

## MODELO PARA EL ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES COMPUESTOS DE MATRIZ ELASTOMÉRICA REFORZADA

Facundo J. Bellomo<sup>a</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup> y Sergio Oller<sup>b</sup>

<sup>a</sup>ICMASa, INIQUI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, [facundobellomo@yahoo.com.ar](mailto:facundobellomo@yahoo.com.ar), [lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar), <http://www.ing.unsa.edu.ar/>

<sup>b</sup>CIMNE. Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España, [sergio.oller@upc.edu](mailto:sergio.oller@upc.edu), <http://www.cimne.upc.es/>

**Palabras Clave:** Grandes Deformaciones, Material Compuesto, Formulación Mixta, Teoría de Mezclas.

**Resumen.** En este trabajo se presenta un modelo adecuado para el análisis del comportamiento mecánico de compuestos constituidos por matriz elastomérica reforzada con láminas metálicas utilizando una cinemática en grandes deformaciones. La fase elastomérica se analiza con un modelo constitutivo hiperelástico en el que se trata de manera diferenciada la parte volumétrica y la desviadora del gradiente de deformaciones. En cuanto a la implementación numérica se utiliza una formulación de elementos finitos multicampos desplazamiento-presión. Para la simulación del comportamiento del compuesto se propone una extensión de la teoría de mezclas generalizada en grandes deformaciones que considera la evolución de las propiedades mecánicas de las fases componentes. La verificación de la formulación presentada se realiza mediante ejemplos de aplicación, en dos etapas. En la primera etapa se simula numéricamente el comportamiento de un bloque de elastómero a tracción y a corte a fin de comprobar la eficacia del modelo constitutivo adoptado y su implementación computacional. En la segunda etapa se analiza un dispositivo de apoyo de caucho laminado constituido por varias capas de elastómero y acero. En esta etapa el dispositivo se analiza, por un lado, mediante micromodelos, discretizando cada fase componente y, por otro lado, mediante macromodelos utilizando la extensión de la teoría de mezclas. En todos los casos se comparan los valores numéricos obtenidos con resultados experimentales observándose una buena concordancia.

## 1 INTRODUCCIÓN

Existen una gran cantidad de aplicaciones estructurales de materiales compuestos de matriz reforzada, que requieren de una cinemática en grandes deformaciones para obtener una respuesta correcta. En muchas de estas aplicaciones, los materiales constituyentes son elastómeros reforzados.

Entre las aplicaciones industriales que utilizan este tipo de materiales compuesto, se pueden mencionar neumáticos, tubos flexibles y catéteres, cintas transportadoras, correas, amortiguadores, etc.

En el campo de la ingeniería estructural, los elastómeros reforzados se utilizan en apoyos de puentes con el objetivo principal de absorber los movimientos generados por la expansión y contracción térmica de éstos. También se usan extensamente como parte de sistemas de aislamiento de base para edificios situados en zonas de alto riesgo sísmico. En ingeniería mecánica se utilizan como apoyo de maquinarias, para control de vibraciones.

La diversidad de aplicaciones de este tipo de dispositivos condujo a que los mismos fueran ampliamente estudiados de manera experimental (SMiRT11, 1991; Kelly, 1991; Skinner et al., 1993; Fuller et al., 1997).

En cuanto a los estudios analíticos se pueden destacar Ali y Ghaffar (1995), Ahmadi et al (1996), Hwang y Ku (1997), Fuller et al (1998), Cheng y Chang (2002), Burtscher et al (2004).

Existen una serie de dificultades para describir numéricamente el comportamiento real de los elastómeros. Una descripción adecuada de los mismos debe considerar los siguientes aspectos:

- Grandes deformaciones elásticas. Los elastómeros se caracterizan por una respuesta elástica marcadamente no lineal al en grandes deformaciones. Resultados de ensayos indican deformaciones de rotura a esfuerzo cortante en el orden del 440% y mayores al 800% en el caso de tracción (Nuñez y Celentano 2005).
- Cuasi-Incompresibilidad. La deformación volumétrica de los elastómeros es prácticamente nula aún cuando están sometidos a grandes deformaciones, con una dilatación del orden de  $10^{-4}$  según se puede observar en ensayos uniaxiales y biaxiales (Ogden, 1984). Esto requiere un tratamiento diferenciado de las deformaciones desviadoras y volumétricas.
- Incorporación del modelo constitutivo en una formulación de elementos finitos. En virtud del inciso anterior se requiere el uso de elementos mixtos, o integración reducida.

De acuerdo a lo expresado el objetivo general de este trabajo es presentar una herramienta numérica apropiada para la representación y simulación del comportamiento de estructuras de elastómeros reforzadas con láminas metálicas. Para esto se presenta en primer lugar el desarrollo y programación de un elemento finito mixto, junto a una teoría constitutiva para láminas de matriz reforzada en grandes movimientos y deformaciones. En segundo lugar se realiza la propuesta y aplicación de una extensión de la teoría de mezclas generalizada considerando para el compuesto un comportamiento serie-paralelo.

Debido a que, en primera instancia, no se considera la componente viscoelástica de la deformación, la aplicación del modelo está limitada a casos donde la misma no sea predominante (procesos cuasi-estáticos).

## 2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO HIPERELÁSTICO UTILIZADO PARA EL ELASTÓMERO

El modelo constitutivo que se utiliza en este trabajo para simular el comportamiento del elastómero esta basado en la función de energía propuesta por Ogden (1984):

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (1)$$

donde  $N$  es un número entero positivo y  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$  son parámetros del material que se determinan en base a una serie de ensayos experimentales. Las deformaciones están parametrizadas por los estiramientos principales  $\lambda_A$  dados por:

$$\lambda_A = (\text{eig}_A(\mathbf{C}))^{1/2} = (\text{eig}_A(\mathbf{b}))^{1/2} \quad (2)$$

donde los autovalores se obtienen a partir del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  ó del tensor izquierdo de Cauchy-Green  $\mathbf{b}$ .

Debido a la cuasi-incompresibilidad que presentan los elastómeros se realiza una descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación en sus partes volumétrica ( $\mathbf{F}_{vol}$ ) y desviadora ( $\bar{\mathbf{F}}$ ),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (3)$$

Mediante esta descomposición, la energía de deformación se puede expresar a través de una descomposición aditiva de sus partes volumétrica y desviadora,

$$W = W(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (4)$$

donde  $\bar{\mathbf{C}}$  es la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green,  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ .

Asociada con la deformación volumétrica se tiene, en la configuración actualizada, una presión hidrostática  $p$ , dada por:

$$p = W'(J) \quad (5)$$

Aplicando la descomposición indicada en la ec. (3) el equivalente de la ec. (4), en estiramientos principales, resulta:

$$W(\lambda_i) = W(J) + W^*(\lambda_i^*), \quad (6)$$

donde  $W(J)$  describe la energía libre asociada al cambio de volumen del sólido y  $W^*(\lambda_i^*)$  la asociada a las deformaciones isocóricas (a volumen constante).

El potencial en función de los estiramientos modificados se expresa como:

$$W^*(\lambda_i^*) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} ((\lambda_1^{*\alpha_i} + \lambda_2^{*\alpha_i} + \lambda_3^{*\alpha_i}) - 3) \quad \text{donde} \quad \lambda_i^* = J^{-1/3} \lambda_i \quad (7)$$

Partiendo de la derivación de la función de energía dada por la ec. (6) y aplicando la regla de la cadena se obtiene el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{A=1}^3 \frac{\partial W^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_A} \frac{\partial (\lambda_A)^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{1}{\lambda_A} + J W'(J) \mathbf{C}^{-1}. \quad (8)$$

En la ec. (8) la tensión total  $\mathbf{S}$  resulta desacoplada en sus partes desviadora  $\bar{\mathbf{S}}$  y volumétrica  $\mathbf{S}_v$  dadas, respectivamente, por:

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \sum_{A=1}^3 \frac{\partial W^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_A} \frac{\partial (\lambda_A)^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{1}{\lambda_A}, \quad \mathbf{S}_v = JW'(J)\mathbf{C}^{-1} \quad (9)$$

El tensor  $\mathbf{C}$  puede escribirse aplicando descomposición polar, como:

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (10)$$

donde  $\lambda_A$  son, como se expresó anteriormente, los estiramientos principales y  $\mathbf{N}_A$  son los respectivos autovectores. De la ec. (10) se obtiene (Simo, 1993):

$$\frac{\partial (\lambda_A)^2}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A, \quad (11)$$

donde  $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$  son ortogonales y definen un sistema rectangular de vectores unitarios. Finalmente resulta:

$$\frac{\partial W^*(\lambda_i)}{\partial \lambda_A} = \sum_{i=1}^N \mu_i J^{1/3} (\lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i})) \quad (12)$$

Si se reemplazan las ecs. (11) y (12) en la ec. (9), se obtiene para la parte desviadora del tensor de tensiones, la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{A=1}^3 \left( \sum_{i=1}^N \mu_i J^{-\alpha_i/3} (\lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i})) \right) \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \frac{1}{\lambda_A} \quad (13)$$

