos de la flexibilidad es lineal, por lo que sólo es válido para pequeñas deformaciones y pequeños giros relativos a la posición no deformada (Meirovitch, 2001). También hay que tener en cuenta que la sucesiva incorporación de modos a la estructura implica tratar con frecuencias naturales cada vez más elevadas. Esto penaliza el tiempo computacional debido a que el paso de cálculo requerido para describir con precisión la evolución temporal del modo de mayor frecuencia asociada es cada vez más pequeño. Si bien los modos asumidos no son los verdaderos modos del sistema, sus frecuencias asociadas pueden ser empleadas para estimar el paso de cálculo necesario.

En el contexto del método de modos asumidos se considera que la deformación total de cada una de las vigas es una superposición lineal de una cierta cantidad de modos cuya forma es elegida en base a la naturaleza del problema. Cada modo es ponderado por las respectivas coordenadas modales “ $q_k(t)$ ”. La ecuación (11) muestra la expresión general de las deformaciones flexionales en ambas vigas.

$$v_1(\xi_1, t) = \sum_{k=1}^{NM} \psi_{1k}(\xi_1) q_{1k}(t) = \{\psi_1\}^T \vec{q}_1 \quad v_2(\xi_2, t) = \sum_{k=1}^{NM} \psi_{2k}(\xi_2) q_{2k}(t) = \{\psi_2\}^T \vec{q}_2 \quad (11)$$

Los vectores posición de puntos sobre las vigas 1 y 2 se expresan en términos de los sistemas de referencia mencionados como sigue,

$$\vec{R}_1(\xi_1, t) = \vec{R}_0(t) + \xi_1 \hat{a}_1 + v_1(\xi_1, t) \hat{a}_2 \quad \vec{R}_2(\xi_2, t) = \vec{R}_0(t) - \xi_2 \hat{b}_1 + v_2(\xi_2, t) \hat{b}_2 \quad (12)$$

donde $\vec{R}_0(t) = x(t)\hat{n}_1 + y(t)\hat{n}_2$ es el vector posición de la articulación. Las derivadas temporales de los vectores posición $\vec{R}_1(\xi_1, t)$ y $\vec{R}_2(\xi_2, t)$ se computan como sigue,

$$\begin{aligned} {}^N d\vec{R}_1 / dt &= (\dot{x}\hat{n}_1 + \dot{y}\hat{n}_2) - \dot{\theta}_1 v_1(\xi_1, t) \hat{a}_1 + (\dot{v}_1(\xi_1, t) + \dot{\theta}_1 \xi_1) \hat{a}_2 \\ {}^N d\vec{R}_2 / dt &= (\dot{x}\hat{n}_1 + \dot{y}\hat{n}_2) - \dot{\theta}_2 v_2(\xi_2, t) \hat{b}_1 + (\dot{v}_2(\xi_2, t) - \dot{\theta}_2 \xi_2) \hat{b}_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema descrito se obtienen a través del planteo de las ecuaciones de Lagrange. Para ello es necesario determinar las expresiones de la energía cinética y la energía potencial del sistema. La energía cinética adopta la siguiente forma,

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \left[\frac{N}{dt} \vec{R}_1 \cdot \frac{N}{dt} \vec{R}_1 \right] d\xi_1 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \left[\frac{N}{dt} \vec{R}_2 \cdot \frac{N}{dt} \vec{R}_2 \right] d\xi_2 \quad (14)$$

Reemplazando (13) en (14) se obtiene la siguiente expresión para de la energía cinética del sistema,

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \left[v_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (\dot{v}_1 + \xi_1 \dot{\theta}_1)^2 \right] d\xi_1 \\ &\quad - (\dot{x} \cos \theta_1 + \dot{y} \sin \theta_1) \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 v_1 \dot{\theta}_1 d\xi_1 + (\dot{x} \sin \theta_1 + \dot{y} \cos \theta_1) \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 (\dot{v}_1 + \xi_1 \dot{\theta}_1) d\xi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \left[v_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (\dot{v}_2 - \xi_2 \dot{\theta}_2)^2 \right] d\xi_2 - (\dot{x} \cos \theta_2 + \dot{y} \sin \theta_2) \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 v_2 \dot{\theta}_2 d\xi_2 \\ &\quad + (\dot{x} \sin \theta_2 + \dot{y} \cos \theta_2) \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 (\dot{v}_2 - \xi_2 \dot{\theta}_2) d\xi_2 \end{aligned} \quad (15)$$

La energía potencial del sistema toma la siguiente forma,

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} EI_1 \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_1^2} \right]^2 d\xi_1 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} EI_2 \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi_2^2} \right]^2 d\xi_2 + \frac{1}{2} k \left[\theta_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}(0, t) - \left(\theta_2 + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2}(0, t) \right) \right]^2 \quad (16)$$

$$+ g \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 (y + \xi_1 \sin \theta_1 + v_1 \cos \theta_1) d\xi_1 + g \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 (y - \xi_2 \sin \theta_2 + v_2 \cos \theta_2) d\xi_2$$

En el presente modelo, los modos asumidos pueden ser los correspondientes a una viga en voladizo o los de una viga simplemente apoyada. Si bien distintos, estos dos tipos de modos comparten la característica de ser ortogonales respecto de la masa. Esta propiedad introduce algunas simplificaciones en los cálculos posteriores. A continuación, teniendo en cuenta la ortonormalidad de los modos, y con el objetivo de simplificar los desarrollos posteriores, se definen las siguientes variables,

$$\begin{aligned} A_{1k} &= \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \psi_{1k} d\xi_1 & A_{2k} &= \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \psi_{2k} d\xi_2 & m_1 \xi_{1C} &= \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \xi_1 d\xi_1 \\ B_{1km} &= \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \psi_{1k} \psi_{1m} d\xi_1 = \delta_{km} & B_{2km} &= \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \psi_{2k} \psi_{2m} d\xi_2 = \delta_{km} & m_2 \xi_{2C} &= \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \xi_2 d\xi_2 \\ C_{1k} &= \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \xi_1 \psi_{1k} d\xi_1 & D_{1km} &= \int_0^{L_1} EI_1 \psi_{1k}'' \psi_{1m}'' d\xi_1 = \omega_k^2 \delta_{km} & J_1 &= \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \xi_1^2 d\xi_1 \\ C_{2k} &= \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \xi_2 \psi_{2k} d\xi_2 & D_{2km} &= \int_0^{L_2} EI_2 \psi_{2k}'' \psi_{2m}'' d\xi_2 = \omega_k^2 \delta_{km} & J_2 &= \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \xi_2^2 d\xi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

donde δ_{km} es el delta de Kronecker y ω_k es frecuencia natural asociada al modo k .

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, las ecuaciones de movimiento resultan,

\mathbf{x} :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} - \sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} \ddot{q}_{1k} A_{1k} - \left[\cos \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} + m_1 \xi_{1C} \sin \theta_1 \right] \ddot{\theta}_1 \\ - \sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} \ddot{q}_{2k} A_{2k} + \left[m_2 \xi_{2C} \sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} \right] \ddot{\theta}_2 \\ - \left[2 \cos \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} \dot{q}_{1k} A_{1k} \right] \dot{\theta}_1 + \left[\sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} - m_1 \xi_{1C} \cos \theta_1 \right] \dot{\theta}_1^2 \\ - \left[2 \cos \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} \dot{q}_{2k} A_{2k} \right] \dot{\theta}_2 + \left[\sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} + m_2 \xi_{2C} \cos \theta_2 \right] \dot{\theta}_2^2 = Q_x^* \end{aligned} \quad (18)$$

\mathbf{y} :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{y} + \cos \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} \ddot{q}_{1k} A_{1k} + \left[m_1 \xi_{1C} \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} \right] \ddot{\theta}_1 \\ + \cos \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} \ddot{q}_{2k} A_{2k} + \left[m_2 \xi_{2C} \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} \right] \ddot{\theta}_2 \\ - \left[2 \sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} \dot{q}_{1k} A_{1k} \right] \dot{\theta}_1 - \left[m_1 \xi_{1C} \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} \right] \dot{\theta}_1^2 \\ - \left[2 \sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} \dot{q}_{2k} A_{2k} \right] \dot{\theta}_2 + \left[m_2 \xi_{2C} \sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} \right] \dot{\theta}_2^2 + g(m_1 + m_2) = Q_y^* \end{aligned} \quad (19)$$

\mathbf{q}_{1k} :

$$\begin{aligned} -(\sin \theta_1 A_{1k}) \ddot{x} + (\cos \theta_1 A_{1k}) \ddot{y} + \ddot{q}_{1k} + (C_{1k}) \ddot{\theta}_1 \\ + k \left[\theta_1 - \theta_2 + \sum_{k=1}^{NM} \psi'_{1j}(0) q_{1j}(t) - \sum_{k=1}^{NM} \psi'_{2j}(0) q_{2j}(t) \right] \psi'_{1k}(0) \\ + g \cos \theta_1 A_{1k} + D_{1kk} q_{1k} - q_{1k} \dot{\theta}_1^2 = Q_{q_{1k}}^* \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\theta_1: & \\
& - \left[\cos \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} + m_1 \xi_{1C} \sin \theta_1 \right] \ddot{x} + \left[m_1 \xi_{1C} \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} \right] \ddot{y} \\
& + \sum_{k=1}^{NM} C_{1k} \ddot{q}_{1k} + \left[J_1 + \sum_{k=1}^{NM} (q_{1k})^2 \right] \ddot{\theta}_1 + g \left[m_1 \xi_{1C} \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} A_{1k} \right] \\
& + k \left[\theta_1 - \theta_2 + \sum_{k=1}^{NM} \psi'_{1k}(0) q_{1k}(t) - \sum_{k=1}^{NM} \psi'_{2k}(0) q_{2k}(t) \right] + \left[2 \sin \theta_1 \sum_{k=1}^{NM} q_{1k} \dot{q}_{1k} \right] \dot{\theta}_1 = Q_{\theta_1}^*
\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
q_{2k}: & \\
& - (\sin \theta_2 A_{2k}) \ddot{x} + (\cos \theta_2 A_{2k}) \ddot{y} + \ddot{q}_{2m} - (C_{2k}) \ddot{\theta}_2 \\
& - k \left[\theta_1 - \theta_2 + \sum_{j=1}^{NM} \psi'_{1j}(0) q_{1j}(t) - \sum_{j=1}^{NM} \psi'_{2j}(0) q_{2j}(t) \right] \psi'_{2k}(0) \\
& + g \cos \theta_2 A_{2k} + D_{2kk} q_{2k} - q_{2k} \dot{\theta}_2^2 = Q_{q_{2k}}^*
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\theta_2: & \\
& \left[-\cos \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} + m_2 \xi_{2C} \sin \theta_2 \right] \ddot{x} + \left[\sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} - m_2 \xi_{2C} \cos \theta_2 \right] \ddot{y} \\
& - \sum_{k=1}^{NM} C_{2k} \ddot{q}_{2k} + \left[J_2 + \sum_{k=1}^{NM} (q_{2k})^2 \right] \ddot{\theta}_2 - g \left[m_2 \xi_{2C} \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} A_{2k} \right] \\
& - k \left[\theta_1 - \theta_2 + \sum_{k=1}^{NM} \psi'_{1k}(0) q_{1k}(t) - \sum_{k=1}^{NM} \psi'_{2k}(0) q_{2k}(t) \right] + \left[2 \sin \theta_2 \sum_{k=1}^{NM} q_{2k} \dot{q}_{2k} \right] \dot{\theta}_2 = Q_{\theta_2}^*
\end{aligned} \quad (23)$$

Las ecuaciones de movimiento (18) a (23) pueden escribirse en forma matricial como sigue,

$$[\mathbf{M}(\bar{u}, \dot{\bar{u}})] \ddot{\bar{u}} + [\mathbf{K}] \bar{u} + \bar{R}(\bar{u}, \dot{\bar{u}}) = \bar{Q}(t) \quad \text{donde } \bar{u} = [x \ y \ \bar{q}_1 \ \theta_1 \ \bar{q}_2 \ \theta_2]^T, \quad (24)$$

$[\mathbf{M}(\bar{u}, \dot{\bar{u}})]$ es la matriz de masa, $[\mathbf{K}]$ la matriz de rigidez, $\bar{R}(\bar{u}, \dot{\bar{u}})$ el vector de términos no lineales, y $\bar{Q}(t)$ el vector formado por las fuerzas generalizadas de origen aerodinámico y gravitacional.