Procediendo de forma análoga, se puede expresar la parte desviadora del tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en la forma:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \left( \sum_{i=1}^N \mu_i J^{-\alpha_i/3} (\lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i})) \right) \frac{1}{\lambda_A} \mathbf{F} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \mathbf{F}^T. \quad (14)$$

Se han propuesto varias expresiones para caracterizar la energía interna asociada al cambio de volumen (Crisfield, 1996). La expresión utilizada en los desarrollos de este trabajo está dada por:

$$W(J) = \frac{1}{2} k(J-1)^2 \quad (15)$$

donde  $k$  es el módulo volumétrico del material en la configuración de referencia. Teniendo en cuenta la ec. (15) y considerando  $\mathbf{S}_v$  positiva para compresión se obtiene:

$$\mathbf{S}_v = -Jk(J-1)\mathbf{C}^{-1}. \quad (16)$$

Las expresiones finales de las tensiones, en las configuraciones de referencia y actualizada, resultan respectivamente dadas por:

$$\mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \left( \sum_{i=1}^N \mu_i J^{-\alpha_i/3} (\lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i})) \right) \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \frac{1}{\lambda_A} - Jk(J-1)\mathbf{C}^{-1} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \left( \sum_{i=1}^N \mu_i J^{-\alpha_i/3} (\lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i})) \right) \frac{1}{\lambda_A} \mathbf{F} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \mathbf{F}^T - k(J-1)\mathbf{I} \quad (18)$$

### 3 TEORÍA DE MEZCLAS PROPUESTA PARA EL ANÁLISIS DE ELASTÓMEROS REFORZADOS CON LÁMINAS METÁLICAS PARA COMPORTAMIENTO EN SERIE

En la simulación numérica de un dispositivo de caucho laminado sometido a un ensayo de corte se observan deformaciones máximas de corte del orden del 400% en la matriz, mientras que la fase de refuerzo presenta deformaciones del orden de 0.01% (Bellomo, 2007). La fase elastomérica trabaja en el rango de las grandes deformaciones, mientras la fase de refuerzo lo hace en el de las deformaciones infinitesimales.

Para un modelo que no involucra deformaciones inelásticas, en el caso de un comportamiento serie en pequeñas deformaciones, la ecuación que determina la relación entre la deformación del compuesto y las deformaciones de las componentes está dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = k_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + k_c \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (19)$$

donde  $k_c$  es el coeficiente de participación volumétrica del componente  $c$  –ésimo.

En lo que sigue se utiliza  $\mathbb{C}$  para designar el tensor constitutivo en la configuración de referencia a efectos de distinguirlo del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ . A partir de la ec. (19) se determina la relación entre la deformación de un componente y la total del compuesto como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = k_1 \left( (\mathbb{C}^\sigma)_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_1 \right) + \dots + k_c \left( (\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_c \right) = (\mathbb{C}^{ser})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (20)$$

donde para las componentes trabajando en serie se verifica:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2 \dots = \boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma} \quad (21)$$

A partir de las ecs. (20) y (21) se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = k_1 \left( (\mathbb{C}^\sigma)_1^{-1} : \mathbb{C}^{ser} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} + \dots + k_c \underbrace{\left( (\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : \mathbb{C}^{ser} \right)}_{\boldsymbol{\phi}_1} : \boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\left( (\mathbb{C}^{ser})^{-1} : \mathbb{C}^{ser} \right)}_{\boldsymbol{\phi}_c} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (22)$$

$$\text{con } \left( \boldsymbol{\phi}_{ijkl} \right)_c = \left( \mathbb{C}_{ijrs}^\sigma \right)_c^{-1} : \mathbb{C}_{rskl}^{ser} \quad (23)$$

Este factor  $\boldsymbol{\phi}$  distribuye las deformaciones entre los componentes en forma proporcional a la rigidez relativa de los mismos, y es el propuesto originalmente para la teoría de mezclas generalizada serie/paralelo y su primera extensión para el caso de grandes deformaciones (Oller, 2003). En este desarrollo se supone que es  $\boldsymbol{\varepsilon}_c = (\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_c$ . Esto se cumple, de manera estricta, sólo en el caso de un modelo constitutivo lineal o cuando se utiliza un tensor constitutivo secante al origen  $(\mathbb{C}_{sec})_c$ .

Para la utilización de la teoría de mezclas en compuestos de matriz elastomérica es necesario extender el desarrollo anterior a grandes deformaciones y considerar un comportamiento no lineal para el modelo constitutivo. En este trabajo se proponen dos enfoques distintos, el primero consiste en utilizar una versión incremental de la ecuación (19) y actualizar el factor  $\boldsymbol{\phi}$  utilizando el tensor constitutivo tangente, luego éste se corrige utilizando un método inverso hasta que se verifique la hipótesis establecida por la ec. (21). El segundo enfoque se basa en utilizar tensores secantes determinados de forma numérica. A continuación, se detalla el desarrollo de cada uno de ellos.

### 3.1 Planteo incremental

La ecuación (19) puede escribirse de forma incremental utilizando una cinemática en grandes deformaciones, en la configuración actualizada, de la siguiente manera:

$$\Delta e = k_1 \Delta e_1 + \dots + k_c \Delta e_c \quad (24)$$

donde  $\Delta e_c = e_c^i - e_c^{i+1}$  es el incremento de deformación respecto del último ( $i$  -ésimo) paso de carga convergido del componente  $c$  -ésimo. Las relaciones constitutivas resultan, a nivel de cada componente y a nivel del compuesto, respectivamente dadas por:

$$\Delta e_c = (c)_c^{-1} : \Delta \sigma_c, \quad \Delta e = (c^{ser})^{-1} : \Delta \sigma \quad (25)$$

donde  $c^{ser}$  está dado por:

$$c_{rskl}^{ser} = \left[ \sum_{c=1}^n k_c (c_{rskl})_c^{-1} \right]^{-1} \quad (26)$$

La relación entre el incremento de deformación del compuesto y cada componente está dada por:

$$\Delta e_c = \phi_c : \Delta e \quad (27)$$

#### a) Formulación incremental – Método inverso

La primera alternativa propuesta consiste en utilizar como tensor constitutivo para el caucho el tensor constitutivo tangente analítico. Dado que las tensiones se obtienen de un modelo hiperelástico altamente no lineal, un tensor tangente verificará sólo de forma aproximada la ec. (25) cuando se trata de un incremento finito de tensión. Por ello se propone corregirlo, en primera instancia, mediante un multiplicador escalar que garantice el cumplimiento exacto de la ec.(25) para una de las componentes. Por ejemplo, en el caso de un dispositivo de apoyo sometido a acciones de corte, la condición se establece sobre la componente tangencial  $\Delta(\sigma_{12})_c$ , es decir:

$$\Delta(\sigma_{12})_c = \Delta(e_{kl})_c : \mathcal{G}(c_{12kl})_c \quad (28)$$

El cumplimiento de la ec. (28) garantiza que la condición de comportamiento en serie, para ambos materiales se verifica de forma estricta para la tensión tangencial, que es la que genera prácticamente el total de la energía interna en el caso de un apoyo sometido a corte.

A partir de la ec. (28) el multiplicador resulta dado por:

$$\mathcal{G} = \frac{\Delta(\sigma_{12})_c}{\Delta(e_{kl})_c : (c_{12kl})_c} \quad (29)$$

Si se consideran dos materiales componentes, caucho y metal, que se denominarán I, II respectivamente, el algoritmo para la integración de la ecuación constitutiva se esquematiza en la Tabla 1 (columna a).

#### b) Formulación incremental – Tensor constitutivo secante algorítmico

La segunda alternativa consiste en utilizar un tensor secante  $(c_{sec})_c$  que verifique de forma exacta la ec. (25). El uso del mismo para el cálculo de  $\phi_c$ , garantiza que se cumplirá la condición establecida por la ec. (21). Existen infinitos operadores secantes que satisfacen esta

ecuación. En esta tesis se propone utilizar la fórmula de actualización conocida como “*Least change secant update*” (Broyden, 1965), resulta entonces:

$$(\mathbf{c}_{sec})_c^{k+1} = (\mathbf{c}_{sec})_c^k + \frac{(\Delta(\boldsymbol{\sigma})_c - (\mathbf{c}_{sec})_c^k \Delta(\mathbf{e})_c) \Delta(\mathbf{e})_c^T}{\Delta(\mathbf{e})_c^T : \Delta(\mathbf{e})_c^T} \quad (30)$$

En correspondencia con la ec. (24), se utiliza un tensor constitutivo secante al último paso convergido. En este caso, el problema resulta iterativo. El algoritmo para la resolución de la ecuación constitutiva se esquematiza en la Tabla 1 (columna b).

a) Formulación incremental – Método inverso	b) Formulación incremental – Tensor constitutivo secante algorítmico	c) Formulación total – Tensor constitutivo secante al origen
Paso de carga $i$ , iteración $k$		
	Datos: $\mathbf{e}_{i+1}^k, \mathbf{e}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^k, (\mathbf{e}_i)_I, (\mathbf{e}_i)_{II}$	Datos: $\mathbf{e}_{i+1}^k$
1)	$\Delta \mathbf{e}^k = \mathbf{e}_{i+1}^k - \mathbf{e}_i$	1) $(\mathbf{e}^k)_c = \boldsymbol{\phi}^k \mathbf{e}^k, \quad c = I$
2)	$\Delta(\mathbf{e}^k)_c = \boldsymbol{\phi}^k \Delta \mathbf{e}^k, \quad c = I$	
3)	$(\mathbf{e}^k)_I = \Delta(\mathbf{e}^k)_I + (\mathbf{e}_i)_I$	
4)	$(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I = \sum \beta_a m_a$ (Modelo Hiperelástico de Ogden)	2) $(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_c = \left( \sum_a \beta_a m_a \right)_c$
5)	$\Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I = (\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I - (\boldsymbol{\sigma}_i)_I$	3) $(\mathbf{c}_{sec})_c^{k+1} = (\mathbf{c}_{sec})_c^k + \frac{(\Delta(\boldsymbol{\sigma})_c - (\mathbf{c}_{sec})_c^k \Delta(\mathbf{e})_c) (\mathbf{e})_c^T}{(\mathbf{e})_c^T : (\mathbf{e})_c^T}$ $c = I$
6)	$\mathcal{G} = \frac{\Delta(\boldsymbol{\sigma}_{12})_c}{\Delta(\mathbf{e}_{kl})_c : (\mathbf{c}_{12kl}^\sigma)_c}$ $(\mathbf{c}_{sec})_c^{k+1} = (\mathbf{c}_{sec})_c^k + \frac{(\Delta(\boldsymbol{\sigma})_c - (\mathbf{c}_{sec})_c^k \Delta(\mathbf{e})_c) \Delta(\mathbf{e})_c^T}{\Delta(\mathbf{e})_c^T : \Delta(\mathbf{e})_c^T}$ $c = I$	
7)	$(\mathbf{c}^\sigma)_I^{k+1} = \mathcal{G} (\mathbf{c}^\sigma)_I^k$	4) $(\boldsymbol{\phi})_c^{k+1} = \left( (\mathbf{c}_{sec})_c^{k+1} \right)^{-1} : (\mathbf{c}^{ser})^{k+1}$ $c = I$
8)	$(\boldsymbol{\phi})_c^{k+1} = (\mathbf{c}^{k+1})_c^{-1} : (\mathbf{c}^{ser})^{k+1}$ $c = I, II$	5) $\Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1})_c = (\mathbf{c})_c \Delta(\mathbf{e}^{k+1})_c$ $c = I$
9)	Cálculo de las tensiones de cada componente	6) $\Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I \approx \Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_{II}$ si no se cumple volver a 2 y repetir con $c = I, II$
10)	Verificar $\Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I \approx \Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_{II}$ si no se cumple volver a 2 y repetir con $c = I, II$	8) $(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1}) = k_I \boldsymbol{\phi}_I^{k+1} (\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I + k_{II} \boldsymbol{\phi}_{II}^{k+1} (\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_{II}$
11)	$\Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1}) = k_I \boldsymbol{\phi}_I^{k+1} \Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_I + k_{II} \boldsymbol{\phi}_{II}^{k+1} \Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)_{II}$	
12)	$(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1}) = (\boldsymbol{\sigma}_i) + \Delta(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^k)$	

Tabla 1: Algoritmo alternativas a, b, c.

### 3.2 Formulación total – Tensor constitutivo secante al origen

Otra alternativa resulta de utilizar directamente un tensor secante al origen y trabajar con una ecuación total, en lugar de incremental. Considerando un tensor secante al origen, y una versión total de las ecuaciones (24) a (27) resulta:

$$e = k_1 e_1 + \dots + k_c e_c \quad (31)$$

$$e = (c^{ser})^{-1} : \sigma, \quad e_c = (c_{sec})_c^{-1} : \sigma_c \quad (32)$$

$$e_c = \phi : e \quad (33)$$

El algoritmo correspondiente se esquematiza en la Tabla 1 (columna c).

## 4 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

### 4.1 Generalidades

En este apartado se presenta una breve descripción de la implementación computacional del modelo constitutivo descrito en una formulación de elementos finitos, considerando una cinemática en grandes deformaciones.

En particular, para este trabajo, se adoptó una configuración mixta (Bellomo, 2007). Para el planteo del equilibrio energético se utiliza una formulación lagrangeana total, en la configuración de referencia en el tiempo  $t = 0$  donde el volumen se mantiene constante. Por otro lado, la integración de las ecuaciones constitutivas se realiza en la configuración actualizada, ya que ciertos parámetros materiales son conocidos en esta configuración.

### 4.2 Formulación multcampos $u/p$

La formulación tradicional de elementos finitos en desplazamientos presenta problemas de mal condicionamiento de la matriz de rigidez y bloqueo cuando se utilizan materiales cuasi-incompresibles (Bathe, 1996; Crisfield, 1996). A medida que el valor del coeficiente de Poisson  $\nu$  se acerca a 0.5, aumenta el mal condicionamiento de la matriz de rigidez, resultando singular para  $\nu = 0.5$ .

Existen varios procedimientos destinados a sortear las dificultades derivadas de la cuasi-incompresibilidad del material. Estos pueden clasificarse en dos grandes grupos: formulaciones multcampos e integración reducida-selectiva.

En las formulaciones multcampos el principio variacional incluye, además del campo de desplazamientos, el campo de deformación volumétrica y/o presión (Crisfield, 1996). El inconveniente principal que se presenta es el aumento del número de incógnitas del problema aunque, en ciertos casos, es posible condensar estas variables a nivel elemental.

Los métodos de integración reducida selectiva pueden presentar problemas en los casos de elementos sujetos a grandes deformaciones y muy distorsionados.

En este trabajo se utiliza una formulación en dos campos, desplazamiento y presión  $u/p$ , ambos campos son tratados como variables independientes. Con este fin, se adoptan funciones de interpolación distintas para la aproximación de las componentes del campo de desplazamientos y para la aproximación de la presión, esta última con un orden menor. La elección adecuada del orden de estas funciones de interpolación permite obtener elementos que verifican el “test de la parcela incompresible” o condición LBB (Babuska-Brezzi) (Crisfield, 1996). Estas funciones están dadas por:

$$p = \sum h_{p_i} p_i \quad u = \sum h_i u_i \quad v = \sum h_i v_i \quad w = \sum h_i w_i \quad (34)$$

donde  $p_i$  es la presión en los puntos nodales;  $u, v, w$  son los desplazamientos nodales,  $u, h_i$  y  $h_{p_i}$  son las funciones de forma utilizadas para interpolar las componentes del campo de desplazamientos y de presión, respectivamente.

Utilizando el principio de los trabajos virtuales, se puede expresar el vector de fuerzas no equilibradas como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e = \int \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{S} dV_0 - \mathbf{q}_e \quad (35)$$

donde  $\mathbf{B}_{nl}$  (en forma matricial) relaciona los desplazamientos con las deformaciones de Green-Lagrange,  $\mathbf{S}$  es un vector que contiene las tensiones correspondientes al segundo tensor de Piola-Kirchhoff y  $\mathbf{q}_e$  es el vector de fuerzas externas.

La aplicación de la relación presión-desplazamiento y el empleo del método de Galerkin permite obtener la siguiente forma débil:

$$-\int \left( (J-1) + \frac{1}{k} p \right) \delta p dV_0 = -\delta \hat{\mathbf{p}}^T \int \mathbf{h}_p \left( (J-1) + \frac{1}{k} p \right) dV_0 = \delta \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{f} = 0 \quad (36)$$

La ec. (36) debe verificarse para cualquier variación arbitraria de la presión, de manera que  $\mathbf{f}$  representa la pérdida de compatibilidad de presiones:

$$\mathbf{f} = -\int \mathbf{h}_p \left( (J-1) + \frac{1}{k} p \right) dV_0 = 0 \quad (37)$$

A partir de un estado de equilibrio, aceptando el cumplimiento de la ec. (37), se tiene:

$$\delta \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \delta \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{P}_{up}^T \delta \mathbf{u} + \mathbf{H} \delta \hat{\mathbf{p}} = 0 \quad (38)$$

donde los tensores  $\mathbf{P}_{up}$  y  $\mathbf{H}$  están dado por:

$$\mathbf{P}_{up} = \frac{\partial q_i}{\partial \hat{\mathbf{p}}} = \int \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{g}^k \mathbf{h}_p^T dV_0 \quad (39)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \hat{\mathbf{p}}} = -\int \frac{1}{k} \mathbf{h}_p \mathbf{h}_p^T dV_0 \quad (40)$$

A fin de aplicar el método de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal, se expanden las ecs. (35) y (38) usando series de Taylor:

$$\mathbf{g}_n = 0 = \mathbf{g}_0 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \delta \hat{\mathbf{p}} \quad (41)$$

$$\mathbf{f}_n = 0 = \mathbf{f}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \delta \hat{\mathbf{p}} \quad (42)$$

Combinando las ecs.(41) y (42) se obtiene:

$$-\begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{P}_{up} \\ \mathbf{P}_{up}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (43)$$

De forma alternativa, se puede resolver el segundo conjunto de ecuaciones en primer lugar

y sustituir la solución en el primer conjunto:

$$-\bar{\mathbf{g}} = -(\mathbf{g} - \mathbf{P}_{up} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}) = \left[ \mathbf{K}_t - \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P}_{up}^T \right] \Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{K}}_t \delta \mathbf{u} \quad (44)$$

### 4.3 Teoría de mezclas - Problema global

La convergencia del problema global linealizado depende fundamentalmente del tensor constitutivo utilizado. En la Sección 3 se han planteado varias alternativas para el elastómero, mientras que para el acero se emplea siempre el tensor constitutivo elástico inicial.