El sistema de ecuaciones (24) puede describirse como sigue,

$$\left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{I}] & 0 \\ \hline 0 & [\mathbf{M}(\bar{u}, \dot{\bar{u}})] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{u}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{u}} \\ \bar{Q}(t) - [\mathbf{K}] \bar{u} - \bar{R}(\bar{u}, \dot{\bar{u}}) \end{array} \right\} \quad (25)$$

La solución numérica del problema requiere describir las ecuaciones de movimiento en el espacio de estado. Por ello, se define el vector de estado como sigue,

$$\bar{Z} = [\bar{u} \ \dot{\bar{u}}]^T = [x \ y \ \bar{q}_1 \ \theta_1 \ \bar{q}_2 \ \theta_2 \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\bar{q}}_1 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\bar{q}}_2 \ \dot{\theta}_2]^T \quad (26)$$

y su derivada respecto del tiempo,

$$\dot{\bar{Z}} = [\dot{\bar{u}} \ \ddot{\bar{u}}]^T = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\bar{q}}_1 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\bar{q}}_2 \ \dot{\theta}_2 \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{\bar{q}}_1 \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\bar{q}}_2 \ \ddot{\theta}_2]^T \quad (27)$$

Empleando las definiciones anteriores, las ecuaciones de movimiento en el espacio de estado pueden expresarse de la siguiente forma general,

$$\dot{\bar{Z}} = \bar{F}[\bar{Z}(t)] \quad (28)$$

Comparando (28) con (25), se obtiene,

$$\bar{F}[\bar{Z}(t)] = \left\{ \frac{\dot{\bar{u}}}{[\mathbf{M}(\bar{u}, \dot{\bar{u}})]^{-1} [\bar{Q}(t) - [\mathbf{K}] \bar{u} - \bar{R}(\bar{u}, \dot{\bar{u}})]} \right\} \quad (29)$$

4 ACOPLAMIENTO ENTRE AMBOS MODELOS

El acoplamiento entre los modelos estructural y aerodinámico aparece a través de las fuerzas generalizadas Q_x^* , Q_y^* , $Q_{q_{1k}}^*$, $Q_{q_{2k}}^*$, $Q_{\theta_1}^*$ y $Q_{\theta_2}^*$, las cuales provienen de la respuesta aerodinámica al movimiento del sistema. Para obtenerlas es necesario computar el trabajo virtual $\delta\bar{W}$ de las cargas aerodinámicas asociado a desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos,

$$\delta\bar{W} = \delta\bar{W}_1 + \delta\bar{W}_2 = Q_x^* \delta x + Q_y^* \delta y + \sum_{k=1}^{NM} Q_{q_{1k}}^* \delta q_{1k} + \sum_{k=1}^{NM} Q_{q_{2k}}^* \delta q_{2k} + Q_{\theta_1}^* \delta\theta_1 + Q_{\theta_2}^* \delta\theta_2 \quad (30)$$

El trabajo virtual realizado por las cargas aerodinámicas sobre la viga 1 esta dado por (31).

$$\delta\bar{W}_1 = \int_0^{L_1} F_1(\xi_1) \cdot \delta\vec{R}_1 d\xi_1 \quad (31)$$

donde la distribución de la carga aerodinámica resultante $F_1(\xi)$ sobre la línea media de la viga 1 es,

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= F_{\xi_1}(\xi_1) \hat{a}_1 + F_{\eta_1}(\xi_1) \hat{a}_2 \\ F_{\xi_1}(\xi_1) &= \Delta p_1(\xi_1) \sin \alpha(\xi_1) \\ F_{\eta_1}(\xi_1) &= \Delta p_1(\xi_1) \cos \alpha(\xi_1) \end{aligned} \quad (32)$$

$\Delta p_1(\xi_1)$ es la distribución del salto de presiones resultante (diferencia de presión entre la superficies inferior y superior) a lo largo de la viga 1 y $\alpha(\xi_1)$ es el ángulo entre la posición deformada e indeformada de la misma en la posición ξ_1 .

El desplazamiento virtual se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \delta\vec{R}_1 &= \delta\vec{R}_0 + \delta(\xi_1 \hat{a}_1 + v_1(\xi_1, t) \hat{a}_2) \\ \delta\vec{R}_1 &= \delta x \hat{n}_1 + \delta y \hat{n}_2 + \xi_1 \delta \hat{a}_1 + v_1(\xi_1, t) \delta \hat{a}_2 + \delta v_1(\xi_1, t) \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

donde,

$$\begin{aligned} \delta \hat{a}_1 &= -\sin \theta_1 \delta\theta_1 \hat{n}_1 + \cos \theta_1 \delta\theta_1 \hat{n}_2 = \delta\theta_1 \hat{a}_2 \\ \delta \hat{a}_2 &= -\sin \theta_1 \delta\theta_1 \hat{n}_1 - \cos \theta_1 \delta\theta_1 \hat{n}_2 = -\delta\theta_1 \hat{a}_1 \end{aligned} \quad (34)$$

Finalmente, se obtiene,

$$\delta\vec{R}_1 = \delta x \hat{n}_1 + \delta y \hat{n}_2 + \xi_1 \delta\theta_1 \hat{a}_2 - v_1(\xi_1, t) \delta\theta_1 \hat{a}_1 + \sum_{k=1}^{NM} \psi_{1k} \delta q_{1k} \hat{a}_2 \quad (35)$$

Combinando las ecuaciones (32) y (35), el integrando en la ecuación (31) toma la forma,

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) \cdot \delta\vec{R}_1 &= (F_{\xi_1}(\xi_1) \cos \theta_1 - F_{\eta_1}(\xi_1) \sin \theta_1) \delta x + (F_{\xi_1}(\xi_1) \sin \theta_1 + F_{\eta_1}(\xi_1) \cos \theta_1) \delta y \\ &+ (F_{\eta_1}(\xi_1) \xi_1 - F_{\xi_1}(\xi_1) \sum_{k=1}^{NM} \psi_{1k} q_{1k}) \delta\theta_1 + F_{\eta_1}(\xi_1) \sum_{k=1}^{NM} \psi_{1k} \delta q_{1k} \end{aligned} \quad (36)$$

Similarmente, para la viga 2 se tiene,

$$\delta\bar{W}_2 = \int_0^{L_2} F_2(\xi_2) \cdot \delta\vec{R}_2 d\xi_2 \quad (37)$$

y el integrando en la ecuación (37) resulta,

$$F_2(\xi_2) \cdot \delta \vec{R}_2 = \left(F_{\xi_2}(\xi_2) \cos \theta_2 - F_{\eta_2}(\xi_2) \sin \theta_2 \right) \delta x + \left(F_{\xi_2}(\xi_2) \sin \theta_2 + F_{\eta_2}(\xi_2) \cos \theta_2 \right) \delta y \\ - \left(F_{\eta_2}(\xi_2) \xi_2 + F_{\xi_2}(\xi_2) \sum_{k=1}^{NM} \psi_{2k} q_{2k} \right) \delta \theta_2 + F_{\eta_2}(\xi_2) \sum_{k=1}^{NM} \psi_{2k} q_{2k} \quad (38)$$

donde la definición de cada uno de los términos es similar a la de los términos que aparecen en la ecuación (36).

Reemplazando (36) y (38) en (31) y (37), y comparando con (30) se obtiene la siguiente expresión para las fuerzas generalizadas,

$$Q_x^* = \int_0^{L_1} F_{\xi_1}(\xi_1) \cos \theta_1 d\xi_1 - \int_0^{L_1} F_{\eta_1}(\xi_1) \sin \theta_1 d\xi_1 + \int_0^{L_2} F_{\xi_2}(\xi_2) \cos \theta_2 d\xi_2 - \int_0^{L_2} F_{\eta_2}(\xi_2) \sin \theta_2 d\xi_2 \\ Q_y^* = \int_0^{L_1} F_{\xi_1}(\xi_1) \sin \theta_1 d\xi_1 - \int_0^{L_1} F_{\eta_1}(\xi_1) \cos \theta_1 d\xi_1 + \int_0^{L_2} F_{\xi_2}(\xi_2) \sin \theta_2 d\xi_2 - \int_0^{L_2} F_{\eta_2}(\xi_2) \cos \theta_2 d\xi_2 \quad (39) \\ Q_{q_{1k}}^* = \int_0^{L_1} F_{\eta_1}(\xi_1) \psi_{1k}(\xi_1) d\xi_1 \quad Q_{\theta_1}^* = \int_0^{L_1} F_{\eta_1}(\xi_1) \xi_1 d\xi_1 - F_{\xi_1}(\xi_1) \sum_{k=1}^{NM} \psi_{1k} q_{1k} \\ Q_{q_{2k}}^* = \int_0^{L_2} F_{\eta_2}(\xi_2) \psi_{2k}(\xi_2) d\xi_2 \quad Q_{\theta_2}^* = \int_0^{L_2} F_{\eta_2}(\xi_2) \xi_2 d\xi_2 - F_{\xi_2}(\xi_2) \sum_{k=1}^{NM} \psi_{2k} q_{2k}$$

Las expresiones anteriores pueden simplificarse de la siguiente manera,

$$Q_x^* = F_{x_1} + F_{x_2} \quad Q_y^* = F_{y_1} + F_{y_2} \quad Q_{q_{1k}}^* = \int_0^{L_1} F_{\eta_1}(\xi_1) \psi_{1k} d\xi_1 \\ Q_{\theta_1}^* = M_{LE1} \quad Q_{\theta_2}^* = M_{LE2} \quad Q_{q_{2k}}^* = \int_0^{L_2} F_{\eta_2}(\xi_2) \psi_{2k} d\xi_2 \quad (40)$$

donde F_{x_1} , F_{y_1} y F_{x_2} , F_{y_2} son las componentes horizontal y vertical de la fuerza aerodinámica resultante sobre las vigas 1 y 2 respectivamente; y M_{LE1} y M_{LE2} son, respectivamente, los momentos aerodinámicos de las vigas 1 y 2 alrededor de la articulación entre ambas vigas.