Cuando se utiliza para la resolución del problema global el método full Newton-Raphson, se trabaja con el tensor constitutivo tangente actualizado en cada iteración para el cálculo de la matriz de rigidez, con lo que se obtiene una convergencia cuadrática. A tal fin, se debe calcular el tensor  $c_{rskl}^{ser}$  del compuesto utilizando el tensor tangente analítico para el elastómero planteado en la alternativa a) de la Sección 3. Otra alternativa es utilizar el tensor secante obtenido a través de la ecuación (30), lo que es equivalente al uso de un método del tipo quasi-Newton. En este último caso se obtiene una velocidad de convergencia menor, pero aumenta ligeramente la robustez del método.

## 5 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En esta sección se presenta un conjunto de ejemplos de aplicación que permiten evaluar el comportamiento del modelo constitutivo propuesto, la eficacia de la formulación de elementos finitos multicampos utilizada para evitar los problemas inherentes a la cuasi-incompresibilidad del material y la caracterización del comportamiento global de los laminados de elastómero reforzado con láminas metálicas. Para esto se aplica la formulación presentada a los siguientes casos:

- Tracción simple, deformación homogénea.
- Ensayo de corte, caucho natural y alto amortiguamiento.
- Dispositivo de apoyo, micromodelo.
- Dispositivo de apoyo, macromodelo con teoría de mezclas.

Las dos primeras aplicaciones (tracción simple y corte) permiten verificar el correcto funcionamiento del modelo constitutivo adoptado en este trabajo para la simulación de elastómeros.

Luego, se realiza la simulación de ensayos de un dispositivo de apoyo de caucho laminado sometido a corte. Esta simulación comprende básicamente dos etapas. En la primera etapa la simulación numérica se realiza discretizando ambos componentes del dispositivo, es decir, el elastómero y el refuerzo metálico. En la segunda etapa se modela el dispositivo de apoyo considerando una escala macromecánica utilizando la extensión de la teoría de mezclas presentada en este trabajo.

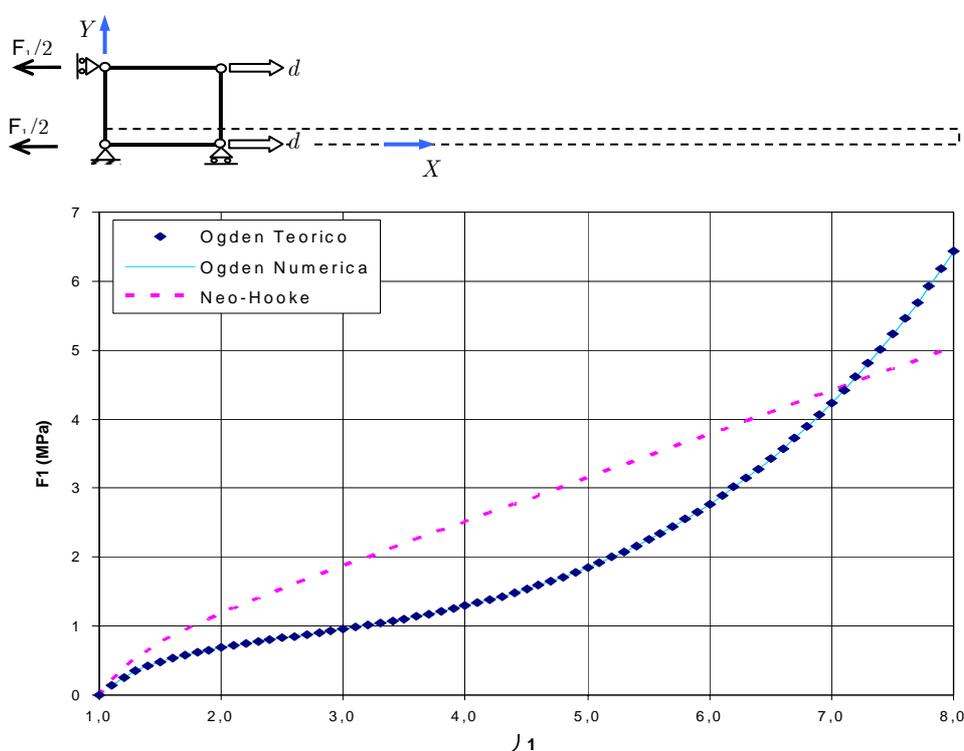
### 5.1 Tracción simple, deformación homogénea

En esta sección se presenta la respuesta fuerza – desplazamiento en tracción simple homogénea. A fin de evaluar el comportamiento de la formulación numérica adoptada, se analiza una pieza de caucho natural vulcanizado de dimensiones unitarias (1cm. de lado). Los parámetros de Ogden correspondientes a este material son  $\mu_1 = 0.62994$ ,  $\mu_2 = 0.001267$ ,  $\mu_3 = -0.01001$ ,  $G(Mpa) = 0.4226$ ,  $\alpha_1 = 1.3$ ,  $\alpha_2 = 5.0$  y  $\alpha_3 = -2.0$ .

Para la modelación se utilizó un único elemento mixto 4/1 tomando 2 puntos de Gauss en cada dirección de análisis. El problema se trató como un estado plano de deformaciones,

imponiendo desplazamientos ( $d$ ) en la dirección  $X$  y permitiendo el libre desplazamiento de los nodos superiores en la dirección  $Y$ , como se observa en la Figura 1. Se aplicaron pasos de desplazamiento equivalentes al 10% de la longitud inicial, hasta alcanzar un desplazamiento de 0.7 mm. La convergencia se consiguió en 3 iteraciones para los primeros pasos y en 4 iteraciones para los restantes incrementos de desplazamiento.

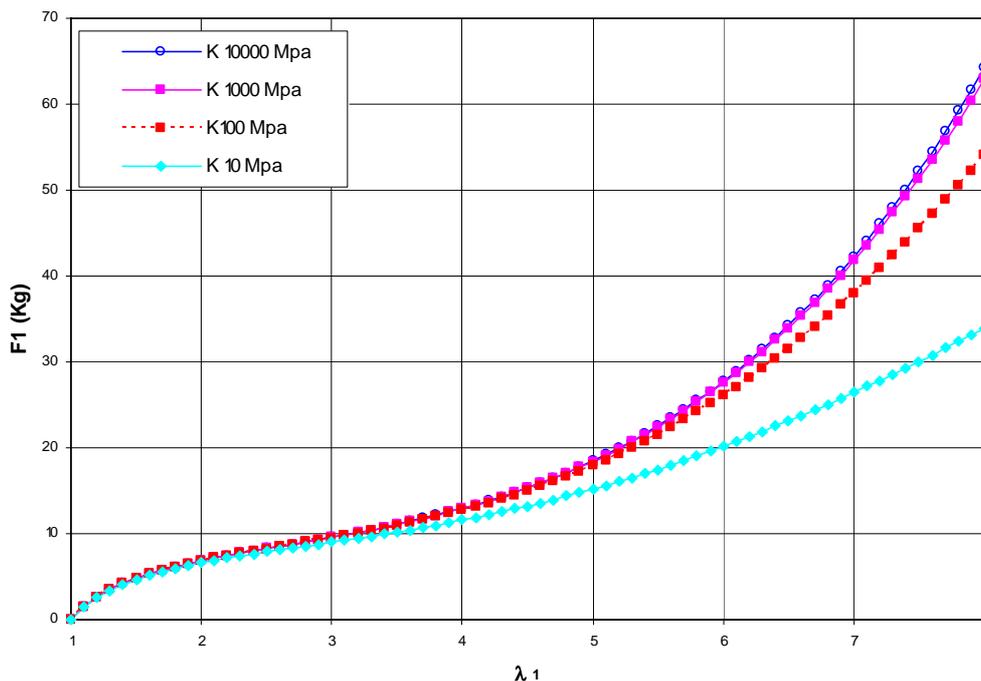
En la Figura 1 se representa la fuerza  $F_1$  correspondiente a cada incremento de desplazamiento. La curva obtenida coincide con la respuesta teórica publicada por Ogden (1984) para un material totalmente incompresible. Además, en la Fig. 1 se grafica la respuesta obtenida utilizando el modelo de Neo-Hooke, que constituye la forma más sencilla de hiperelasticidad isótropa.



**Figura 1:** Curvas fuerza-estiramiento principal ( $F_1 - \lambda_1$ ) en tracción

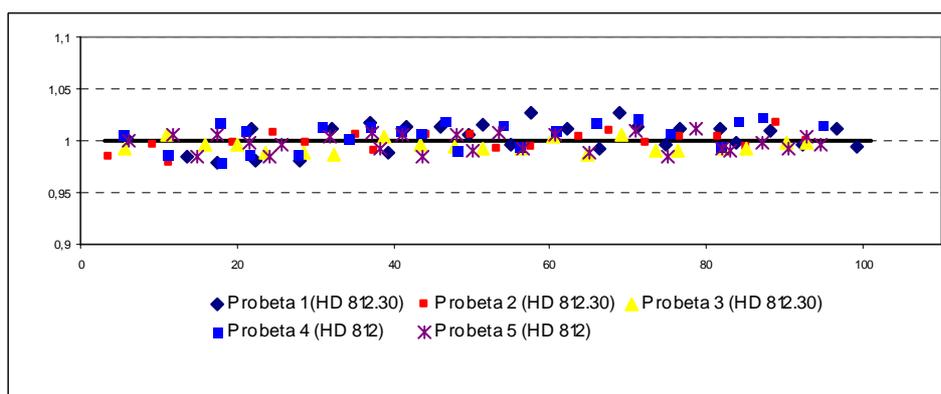
En el ejemplo desarrollado en esta sección se utilizó un módulo volumétrico  $k$  suficientemente alto para lograr simular un comportamiento prácticamente incompresible, de manera de forzar una deformación a volumen cuasi constante. En este caso se trabajó con  $k = 10000$ , obteniéndose una deformación volumétrica  $(J - 1) = 0.0017$  para  $\lambda_1 = 8$ .

En la Figura 2 se grafica la influencia del módulo volumétrico en la respuesta obtenida con el modelo propuesto. Se puede observar que las curvas de respuesta son prácticamente coincidentes para valores del estiramiento principal  $\lambda_1$  menores a 3.



**Figura 2:** Influencia del módulo volumétrico en la respuesta del modelo numérico

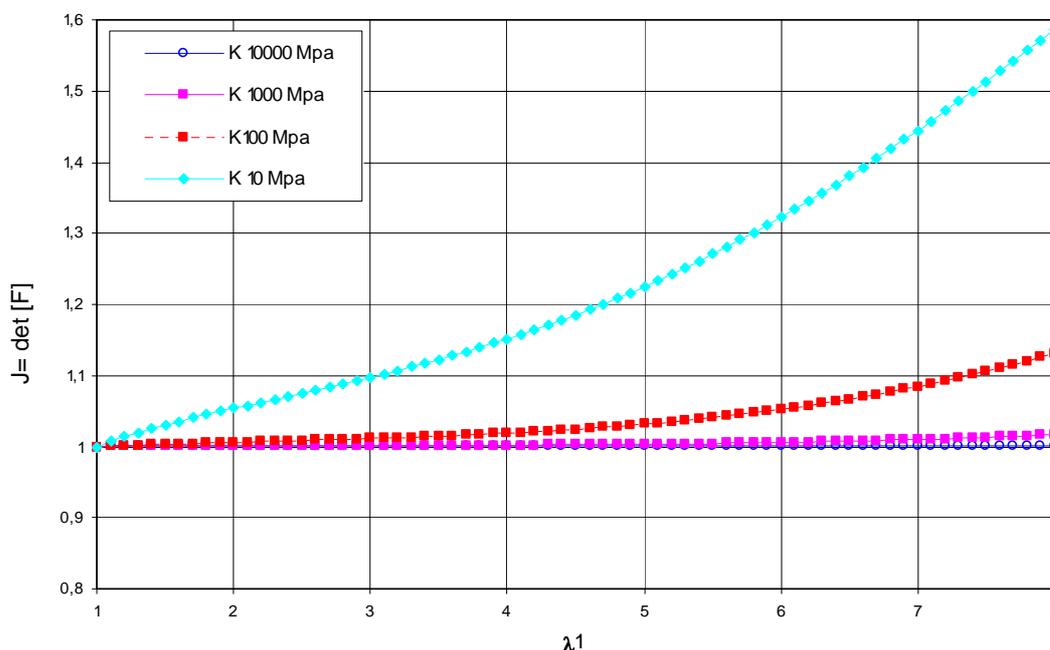
En la Figura 3 se reproduce la variación de volumen  $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$  obtenida por Nuñez y Celentano (2005), para diversos ensayos de tracción. Los mismos corresponden a una serie de cinco ensayos llevados a cabo sobre dos compuestos elastoméricos denominados HD-812 y HD-812.30, que se utilizan en dispositivos de apoyos y en aisladores de base. Como se puede apreciar en la mencionada figura, el volumen sufre una variación muy pequeña ( $J \cong 1$ ) exhibiendo un comportamiento cuasi-incompresible en todos los casos.



**Figura 3:** Verificación de la condición de incompresibilidad en la respuesta mecánica de los cauchos (Núñez y Celentano, 2005)

Los valores de la variación de volumen obtenidos con el modelo numérico presentado en este trabajo, para diferentes valores del módulo de deformación volumétrica, se presentan en la Fig 4. Se aprecia que, para representar adecuadamente la respuesta cuasi-incompresible que se evidencia en los ensayos experimentales, el módulo volumétrico debe estar comprendido

en el rango de 1000 a 10000 MPa.



**Figura 4:** Valores de  $J$  correspondientes a varios valores del módulo volumétrico (en tracción)

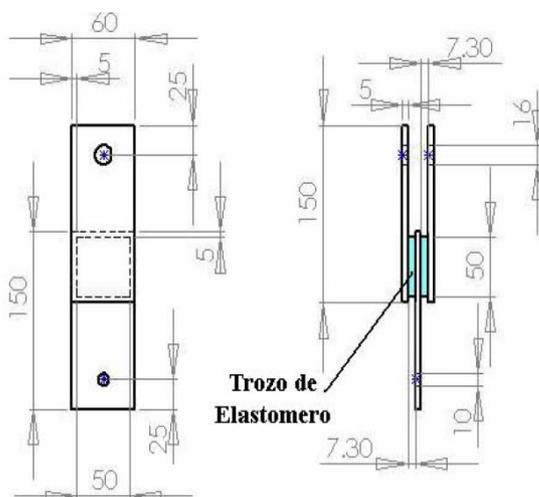
## 5.2 Ensayo de corte

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la simulación numérica de los ensayos experimentales de corte realizados por Núñez y Celentano (2005) sobre elastómeros comúnmente utilizados en la fabricación de dispositivos de apoyo.

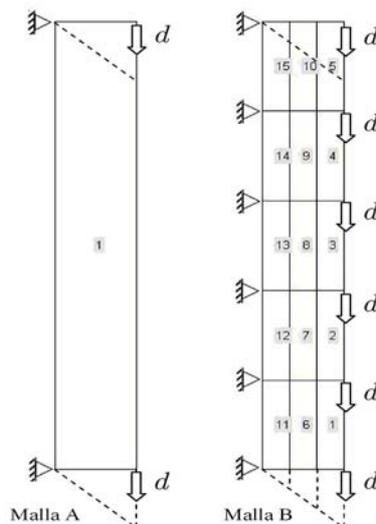
En la Figura 5 se muestra la configuración geométrica de los elementos del ensayo, el mismo se puede considerar bajo la condición de deformación plana.

Para realizar la simulación numérica del ensayo se consideró la simetría de la probeta discretizando solamente la mitad derecha de la misma. Se utilizaron dos mallas con diferente nivel discretización; en el primer caso se utilizó un único elemento (malla A) y, en el segundo caso, 3 x 8 elementos (malla B) como se puede apreciar en la Figura 6, donde también se indican las condiciones de contorno consideradas y los desplazamientos impuestos  $d$ .

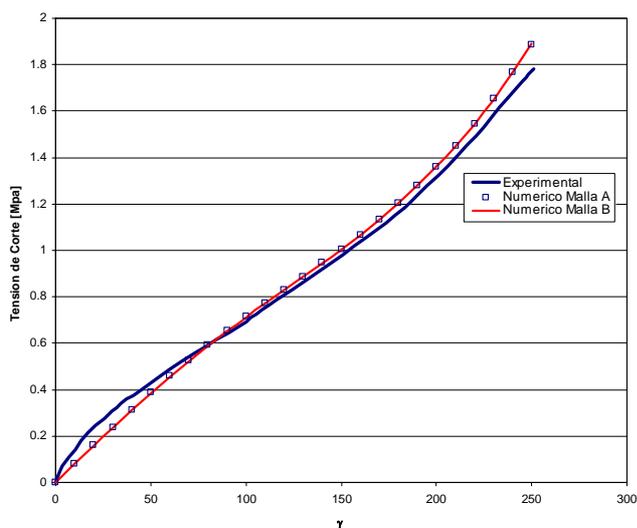
La simulación numérica se llevó a cabo en este caso, imponiendo desplazamientos verticales sobre la cara derecha de los modelos representados en la Figura 6, manteniendo fijo el lado izquierdo. Los desplazamientos verticales mencionados se aplicaron hasta alcanzar un desplazamiento equivalente al 250% del espesor del bloque. Las curvas que representan la variación de tensión de corte en función de la deformación tangencial  $\gamma$  obtenidas mediante la simulación numérica se representan en la Figura 7. Se reproduce también en la figura los resultados experimentales obtenidos por Núñez y Celentano (2005).