5 ESQUEMA DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE AMBOS MODELOS

Para resolver las ecuaciones de movimiento se utiliza el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming modificado.

El instante de tiempo correspondiente al paso de tiempo j se define como sigue,

$$t_j = j\Delta t \quad (41)$$

Además, se emplea la siguiente notación para simplificar las expresiones posteriores,

$$\vec{Z}^j = \vec{Z}(t_j) \quad \dot{\vec{Z}}^j = \dot{\vec{Z}}(t_j) \quad \vec{F}^j = \vec{F}[\vec{Z}(t_j)] \quad (42)$$

Durante el periodo de tiempo Δt las estelas son convectadas a sus nuevas posiciones teniendo en cuenta que la vorticidad se mueve con la velocidad de las partículas fluidas mientras que, simultáneamente, la estructura se mueve para ocupar su nueva posición conforme con las cargas aplicadas y las ecuaciones de movimiento. Este concepto es implementado siguiendo la secuencia de pasos que se describen a continuación para calcular la solución en el tiempo $t+\Delta t$, siendo conocidas las soluciones en los instantes previos, t , $t-\Delta t$, $t-2\Delta t$ y $t-3\Delta t$. Los detalles de la implementación del esquema numérico pueden consultarse en Preidikman y Mook, (1998).

Algoritmo para calcular la solución en el tiempo

1. Las estelas son convectadas a sus nuevas posiciones. Una partícula fluida en la estela se mueve desde su actual posición $\vec{R}(t)$ a su nueva posición $\vec{R}(t + \Delta t)$ de acuerdo al siguiente esquema de primer orden de Euler ,

$$\vec{R}(t + \Delta t) = \vec{R}(t) + \vec{V}[\vec{R}(t)]\Delta t \quad (43)$$

La estela conserva esta posición durante las sucesivas iteraciones.

2. Las cargas aerodinámicas actuales se emplean para predecir el estado de la estructura ${}^p\vec{Z}^j$. Para ello se emplea la siguiente ecuación,

$${}^p\vec{Z}^j = \vec{Z}^{j-4} + \frac{4}{3}\Delta t(2\vec{F}^{j-1} - \vec{F}^{j-2} + 2\vec{F}^{j-3}) \quad (44)$$

3. La solución predicha es modificada empleando el error local de truncamiento del paso de tiempo anterior como sigue,

$${}^1\vec{Z}^j = {}^p\vec{Z}^j + \frac{112}{9}e^{j-1} \quad (45)$$

4. La solución predicha y modificada es “corregida” a través de un proceso iterativo empleando la siguiente ecuación,

$${}^{k+1}\vec{Z}^j = \frac{1}{8}\left[9\vec{Z}^{j-1} - \vec{Z}^{j-3} + 3\Delta t(\vec{F}^j + 2\vec{F}^{j-1} - \vec{F}^{j-2})\right] \quad (46)$$

Las cargas aerodinámicas son recalculadas en cada iteración, pero, como se estableció anteriormente, las estelas conservan sus posiciones. El proceso se repite hasta convergencia, es decir, hasta que la diferencia entre el las soluciones de dos iteraciones sucesivas es menor que un valor predeterminado por el usuario.

$$e^j = \left\| {}^{k+1}\vec{Z}^j - {}^k\vec{Z}^j \right\|_{\infty} < \varepsilon \quad (47)$$

5. Una vez alcanzada la convergencia, se estima el error local de truncamiento, necesario para el próximo instante de tiempo.

$$\vec{e}^j = \frac{9}{121}({}^{k+1}\vec{Z}^j - {}^p\vec{Z}^j) \quad (48)$$

6. Se computa el estado final de la estructura, para ello se emplea la siguiente ecuación,

$$\vec{Z}^j = {}^{k+1}\vec{Z}^j - \vec{e}^j \quad (49)$$

Este valor es empleado para obtener la estimación final del campo de movimiento como así también, las cargas aerodinámicas.

En este momento, la posición y la velocidad de la estructura, la distribución de vorticidad y las cargas aerodinámicas sobre las superficies sustentadoras, y la distribución y posición de vorticidad en las estelas es conocida en el tiempo $t + \Delta t$. Se está entonces en condiciones de calcular la solución en el próximo instante de tiempo.

El procedimiento anterior requiere información de cuatro instantes de tiempo. En el inicio de la simulación, esta información no existe, por lo que se emplea un procedimiento especial para calcular los tres primeros instantes de tiempo (Preidikman y Mook, 2000).

6 RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados de cuatro casos donde se ha implementado el modelo desarrollado. Se analizan dos casos que involucran vigas flexibles (casos 2 y 4) y dos con vigas rígidas (casos 1 y 3), los tres primeros corresponden a dos vigas articuladas mediante un resorte torsional, mientras que el último caso corresponde a una única viga flexible.

6.1 Caso 1: Dos vigas rígidas

El sistema está formado por dos placas, como las mostradas en la Figura 2, vinculadas a través de un resorte torsional. Los datos del problema se detallan a continuación,

$$k = 1 \quad l_1 = l_2 = l = 0.5 \quad m_1 = m_2 = 5 \quad \eta_{cm1} = \eta_{cm2} = 0.5 l \quad (50)$$

Como condiciones iniciales del sistema se impone que ambas vigas se encuentren dispuestas simétricamente con respecto al plano vertical. La energía inicial del sistema consiste únicamente en la energía de deformación acumulada en el resorte. No se considera la gravedad. El movimiento de las placas se asemeja al aleteo de dos alas, cuando son vistas desde el borde de ataque.

$$\begin{aligned} \theta_1(t=0) &= 60^\circ & \theta_2(t=0) &= -60^\circ & x(t=0) &= 0 & y(t=0) &= 0 \\ \dot{\theta}_1(t=0) &= 0 & \dot{\theta}_2(t=0) &= 0 & \dot{x}(t=0) &= 0 & \dot{y}(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Con el objeto de simplificar los cálculos, la simetría es impuesta en el sistema, tanto en la parte estructural como aerodinámica. El sistema resultante tiene entonces dos grados de libertad dados por el ángulo $\theta_1(t)$ y la traslación vertical $y(t)$.

En la Figura 3 se muestra la comparación entre los diagramas de estado correspondientes al grado de libertad θ_1 , e y definidos en la Figura 2 para los casos con y sin interacción entre el fluido y la estructura (IFE) (trazos azules y rojos respectivamente). En esta figura se puede apreciar el amortiguamiento aerodinámico introducido por el fenómeno de interacción. El efecto disipativo de las cargas aerodinámicas puede apreciarse en el decaimiento de la energía total mostrada en la Figura 4b, así como en la disminución de la amplitud de las oscilaciones θ_1 , y de la velocidad angular en la Figura 3a.

En la Figura 5 se puede apreciar la evolución de las estelas correspondiente a este caso.

Un aspecto remarcable de los resultados mostrados es que, en el caso sin gravedad, la sola rotación de ambas placas genera sustentación produciendo, en consecuencia, el ascenso neto del sistema, como se puede apreciar en la Figura 4a, correspondiente al grado de libertad de traslación vertical de la articulación.

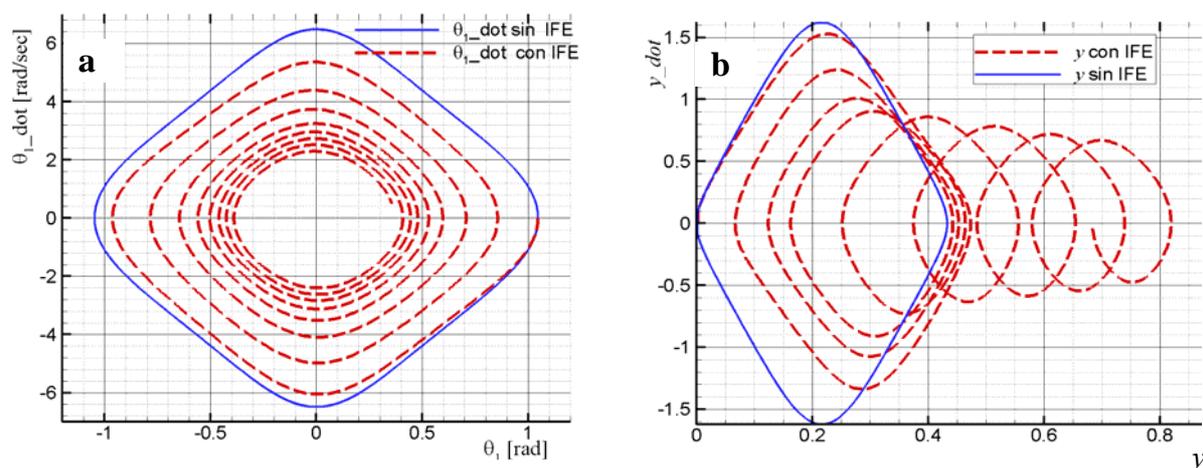


Figura 3: Diagramas de estados para dos vigas rígidas; a) ángulo θ_1 ; b) traslación vertical y

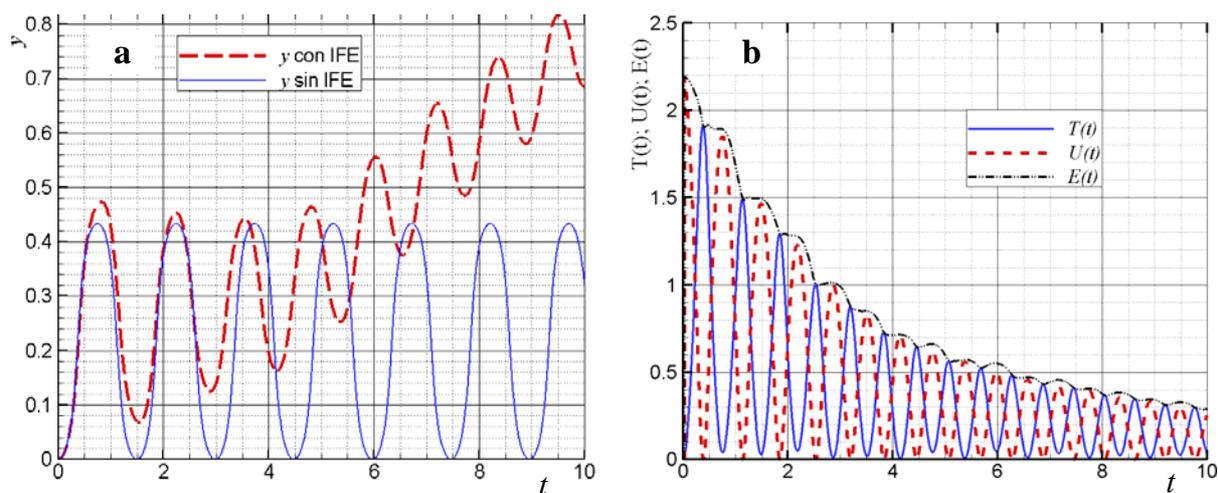


Figura 4: Evolución temporal de a) la coordenada vertical de la articulación; b) la energía cinética $T(t)$, potencial $U(t)$ y total $E(t)$