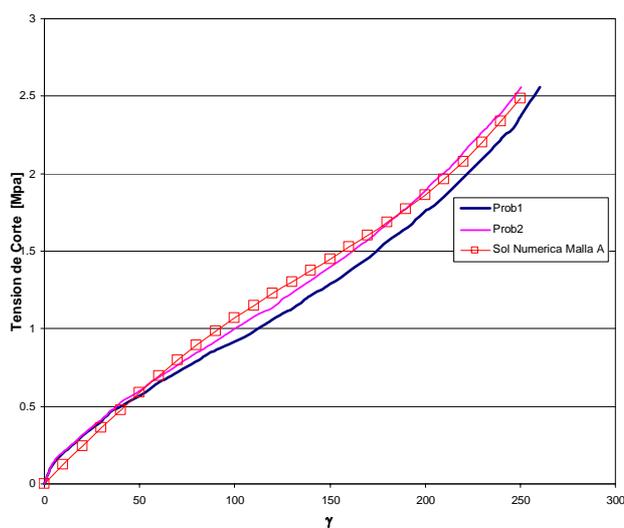
**Figura 5:** Dimensiones de la probeta para el ensayo de corte (Núñez y Celentano, 2005)



**Figura 6:** Mallados utilizados para la simulación numérica del ensayo de corte.



**Figura 7:** Ensayo de corte cauchero HD-812



**Figura 8:** Ensayo de corte cauchero HD-812.30

En la Figuras 7 y 8 se observa que se obtiene una muy buena aproximación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante el modelo presentado en este trabajo. Los resultados obtenidos con los dos mallados utilizados son prácticamente coincidentes. El número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia varía entre 4 y 13. Se utilizó para el módulo de elasticidad volumétrico un valor de  $k = 1000$  MPa. La tolerancia en fuerzas se fijó en 0.01.

### 5.3 Dispositivos de apoyo

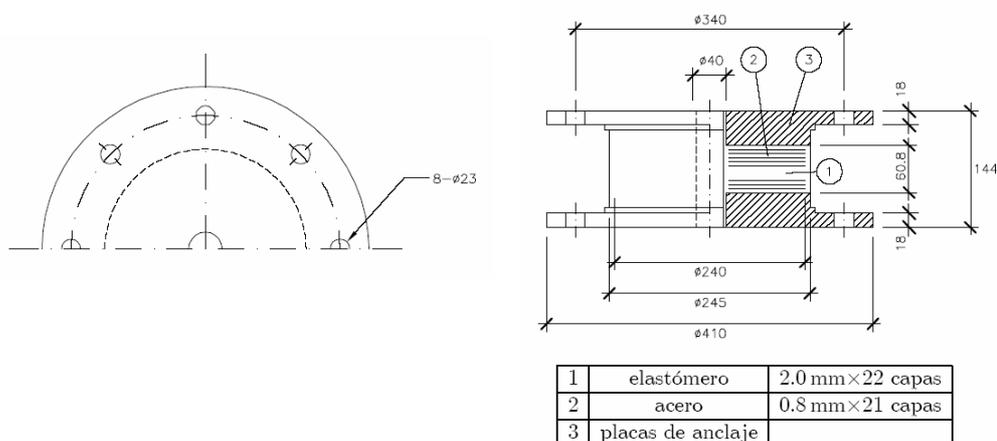
En esta sección se analiza un dispositivo de apoyo de caucho laminado. Las características geométricas del dispositivo se indican en la Figura 9 (Kelly, 1991). El dispositivo consta de

22 capas de elastómero de 2mm de espesor y 21 capas de acero de 0.8mm de espesor. La sección transversal es circular de 240 mm de diámetro.

Los resultados experimentales corresponden a ensayos realizados por el Eathquake Engineering Research Center de la Universidad de California sobre estos dispositivos.

### 5.3.1 Micromodelos

Se realizaron dos modelos numéricos, uno más detallado que se denomina modelo A y otro simplificado, que se denomina modelo B. El modelo A consta de 22 capas de caucho y 21 capas de acero intermedias. En el modelo B y se discretiza la altura en 6 capas de elastómero de 0.075mm y 5 capas intermedias de acero de 0.030mm. La relación entre ambos materiales, así como la altura del dispositivo son similares en ambos modelos. Las capas de acero generan una restricción al movimiento en la interfase elastómero – acero, de tal forma que se verifica un estado plano de deformación. El análisis numérico se llevó a cabo bajo esta condición.



**Figura 9:** Características geométricas de los dispositivos analizados (Kelly, 1991)

Para ambos modelos se adopta un ancho igual al diámetro del dispositivo (240 mm). El espesor se tomó de 188.5 mm. en la dirección perpendicular al plano de manera que el área transversal resulta igual a la del dispositivo.

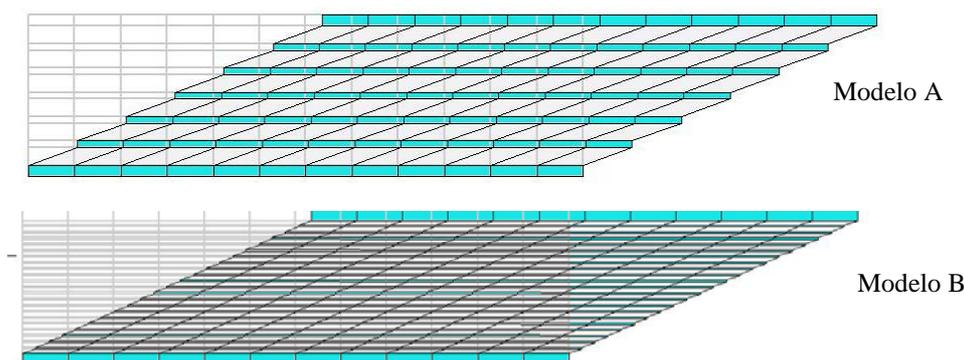
Los parámetros materiales utilizados en este ejemplo de aplicación se resumen en la Tabla 3. Se utilizó para el módulo volumétrico un valor de  $k = 1000$  MPa y una tolerancia en fuerzas de 0.01.

$\mu_1 = 0.4635$ MPa	$\mu_2 = 0.0009$ MPa	$\mu_3 = -0.009$ MPa
$\alpha_1 = 1.9$	$\alpha_2 = 5.9$	$\alpha_3 = -1.6$

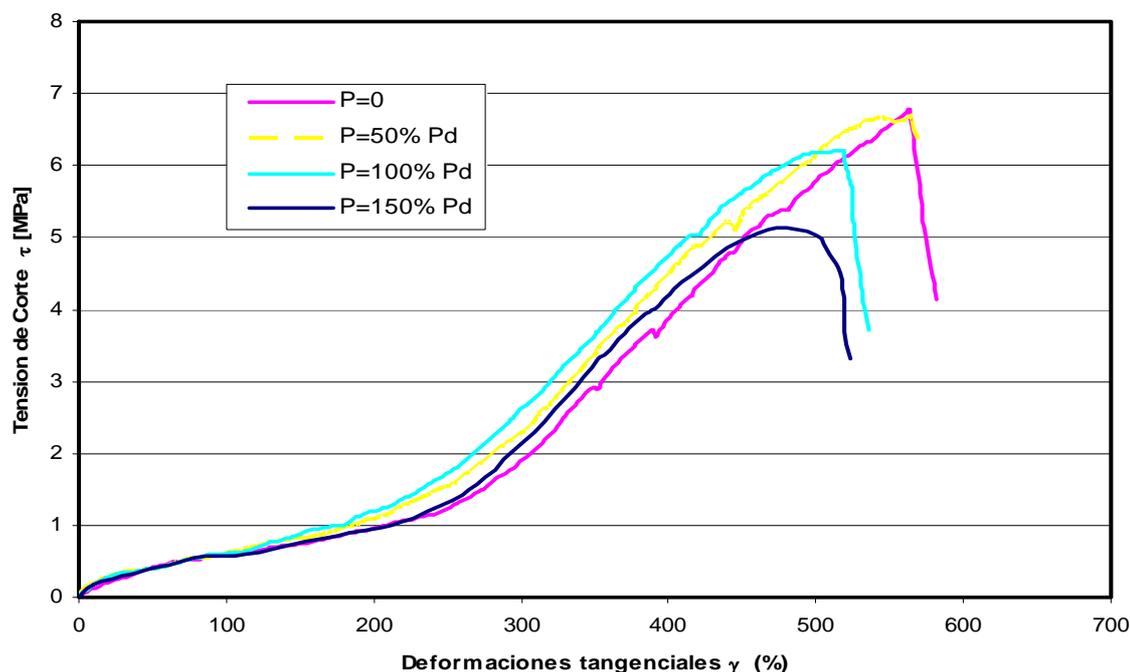
**Tabla 2:** Parámetros de Ogden para el elastómero laminado

Se analiza el comportamiento a corte imponiendo desplazamientos horizontales crecientes en la placa superior de acero. Se aplicaron pasos de desplazamiento de 2.54cm hasta alcanzar un desplazamiento total de 25.4cm (Kelly, 1991). Los modelos utilizados y sus correspondientes deformadas en la Figura 10.