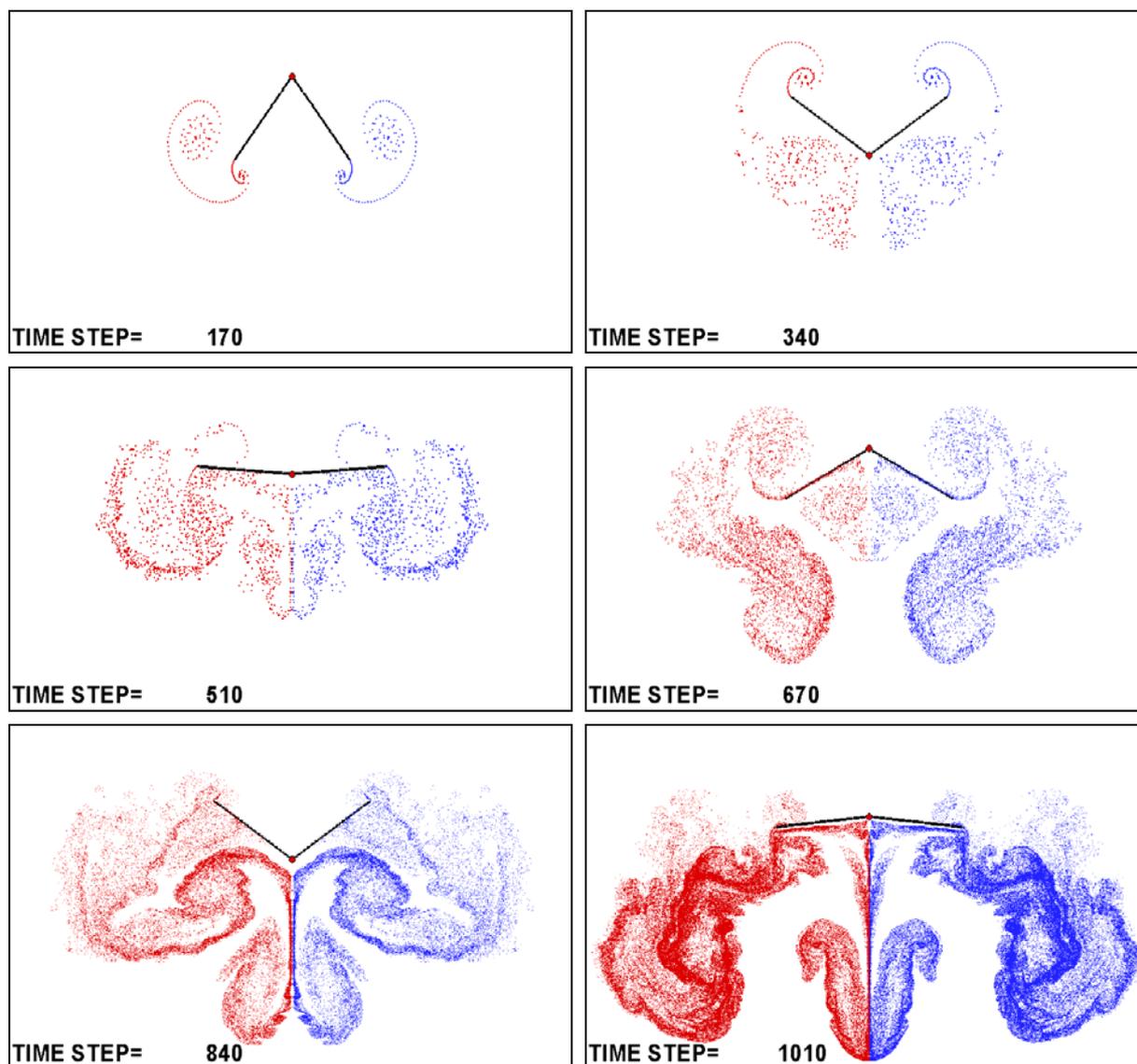


Figura 5: Evolución temporal de las estelas

6.2 Caso 2: Dos vigas flexibles

En este caso, a las dos placas consideradas en el caso anterior se les agrega flexibilidad. La flexibilidad de las mismas se aproxima con los dos primeros 2 modos de una viga en voladizo. El modo “*i*” de una viga en voladizo está dado por la siguiente expresión, (Meirovitch, 2001)

$$\psi_i(\xi) = C_{i1} [\sin(\beta_i \xi) - \sinh(\beta_i \xi)] + C_{i2} [-\cos(\beta_i \xi) + \cosh(\beta_i \xi)] \quad (52)$$

donde C_{i1} y C_{i2} y β_i son constantes. Para los dos primeros modos, estas constantes son,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1.8751/L & C_{11} &= 0.7341/\sqrt{m} & C_{12} &= 1/\sqrt{m} & \omega_1 &= 3.5160 \sqrt{(EI)/(mL^3)} \\ \beta_2 &= 4.6941/L & C_{22} &= 1.0185/\sqrt{m} & C_{21} &= 1/\sqrt{m} & \omega_2 &= 22.0345 \sqrt{(EI)/(mL^3)} \end{aligned} \quad (53)$$

Las condiciones iniciales del problema, así como los parámetros empleados, son idénticos a los del caso anterior. Además, se incorporan los siguientes valores y condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} EI_1 = EI_2 = 1.5 & & q_{11}(t=0) = \dot{q}_{11}(t=0) = q_{12}(t=0) = \dot{q}_{12}(t=0) = 0 \\ & & q_{21}(t=0) = \dot{q}_{21}(t=0) = q_{22}(t=0) = \dot{q}_{22}(t=0) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

En la Figura 6 se muestra la evolución temporal del ángulo θ_1 y de la posición vertical de la articulación y . Los resultados obtenidos teniendo en cuenta la interacción entre el fluido y la estructura se presentan en trazos rojos discontinuos, mientras que los correspondientes ignorando la interacción fluido-estructura se presentan en trazos azules continuos. Comparando la Figura 6a con la Figura 5a, se observa que la incorporación de flexibilidad en el modelo incrementa el período de la oscilación de la coordenada y .

Las Figuras 7, 8 y 9 muestran los diagramas de estados correspondiente al grado de libertad θ_1 y a las coordenadas modales q_1 y q_2 , respectivamente. En estos diagramas se puede apreciar la reducción de la amplitud y de la velocidad de las vibraciones debidas a las cargas aerodinámicas.

Las Figura 10 y 11 muestran la evolución temporal de los campos de velocidad y presión. En la primera se puede apreciar la formación de las nubes de vórtices que son propulsadas hacia abajo generando sustentación. Las zonas de baja presión generadas por el movimiento hacia debajo de las placas resultan evidentes en la Figura 11.

La Figura 12 muestra el movimiento de una gran cantidad de partículas insertadas en el fluido en el inicio de la simulación. Cada partícula se mueve con la velocidad local de la misma obtenida a través de la ecuación (5). La deformación del contorno fluido, es una evidencia clara de la generación de sustentación mediante esta cinemática.

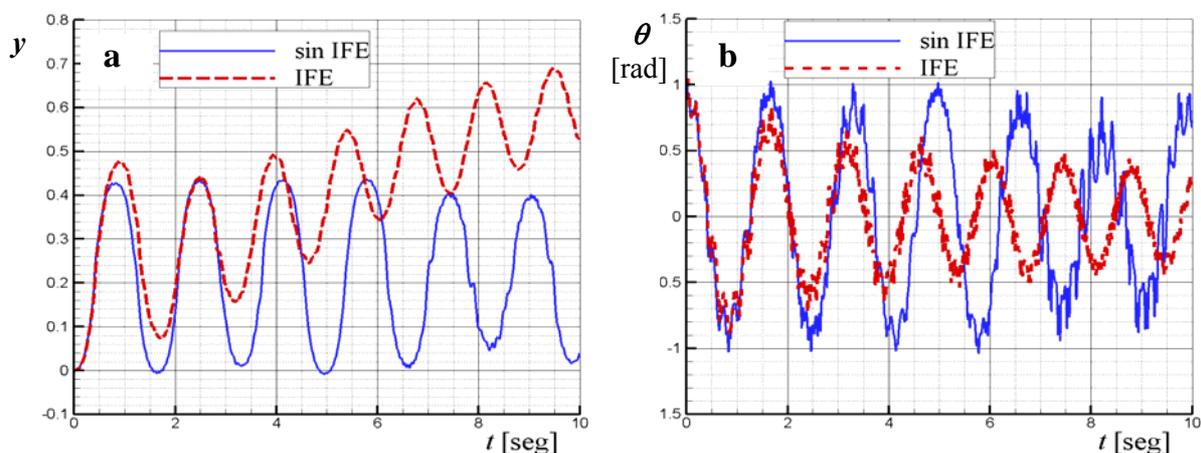


Figura 6: Evolución temporal: a) traslación vertical de la articulación b) rotación θ_1

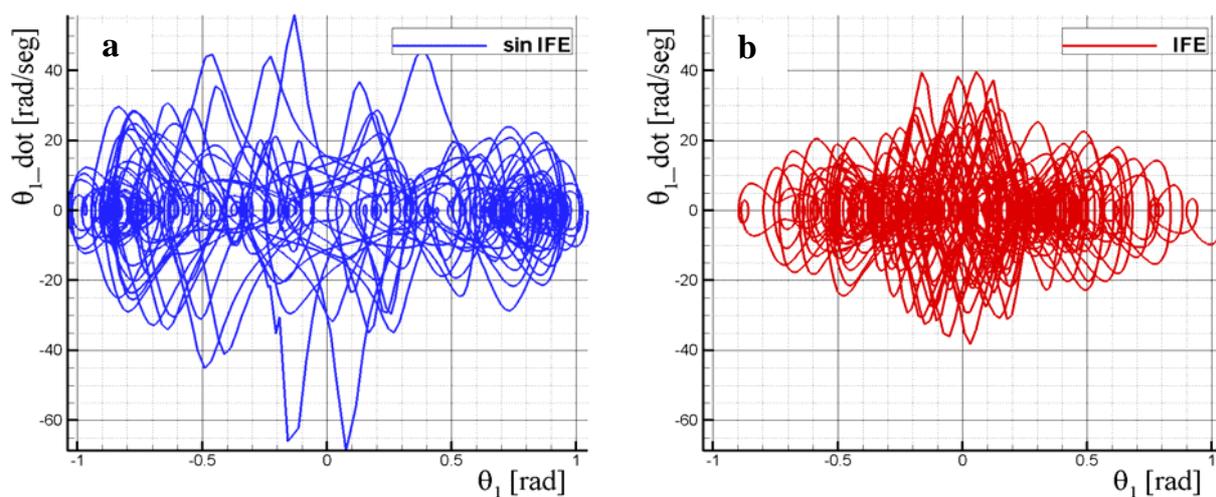


Figura 7: Diagramas de estado para la rotación: a) sin interacción fluido estructura; b) con interacción fluido estructura