Los diagramas tensión tangencial en función de la deformación de corte, correspondientes a los ensayos experimentales se grafican en la Figura 11. Las diferentes curvas corresponden a la aplicación de diferentes niveles de carga vertical impuesta de manera simultánea al desplazamiento horizontal. El nivel de carga vertical se expresa en función de la carga vertical de diseño  $P_d$ . (Kelly, 1991). La deformación máxima alcanzada antes de la rotura disminuye de manera apreciable al aumentar la carga vertical.



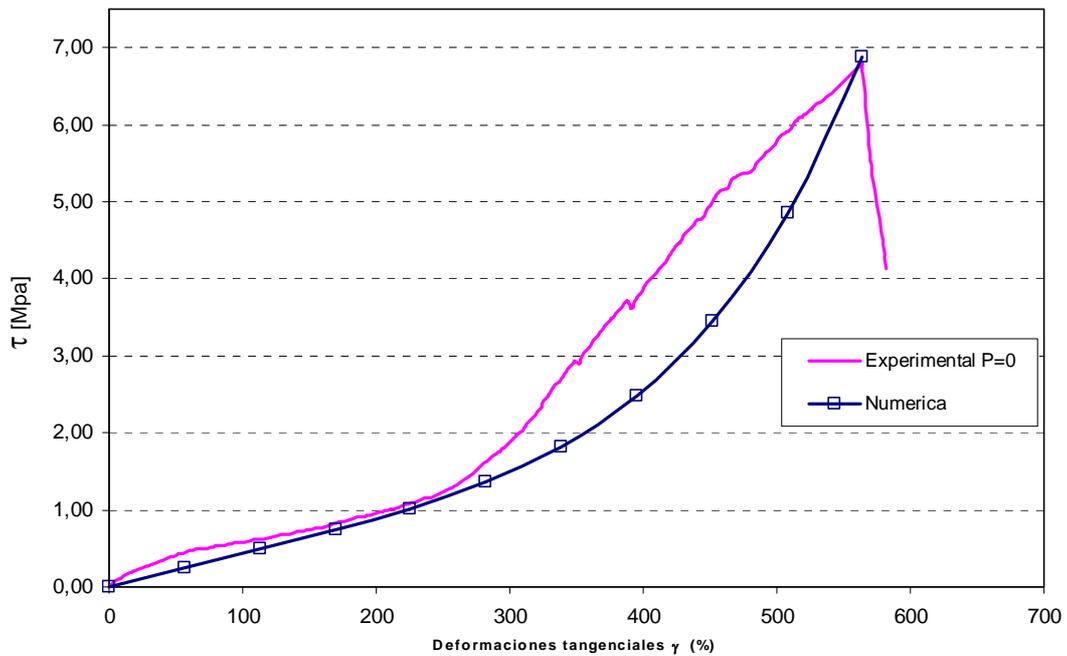
**Figura 10:** Deformada de los modelos sometidos a corte.



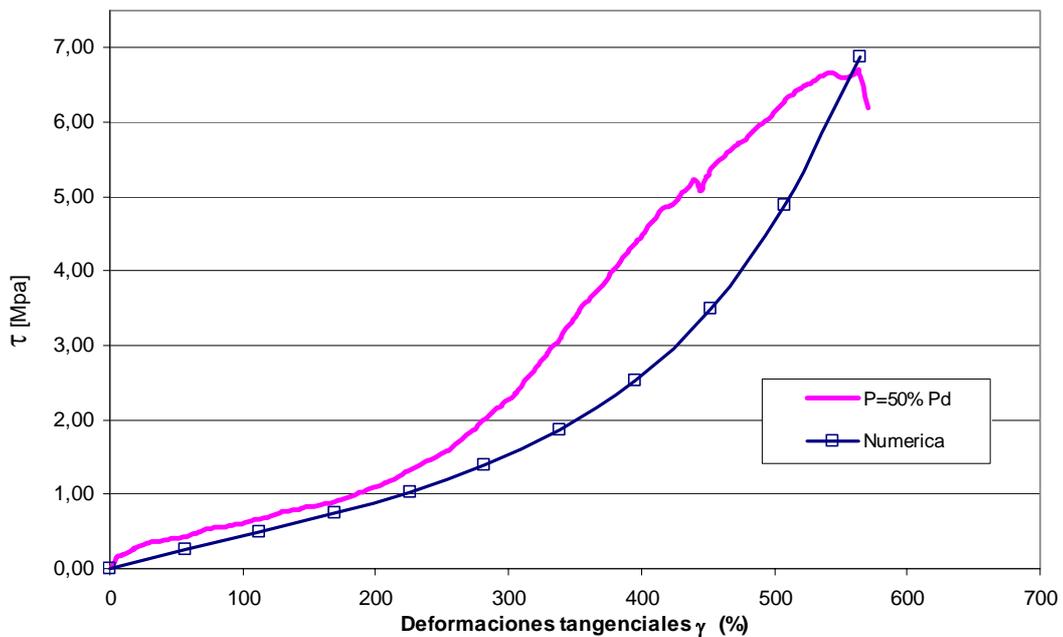
**Figura 11:** Diagrama tensión - deformación para fuerza horizontal monótona cuasi-estática hasta la rotura. Dispositivos de alto amortiguamiento (Nelly, 1991).

En las Figuras 12 y 13 se representan gráficamente las curvas correspondientes a los resultados experimentales (Kelly, 1991) y las curvas obtenidas mediante el modelo numérico utilizado en esta tesis. El modelo numérico, con los parámetros materiales dados en la Tabla 2, reproduce de manera razonable la forma del diagrama tensión-deformación. Los valores obtenidos mediante la simulación numérica aproximan razonablemente a los experimentales

hasta un rango de deformación del orden del 280%. Para valores mayores de deformación si bien se observa un marcado aumento de rigidez, el modelo no logra reproducir exactamente la forma de la curva experimental, que cambia la pendiente casi abruptamente, mientras que el modelo numérico presenta un incremento gradual en la pendiente.



**Figura 12:** Diagrama tensión - deformación para fuerza horizontal monótona cuasi estática sin aplicación de cargas verticales

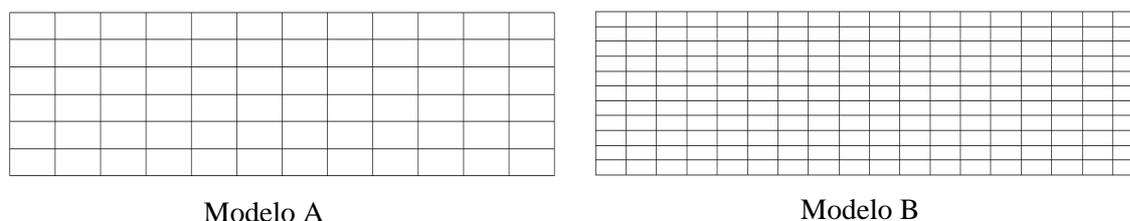


**Figura 13:** Diagrama tensión-deformación para fuerza horizontal aplicada simultáneamente con una carga vertical correspondiente al 50% de la carga de diseño  $Pd$

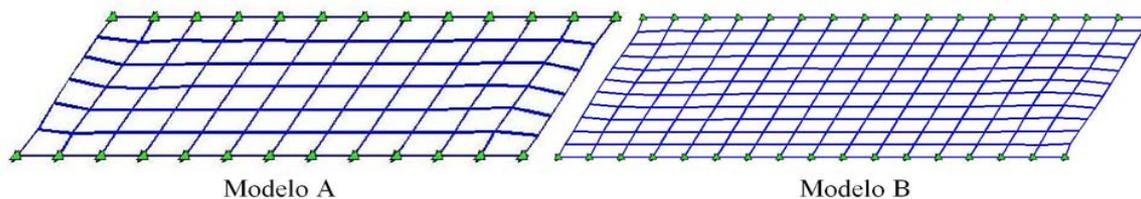
### 5.3.2 Macromodelos basados en la modificación de la teoría de mezclas propuesta

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la teoría de mezclas presentada en la Sección 4 de este trabajo. Para esto, se realizaron dos modelos del dispositivo de apoyo analizado (Fig. 9). Los modelos se identifican con las letras A y B, correspondiendo cada uno a diferentes niveles de discretización. El modelo A corresponde a un mallado más grueso de 6 elementos de alto por 12 de largo, mientras que el modelo B presenta una malla más fina de 11x18 elementos (ver Fig. 14).

Los factores de participación volumétrica de los componentes (caucho y acero) del dispositivo analizado son  $k_1=0.723$  (caucho) y  $k_2=0.277$  (acero). Los parámetros materiales correspondientes a ambos materiales son los indicados en la Tabla 2. En la Sección 4 se plantearon tres posibles alternativas para la implementación de la teoría de mezclas. Debido a que los resultados numéricos obtenidos en los tres casos resultaron prácticamente coincidentes, sólo se grafican los correspondientes a la alternativa denominada a. Los modelos utilizados se indican en las Fig. 14 y sus correspondientes deformadas en la Fig. 15.