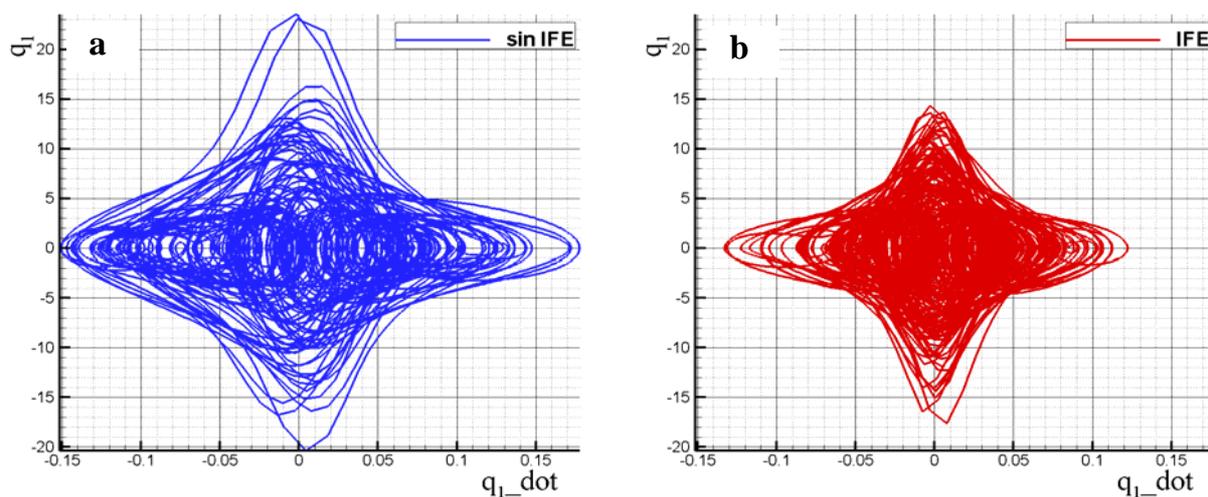


Figura 8: Diagramas de estado del primer modo de vibración: a) sin interacción fluido estructura; b) con interacción fluido estructura

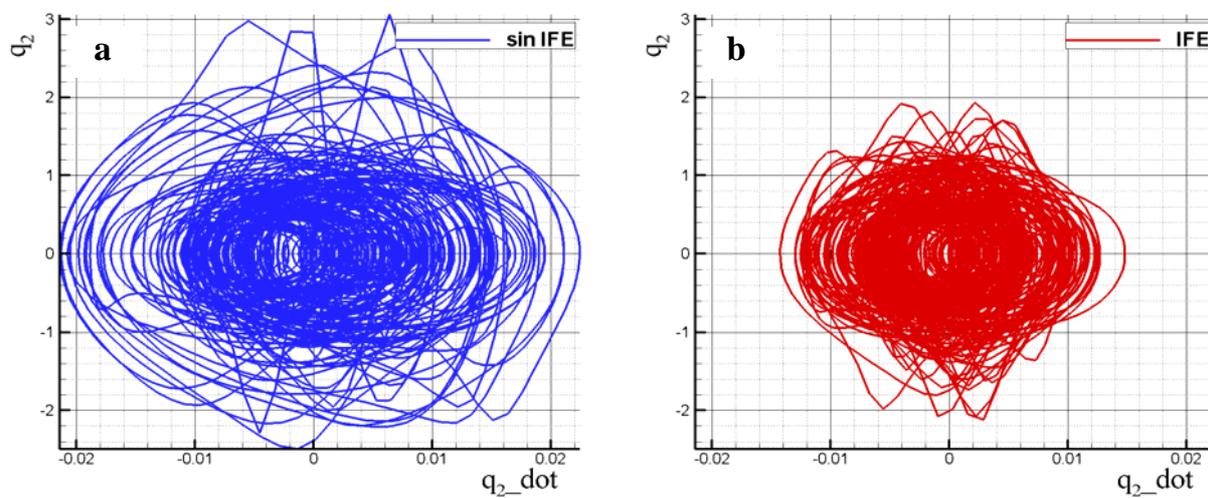


Figura 9: Diagramas de estado del segundo modo de vibración: a) sin interacción fluido estructura; b) con interacción fluido estructura

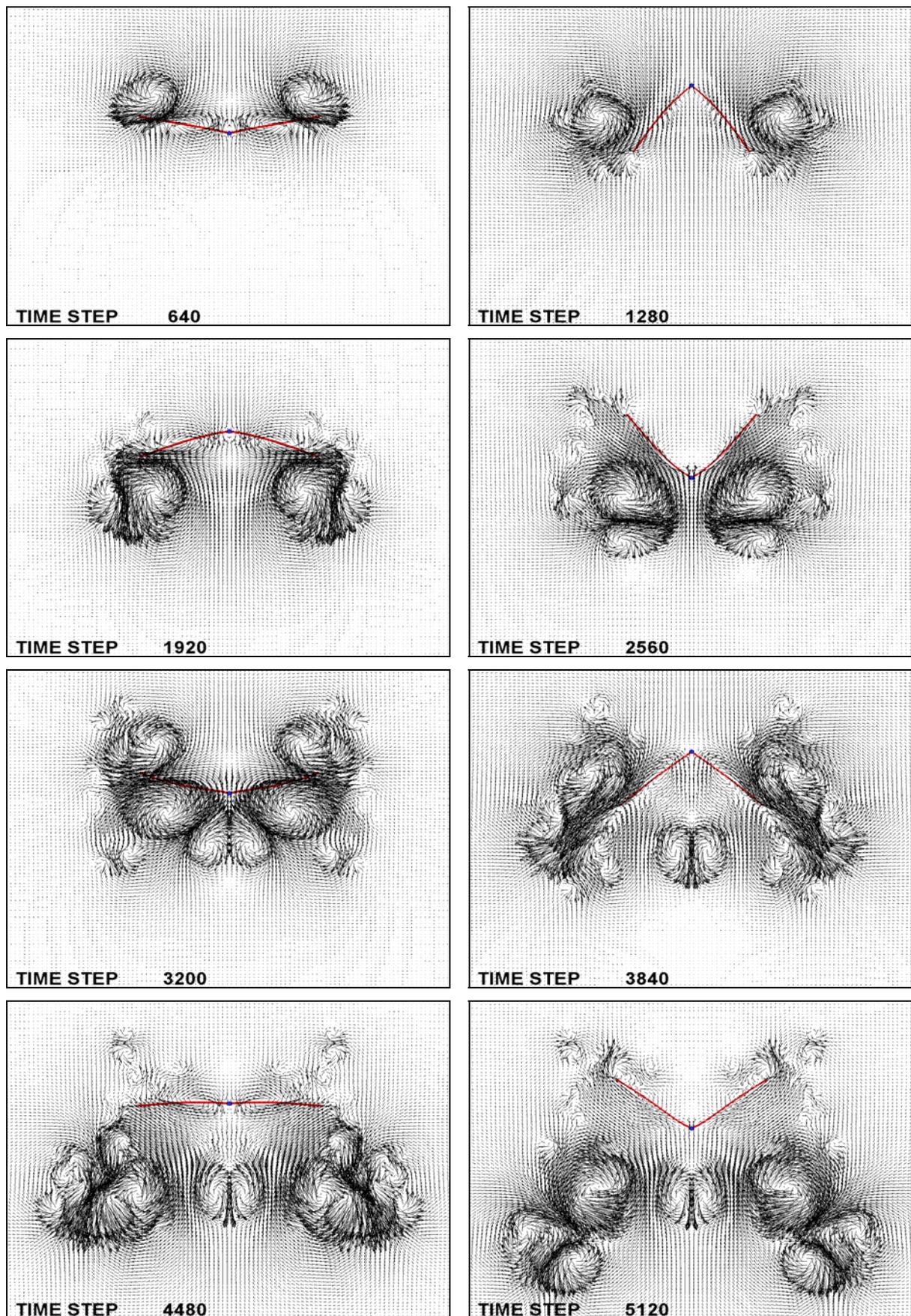


Figura 10: Evolución temporal del campo de velocidades

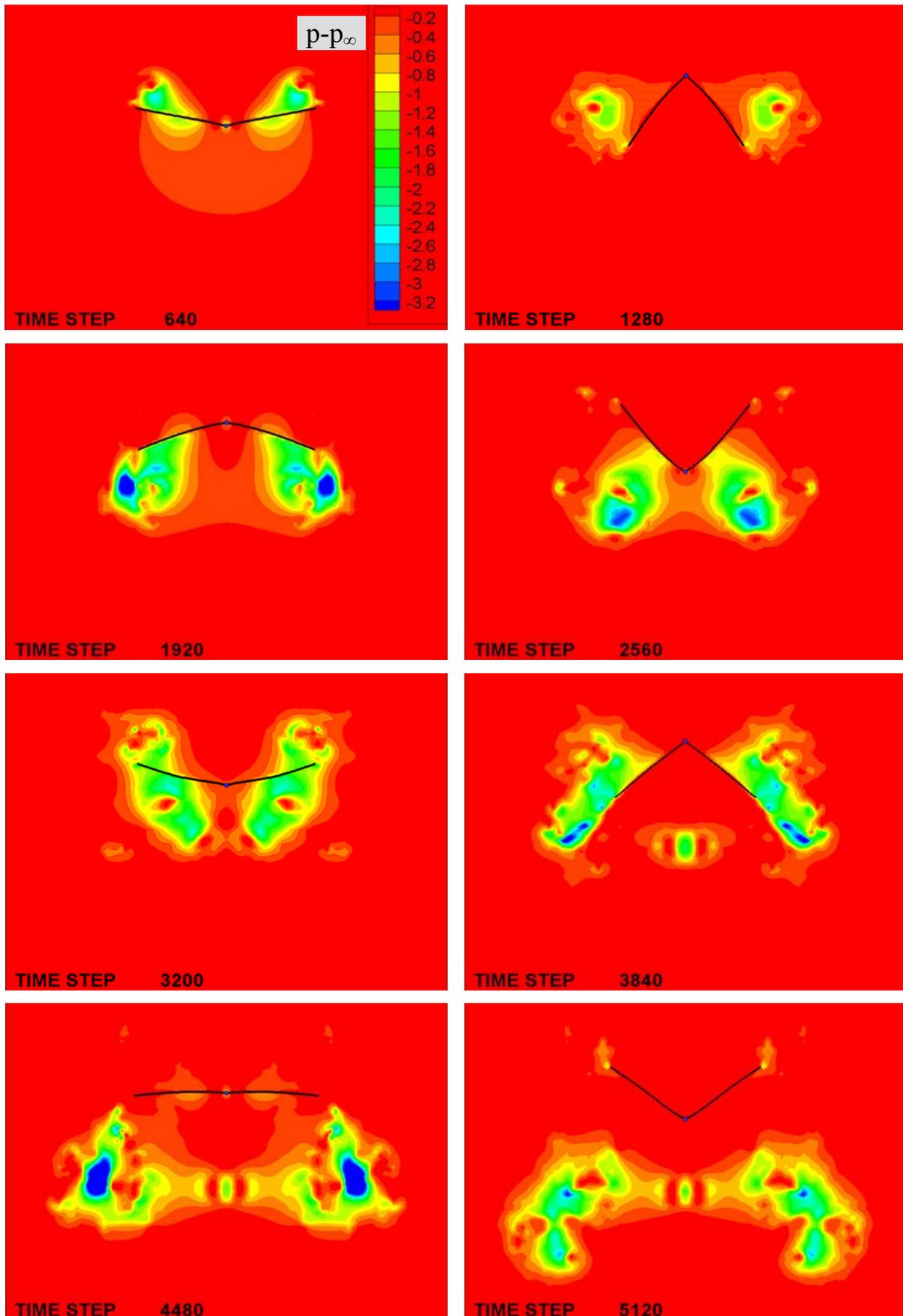


Figura 11: Evolución temporal del campo de presiones

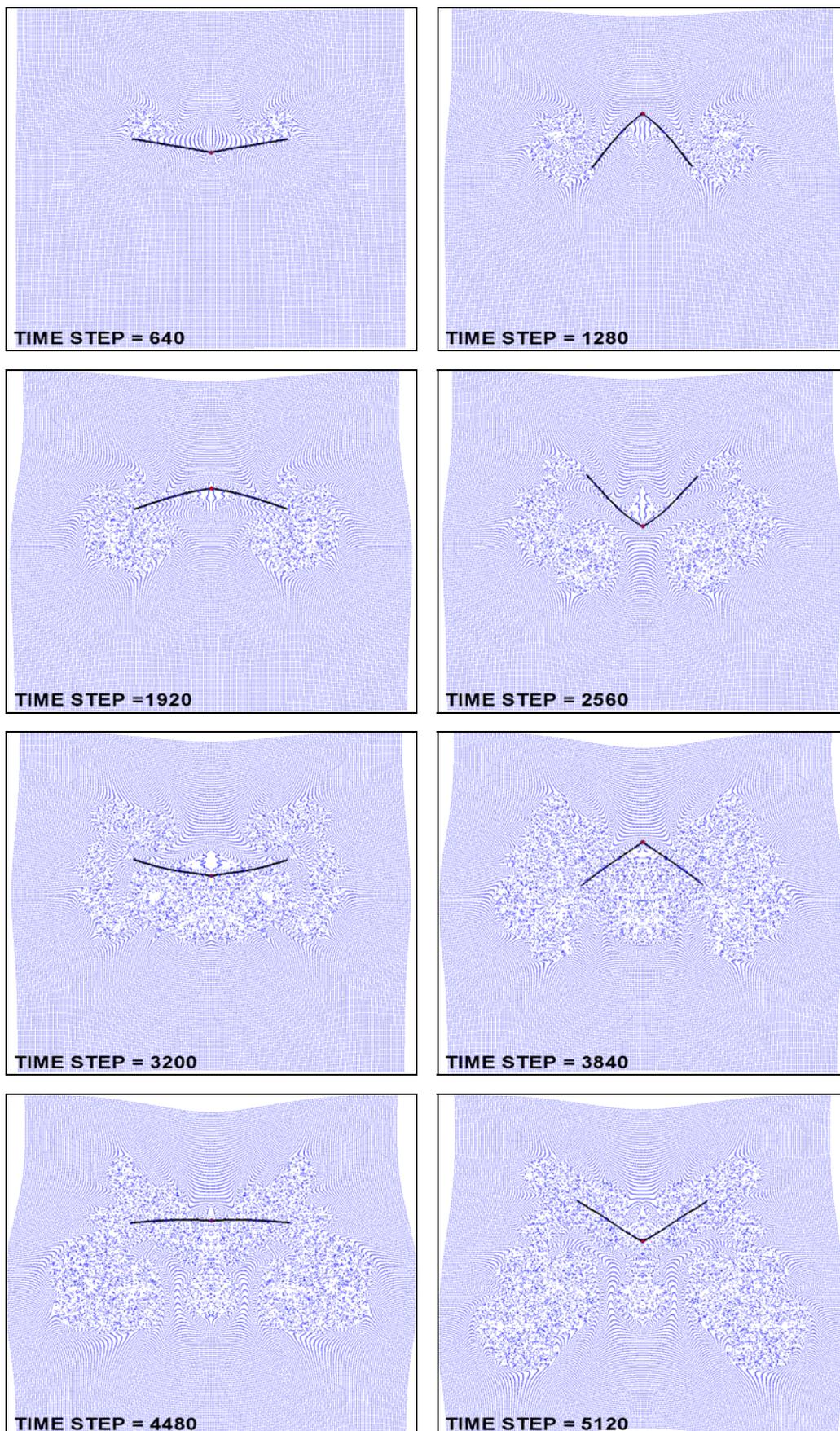


Figura 12 Visualización del movimiento de partículas

6.3 Caso 3: Dos placas rígidas con cinemática prescrita

En este caso, se prescribe la rotación de la placa superior alrededor de la articulación y el desplazamiento horizontal de la misma. En consecuencia, el sistema posee un único grado de libertad dado por la rotación de la placa inferior. La traslación de la articulación y la rotación de la placa superior se prescriben de la siguiente manera,

$$x(t) = 1.4 \cos(\omega t) \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sin(\omega t) \qquad (55)$$

donde la frecuencia angular ω se elige de manera que la velocidad máxima de traslación sea unitaria, esto es,

$$\dot{x}_{\max} = 1.4 \omega = 1 \qquad \omega = \frac{1}{1.4} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2.8 \pi} \qquad (56)$$

donde f es la frecuencia lineal.

La Figura 13 muestra la historia de las cargas aerodinámicas adimensionales, C_L y C_D , para 10 periodos completos donde se ha tenido en cuenta la interacción del fluido con la estructura.

La Figura 14 muestra los diagramas de estado del sistema con y sin interacción fluido-estructura, respectivamente. Es claro el efecto que el amortiguamiento aerodinámico tiene sobre la estructura, reduciendo tanto la amplitud como la velocidad de la oscilación de la placa inferior. En las Figuras 15 y 16 se puede apreciar la evolución temporal de los campos de velocidad y presión respectivamente. La Figura 16 muestra el movimiento de partículas descrito en el caso anterior. Nuevamente, la pronunciada deformación del contorno fluido evidencia la generación de sustentación.

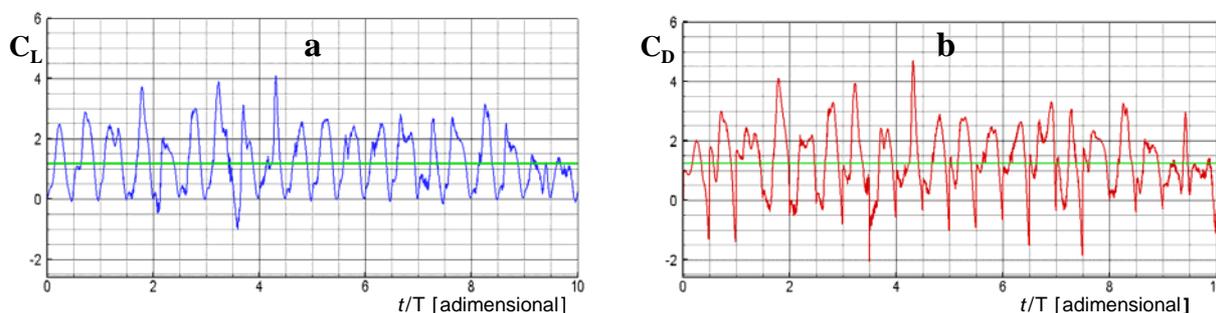


Figura 13: Evolución temporal de las Cargas aerodinámicas C_L y C_D

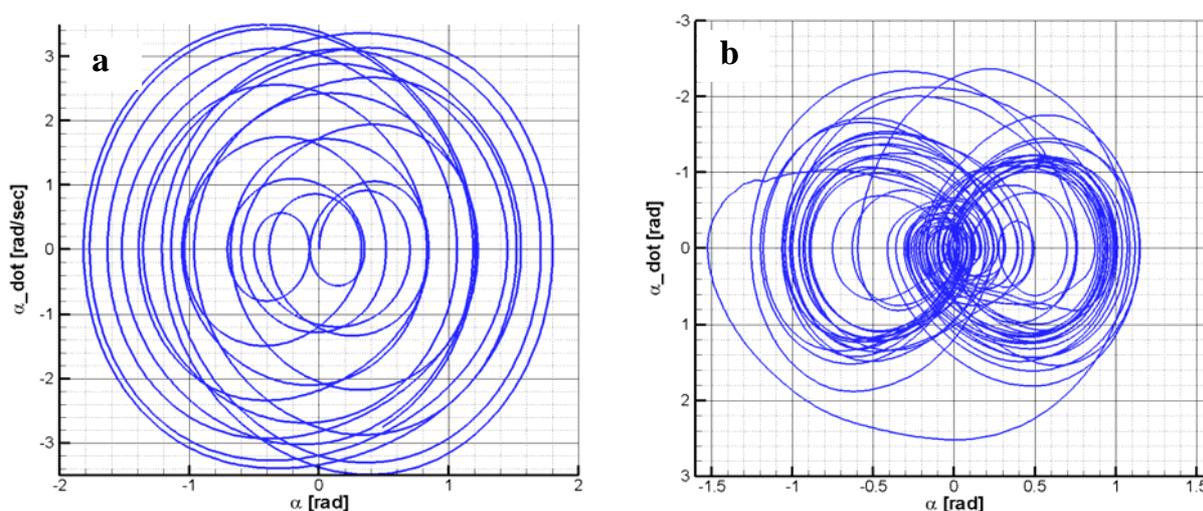


Figura 14: Diagramas de estado del ángulo relativo entre las placas α
a) sin interacción fluido-estructura b) con interacción