**Figura 14:** Modelos utilizados en la simulación numérica.



**Figura 15:** Deformada de los macromodelos A y B sometidos a corte.

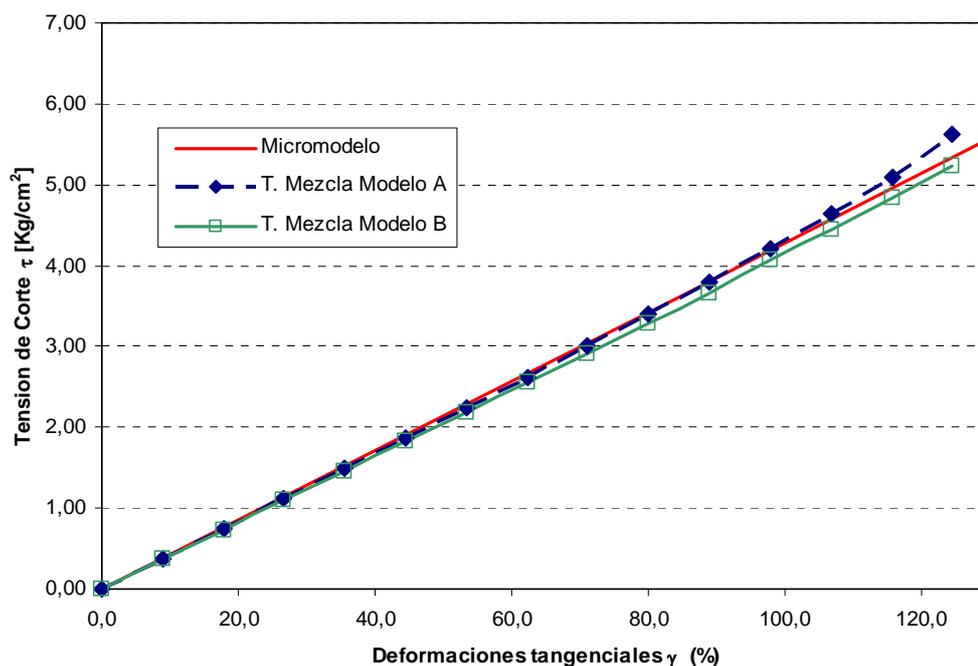
La implementación de la teoría de mezclas generalizada, permite alcanzar una deformación tangencial máxima del orden del 25 al 30%, según el mallado, mas allá de la cual no fue posible obtener convergencia. Esto se debe principalmente a que en esta teoría se utiliza los tensores constitutivos tangentes al origen para obtener los factores  $\phi$ , que resultan constantes y no pueden reflejar la evolución de las propiedades mecánicas de los componentes. Las modificaciones propuestas, permiten alcanzar una deformación tangencial máxima del orden del 140%.

Aunque las tres alternativas propuestas en la Sección 3 dan resultados prácticamente coincidentes para este caso, su desempeño y posibilidades de aplicación son diferentes. La alternativa a) que utiliza un método inverso es la mas rápida con un ahorro de tiempo del orden del 22% al 30% respecto de las que utilizan tensores secantes. La desventaja que presenta esta alternativa es que la ecuación de cierre se verifica de manera exacta solo para una de las componentes del tensor de tensiones. Por esta razón es posible obtener buenos

resultados en estados tensionales simples donde la contribución energética de una de las componentes sea sensiblemente superior a la de las demás. Las alternativas b) y c), que utilizan tensores secantes, tienen una performance muy similar, la alternativa b) en algunos pasos permite disminuir ligeramente el número de iteraciones necesarias por lo que resulta ligeramente más rápida, la alternativa c) por otra parte realiza un número menor de operaciones lo que compensa, en parte, la menor velocidad de convergencia, siendo la diferencia de velocidad entre ambas del orden del 4%. Estas dos alternativas verifican la ecuación de cierre para todas las componentes del tensor de tensiones, por lo que son indicadas para estados tensionales más complejos. El uso de un tensor secante al origen resultó, en este caso, más robusto permitiendo obtener convergencia aún con pasos de carga mayores que en el caso de las alternativas a) y b).

En la Figura 16 se grafica el diagrama tensión-deformación para fuerza horizontal, obtenida mediante la aplicación de la modificación de la teoría de mezcla propuesta, dado que los resultados de las tres alternativas resultaron coincidentes resulta una sola curva para cada mallado, se grafican también los resultados correspondientes al micromodelo. Si bien se alcanza el mismo nivel de deformación tangencial en ambos, para el modelo A se requiere relajar la tolerancia al 4% en fuerzas, mientras que en el modelo B la tolerancia es de 1%, igual a la utilizada en el micromodelo.

En ambos casos el número de iteraciones necesarias varía entre 4 para los primeros pasos de desplazamiento y 25 para los últimos.



**Figura 16:** Diagrama tensión deformación para fuerza horizontal, correspondiente a la modificación propuesta de la teoría de mezclas

## 6 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en los ejemplos de aplicación muestran un buen acuerdo entre la simulación numérica y los datos experimentales para deformaciones inferiores al 300%, y predicen razonablemente la deformación correspondiente a la carga última del dispositivo.

Los valores de deformación y tensión de las placas metálicas obtenidos del micromodelo a través de las simulaciones numéricas justifican el empleo de un modelo elástico lineal para caracterizar su comportamiento, dado que las tensiones están muy por debajo del límite de proporcionalidad y las configuraciones de referencia y deformada resultan prácticamente coincidentes, a partir de lo cual puede inferirse que la fase metálica de refuerzo se mantiene en el rango de las pequeñas deformaciones.

En las simulaciones numéricas los elementos  $u/p:4/1$  exhiben en general un buen comportamiento, con un excelente acuerdo entre los resultados correspondientes a diferentes niveles de discretización de los modelos. Para niveles muy altos de deformación se aprecia en algunos elementos distorsiones excesivas.

La modificación de la teoría de mezclas propuesta se basa fundamentalmente en una actualización del factor  $\phi$  que se utiliza para distribuir la deformación entre los componentes, en función de los cambios en las propiedades mecánicas que experimentan los mismos. Esta situación se subsana mediante la aplicación de un método inverso para la evaluación de la condición de cierre de la teoría de mezclas que permite corregir adecuadamente el operador constitutivo.

La modificación de la teoría de mezclas propuesta permite extender de forma significativa el rango de aplicación de la misma hasta deformaciones del orden del 140% lo cual representa un avance importante. Sin embargo a fin de obtener una herramienta aplicable con fines prácticos es necesario continuar el trabajo de desarrollo de la misma, dado que la deformación de rotura de los elastómeros comúnmente utilizados en estos dispositivos es mucho mayor.

## REFERENCIAS

- Ahmadi, H.R., Fuller, K.N.G. and Muhr, A.H., Predicting Response of non-linear damping rubber isolation systems. *Proceedings of 11th World Conference in Earthquake Engineering*, Acapulco, 1996.
- Ali, H.M. and Abdel-Ghaffar, A.M., Modeling of rubber and lead passive-control bearings for seismic analysis. *Journal of Structural Engineering*, 121:1134–1144, 1995.
- Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996.
- Bellomo F.J., *Estudio de Estructuras de Materiales Compuestos de Matriz Elastomérica Reforzada Sometidos a Grandes Deformaciones*. Tesis de Magister en Ingeniería Estructural, Universidad Nacional de Tucumán, 2007.
- Broyden, C.G., A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, 19: 577–593, 1965.
- Burtscher, S.L. and Dorfmann, A., Compression and shear tests of anisotropic high damping rubber bearings. *Engineering Structures*, 26(13):1979-1991, 2004.
- Cheng-Hsiung Chang, Modeling of laminated rubber bearings using an analytical stiffness matrix. *International Journal of Solids and Structures*, 39:6055–6078, 2002.
- Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume II: Advanced Topics*. John Wiley & Sons, 1996.
- Fuller, K.N.G., Gough, J., Pound, T.J. and Ahmadi, H.R., High damping natural rubber seismic isolators. *Journal of Structural Control*, 4:19–40, 1997.
- Fuller, K.N.G., Gough, J., Ahmadi, H.R., FE analysis of seismic isolators: comparison with experimental results. *Proc. third IAEA Research Co-ordination Meeting*, Hertford, UK, 1998.
- Hwang, J.S. and Ku, S.W., Analytical modeling of high damping rubber bearings. *Journal of Structural Engineering*, 123(8):1029—1036, 1997.

- Kelly, J.M., *Dynamic and Failure Characteristics of Bridgestone Isolation Bearings*, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, Berkeley, 1991.
- Núñez C.A. and Celentano D.J., Caracterización experimental y numérica de compuestos elastoméricos utilizados en disipadores de energía. *Mecánica computacional* Vol XXIV, 2005.
- Ogden, R.W. *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood Limited, 1984.
- Simo, J. C., *Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*, Vol. III of Handbook of Numerical Analysis, Elsevier Science Publishers, 1993
- Oller, S. *Simulación numérica del comportamiento mecánico de materiales compuestos*. Monografía CIMNE N°-74, 2003.
- SMiRT11 Seismic Isolation and Response Control for Nuclear and Non-Nuclear Structures. *Structural Mechanics in Reactor Technology*, SMiRT11, Tokyo, 1991.
- Skinner, R. I., Robinson, W. H. & McVerry, G., *An Introduction to Seismic Isolation*, John Wiley and Sons, Chichester, 1993.