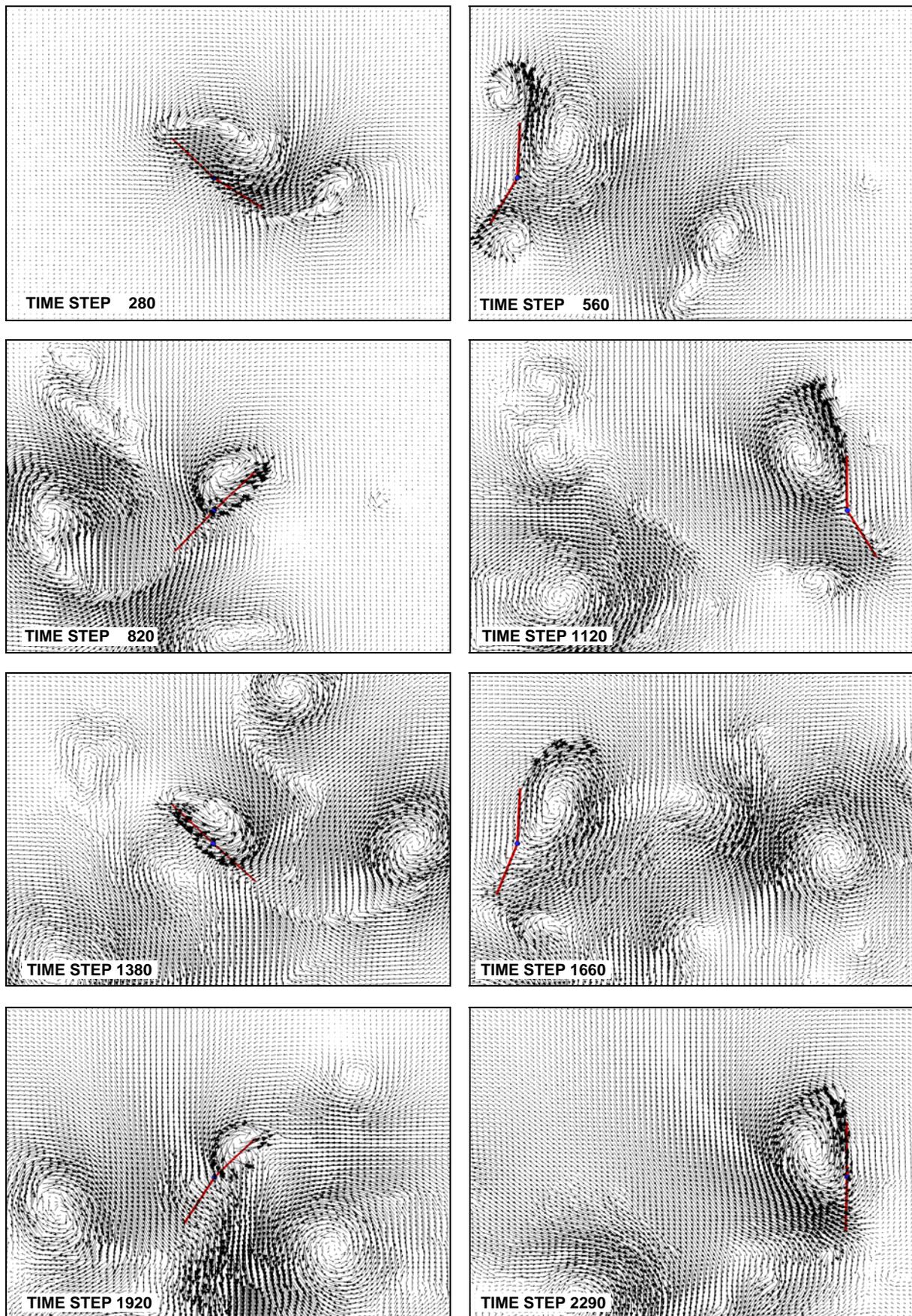


Figura 15: Evolución del Campo de velocidades

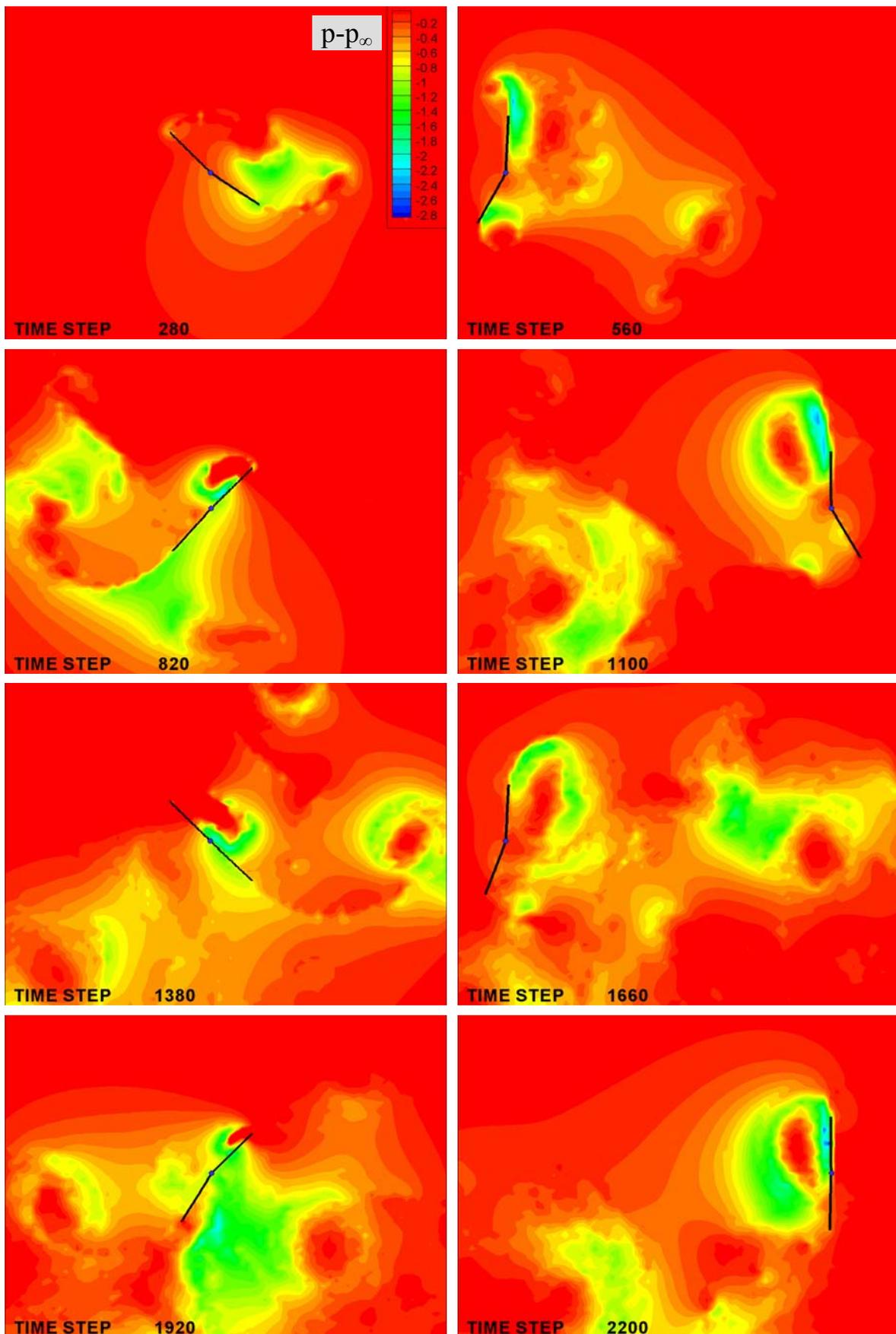


Figura 16: Evolución del campo de presiones

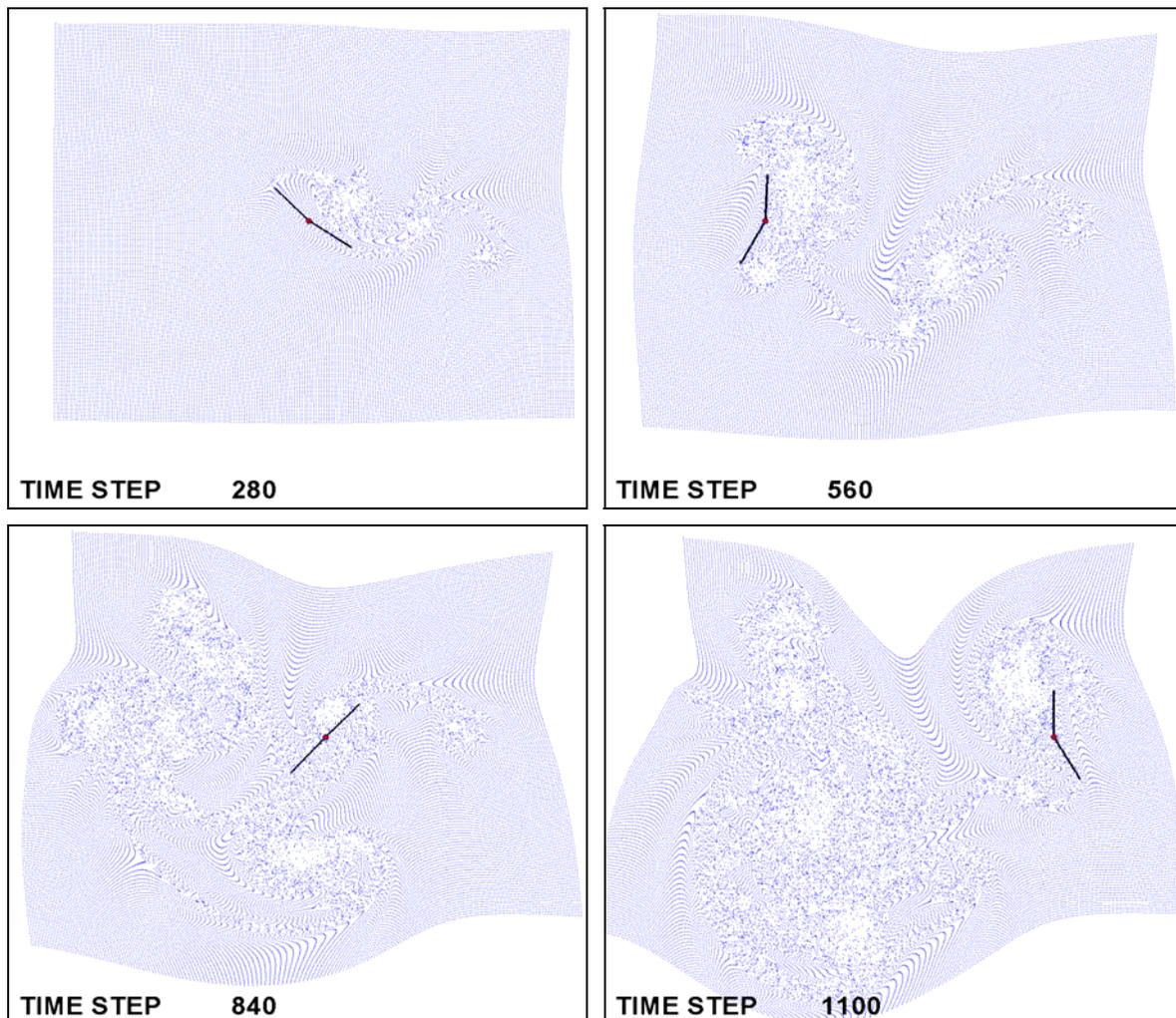


Figura 17: Evolución del Campo de velocidades

6.4 Caso 4: Viga flexible con cinemática prescrita

Finalmente, se estudia una única viga flexible describiendo la misma cinemática utilizada para la placa superior del caso anterior. En este caso, se prescribe la traslación del borde de ataque, así como el giro alrededor del mismo. Para modelar la flexibilidad de la placa se emplea el primer modo de una viga simplemente apoyada que tiene la siguiente forma (Meirovitch, 2001),

$$\psi_1(\xi) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \quad (57)$$

En la Figura 18 se puede apreciar la evolución de las estelas para el presente caso. En total, se muestran tres períodos de batimento, los puntos rojos y azules representan la vorticidad desprendida desde el borde de ataque y de fuga, respectivamente. Se puede apreciar claramente la forma, en que al final de cada medio aleteo, el gran vórtice desprendido desde el borde de ataque es capturado por la placa, generando un pico negativo de resistencia.

En la Figura 19 se presenta la historia de los coeficientes aerodinámicos C_L y C_D para cinco períodos de aleteo, el tiempo se adimensionalizó multiplicándolo por la frecuencia de aleteo. Los resultados se comparan con los resultados para el caso rígido.

En la Figura 20 se puede apreciar el diagrama en espacio de estados de la única coordenada modal empleada.

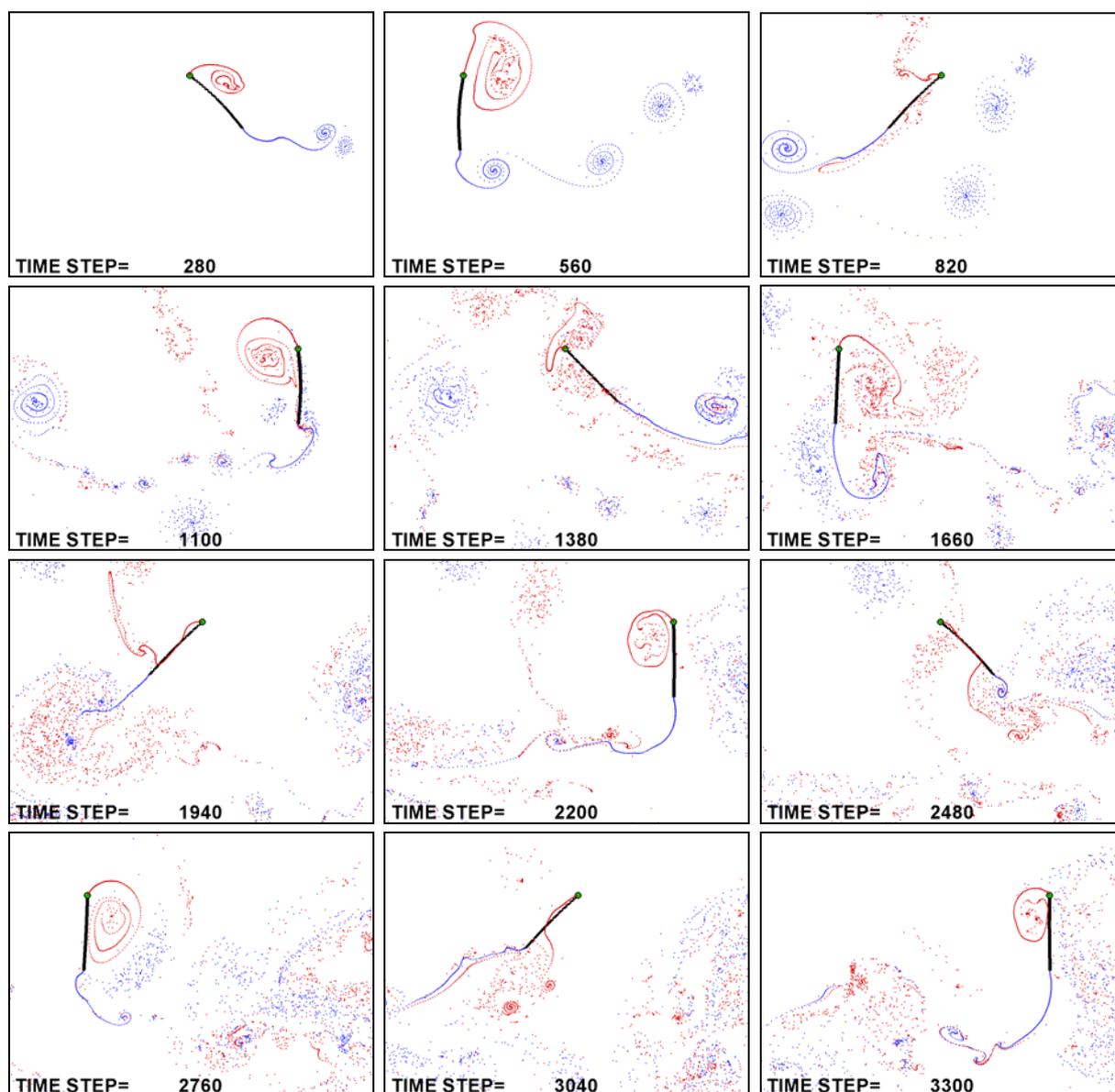


Figura 18: Evolución de las estelas

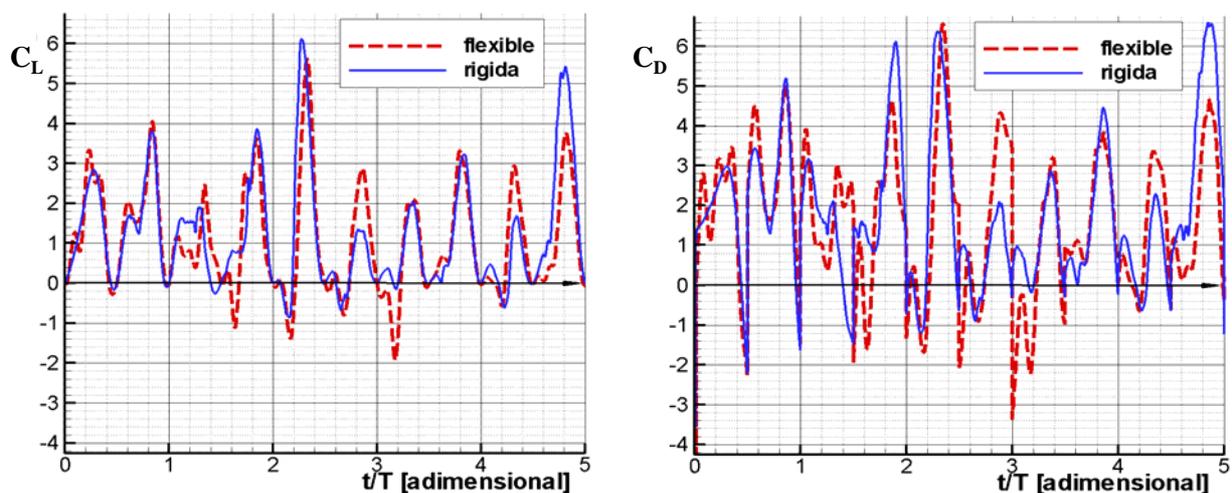


Figura 19: Evolución de las cargas aerodinámicas adimensionales C_L y C_D

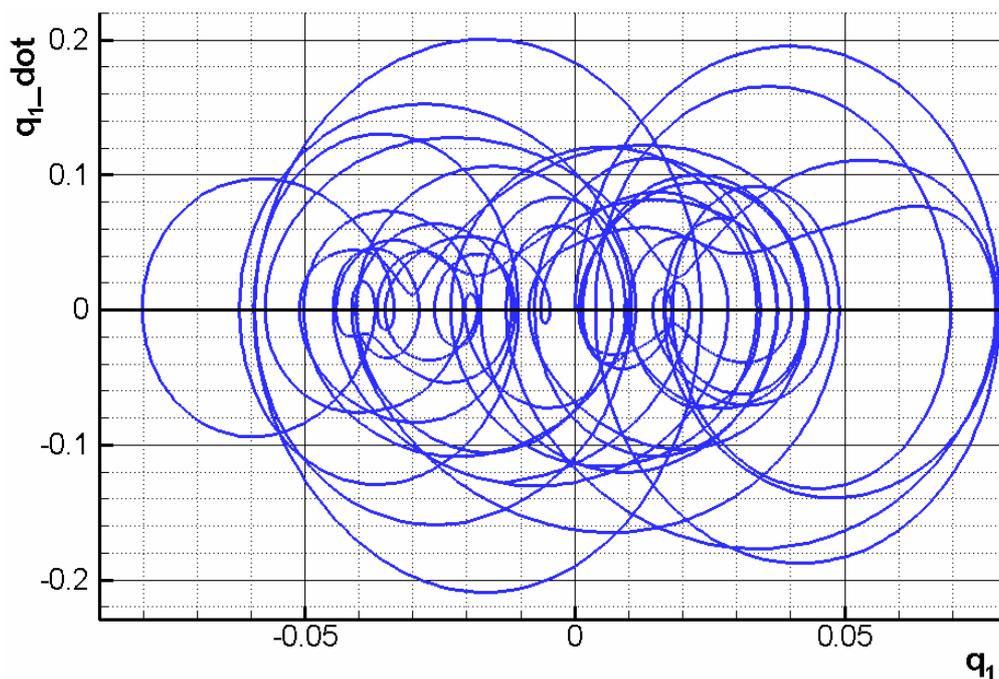


Figura 20: Diagrama de estado correspondiente a la coordenada modal q_1

7 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló una herramienta numérica que permite estudiar el fenómeno de interacción entre estructuras flexibles y flujos bi-dimensionales dominados por vorticidad.

La herramienta permite considerar una o dos vigas acopladas mediante una articulación y un resorte torsional. Estas vigas pueden ser tratadas como cuerpos rígidos o como elementos deformables. En este último caso, se empleó el método de modos asumidos para modelar la flexibilidad de las vigas.

En los dos primeros casos considerados, donde el movimiento de las placas es dado sólo por la energía potencial elástica almacenada inicialmente en el resorte torsional, es posible apreciar como la rotación de ambas placas genera sustentación. Debido a la interacción del fluido con la estructura y viceversa, el sistema de las dos placas asciende verticalmente en el medio fluido. En presencia de gravedad, el fenómeno observado no ocurre debido a que la sustentación generada con este mecanismo no es suficiente para contrarrestar el peso de ambas placas.

El efecto de la flexibilidad de las placas en los casos presentados no resulta claro por lo que es necesaria una investigación mas profunda a fin de concluir sobre los beneficios de la flexibilidad. El hecho de que el fenómeno de interacción fluido-estructura sea altamente dependiente del tipo de cinemática descrita por las vigas limita las posibilidades de alcanzar una conclusión definitiva en este respecto.

A pesar de las limitaciones del modelo utilizado para incluir los efectos de la flexibilidad, y de la simpleza del modelo aerodinámico empleado, la conjunción de ambos constituye un buen punto de partida para comenzar a comprender el efecto de la flexibilidad de las superficies sustentadoras en las prestaciones aerodinámicas de las mismas cuando estas describen cinemáticas típicas del aleteo de insectos y aves pequeñas. Todo este esfuerzo esta conducido con el fin de inspirar el desarrollo de micro-vehículos aéreos, super-maniobrables y no tripulados inspirados en la biología.

REFERENCIAS

- Azuma A., Okamoto M. and Yasuda K., Aerodynamic characteristics of wings at low Reynolds number. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 195:341-398, 2001
- Dickinson M., Solving the mystery of insect flight: Applications to micro-air vehicles. *The Journal of Experimental Biology*, 202:3439-3448, 1999.
- Ellington C., The novel aerodynamics of insect flight: Applications to micro-air vehicles. *The Journal of Experimental Biology*, 202:3439-3448, 1999.
- Katz, J. and Plotkin, A., *Low-speed aerodynamics: From wing theory to panel methods*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- Meirovitch L., *Fundamentals of Vibrations*. McGraw Hill, International Edition, 2001
- Preidikman S., Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems. *Ph.D. Dissertation*, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Tech, 1998.
- Preidikman S. and Mook D.T., Time-domain simulations of linear and nonlinear aeroelastic behavior. *Journal of Vibration and Control*, 6(8):1135-1175, 2000.
- Sane S, The aerodynamics of insect flight. *The Journal of Experimental Biology*, 206:4191-4208, 2003
- Shy W., Berg M. and Ljungqvist D., Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 35:455-505, 1999.
- Valdez M., Preidikman S. y Massa J., Aerodinámica de flujos bidimensionales e inestacionarios dominados por vorticidad. *Revista Mecánica Computacional*, 24:2333-2357, 2006.